4

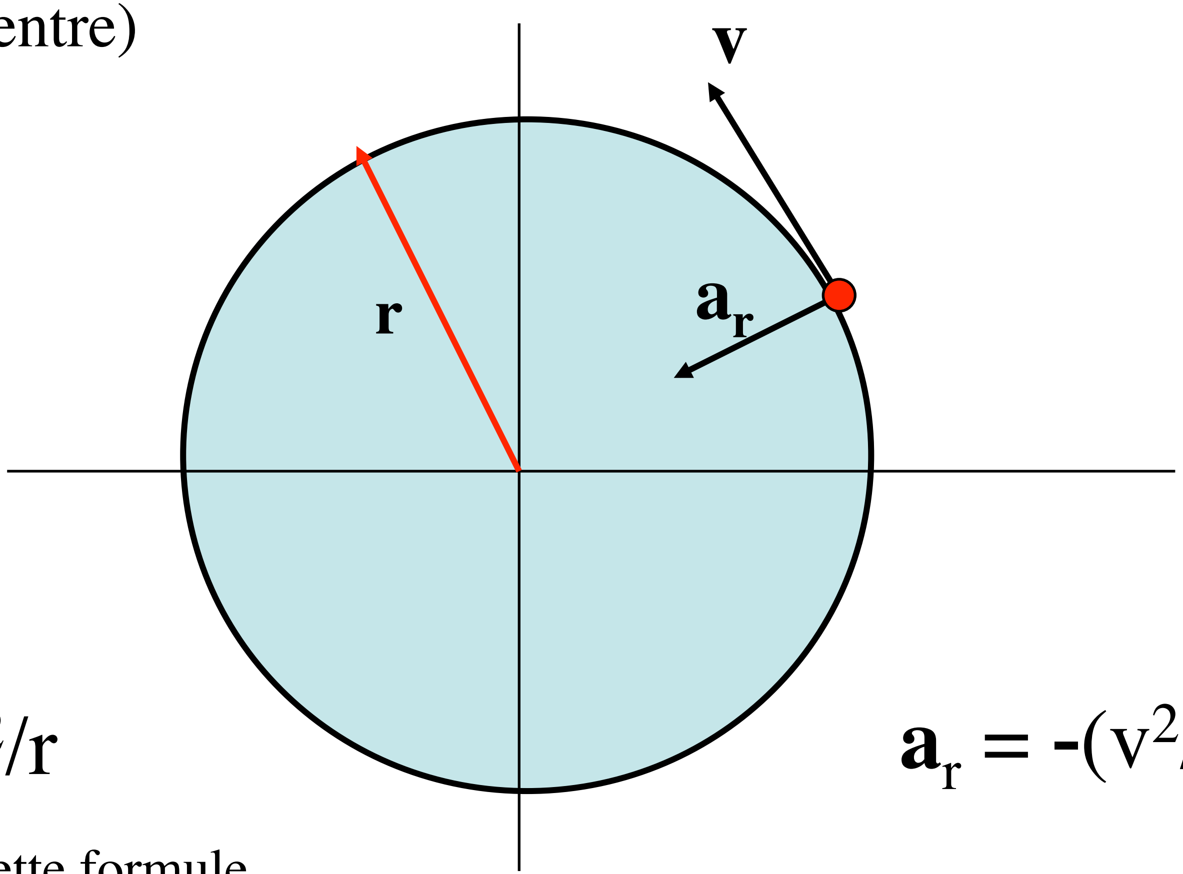
Le mouvement circulaire

v7.1

NGC 2997b

Mouvement circulaire .1

$\mathbf{a}_r$: accélération centripète
(vers le centre)



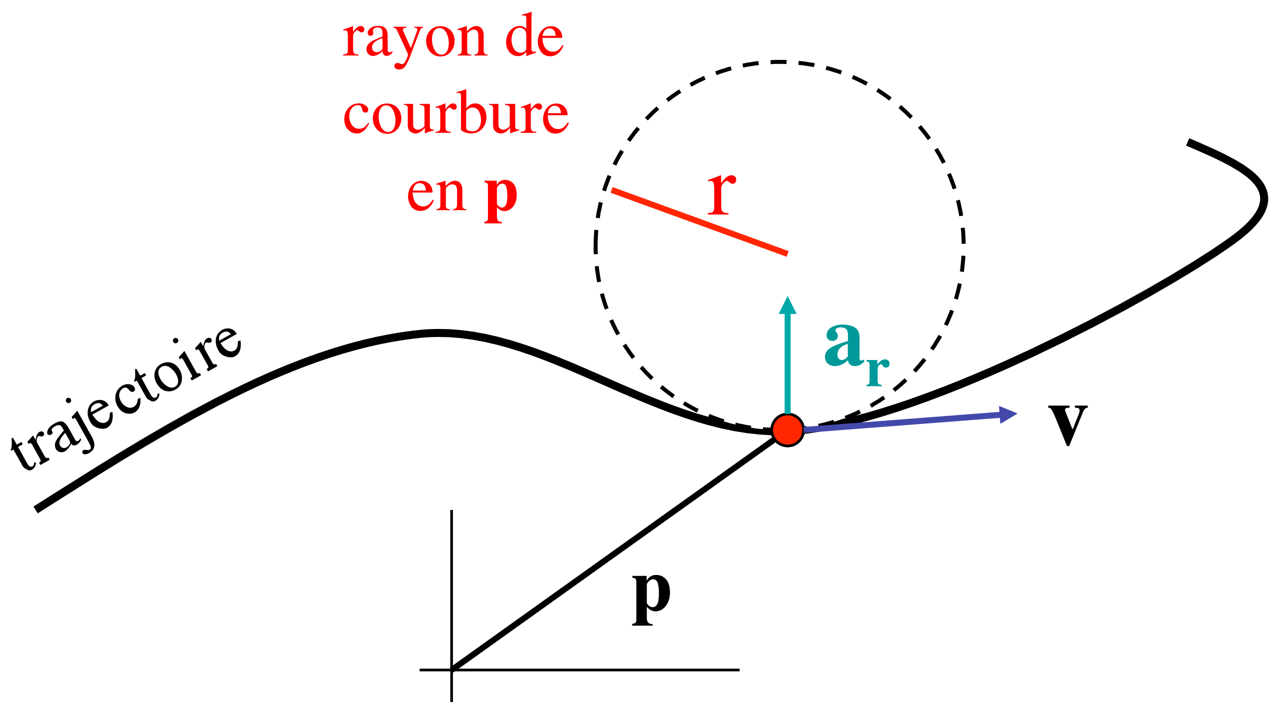
$$a_r = v^2/r$$

$$\mathbf{a}_r = -(v^2/r)\hat{\mathbf{r}}$$

Q.: prouver cette formule
par analyse dimensionnelle

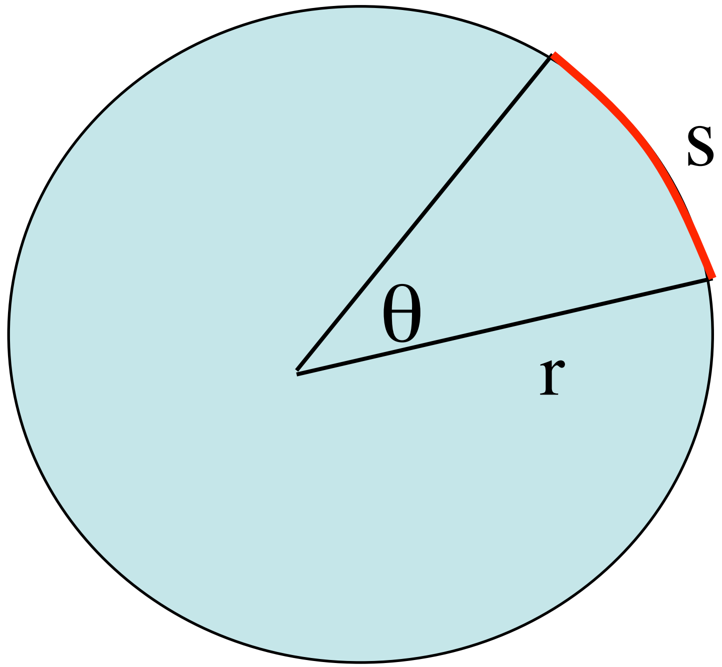
$$\mathbf{F}_r = -m(v^2/r)\hat{\mathbf{r}}$$

Mouvement circulaire .2



$$a_r(\mathbf{p}) = v(\mathbf{p})^2/r(\mathbf{p})$$

Les angles



$$\boxed{\theta \text{ radians} = s / r}$$

exemple: $s = 2\pi r \quad \Longrightarrow \quad \theta = 2\pi r / r = 2\pi$

donc 2π radians $\equiv 360°$ radians = degrés / 57.32

Mouvement circulaire .3

Vitesse angulaire : $\omega = d\theta / dt$

Accélération angulaire : $\alpha = d\omega / dt$

Cas important: mouvement circulaire à vitesse constante v sur un cercle de rayon r :
L'objet parcourt le cercle en un temps

$$T = 2\pi r / v \qquad \text{(T est la période)}$$

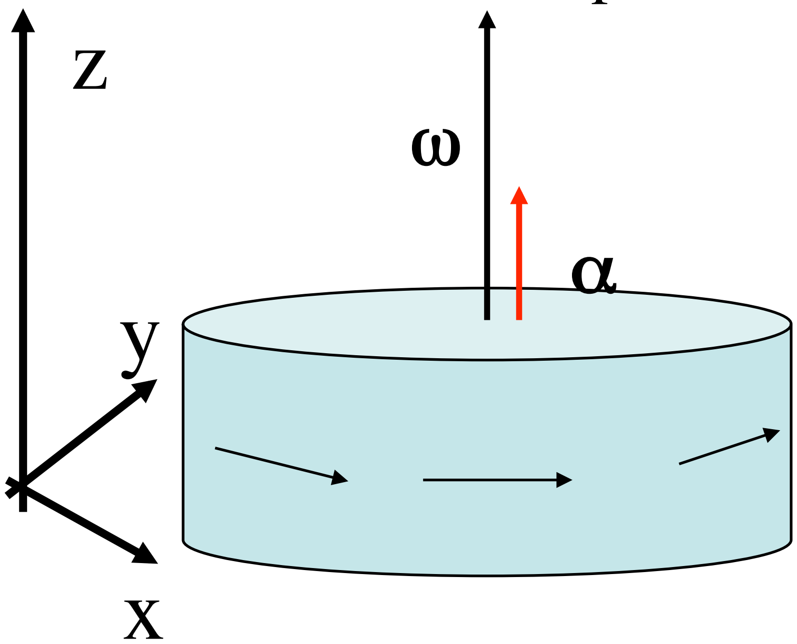
la vitesse angulaire est alors (en radians/s):

$$\omega = 2\pi / T = 2\pi v / 2\pi r = v / r$$

Mouvement circulaire .4

Conventions pour une représentation vectorielle:

Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est parallèle à l'axe de rotation.
Le sens est celui du pas de vis (ou du tire-bouchon).



$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega} / dt$

est aussi // à l'axe de rotation

p. ex., dans la figure $\boldsymbol{\omega}$ est positif, parallèle à z.
$\boldsymbol{\alpha} > 0$ indique que $\boldsymbol{\omega}$ augmente avec le temps

α non nul <=> mouvement non uniforme

Mouvement circulaire .5

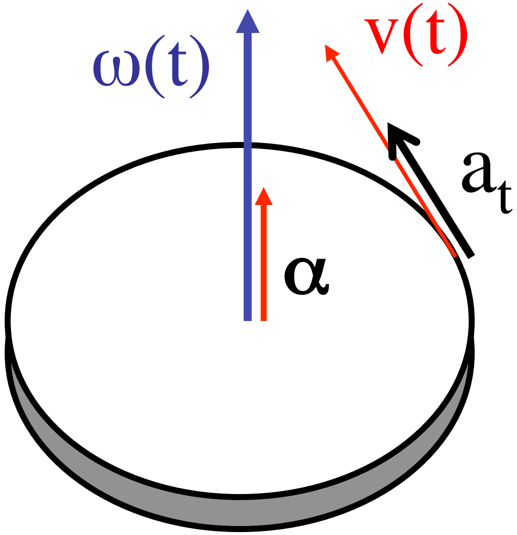
cas où le mouvement n'est pas uniforme $\alpha \neq 0$ $\quad |\vec{v}| \neq cte$

$v = \omega r$ est toujours valable instantanément

avec $v = v(t)$, $\omega = \omega(t)$.

Nous avons alors une accélération "tangentielle"

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$$



Q.: montrer que $a_t = \alpha r$

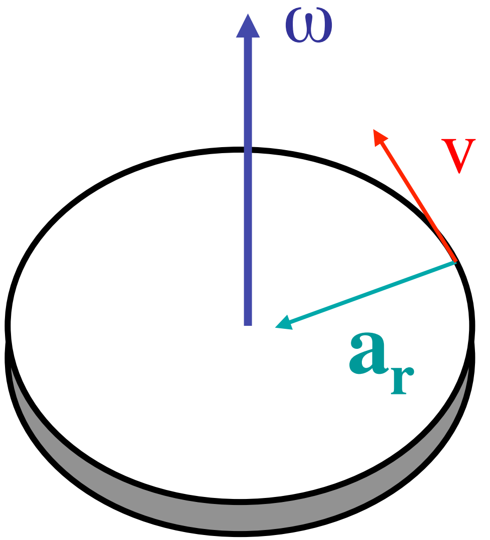
Mouvement circulaire .6

cas où le mouvement est uniforme, $|\vec{v}| = \text{cte}$

on a $v = \omega r$ constant ($a_t = 0$)

que l'on remplace dans $\mathbf{a}_r = -(v^2 / r)\hat{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{a}_r = -(\omega^2 r^2 / r)\hat{\mathbf{r}} = - \omega^2 r \,\hat{\mathbf{r}}$$



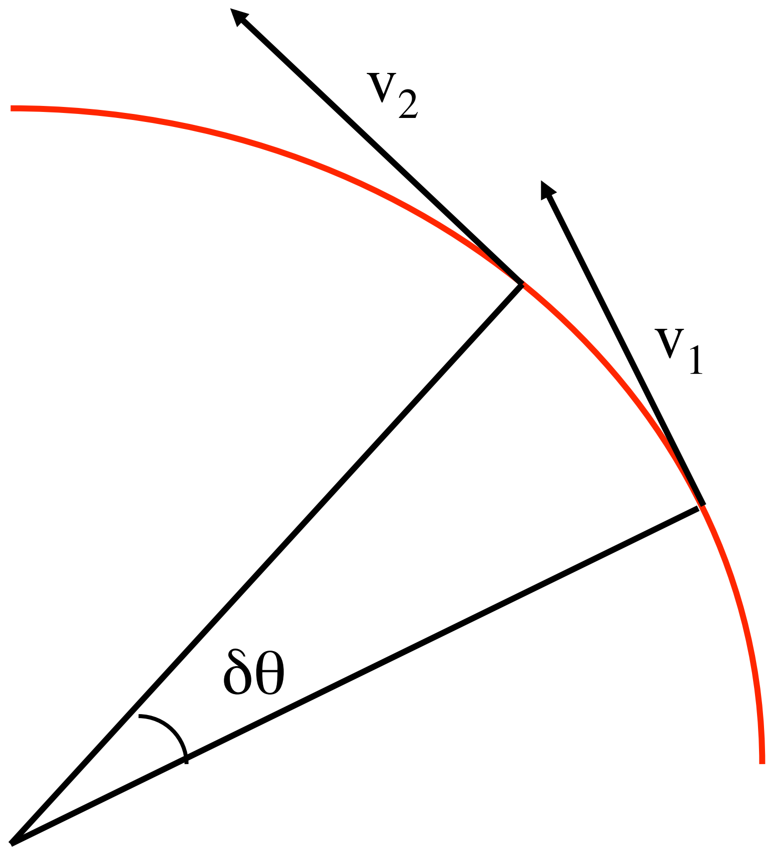
Attention: ne pas confondre a_r avec l'accélération tangentielle a_t que l'on observe quand la vitesse de rotation change, $\omega \neq$ cte.

Mouvement circulaire .7

Démontrer que dans un mouvement circulaire uniforme

$$\mathbf{a}_r = -\,\omega^2\, r\, \hat{\mathbf{r}}$$

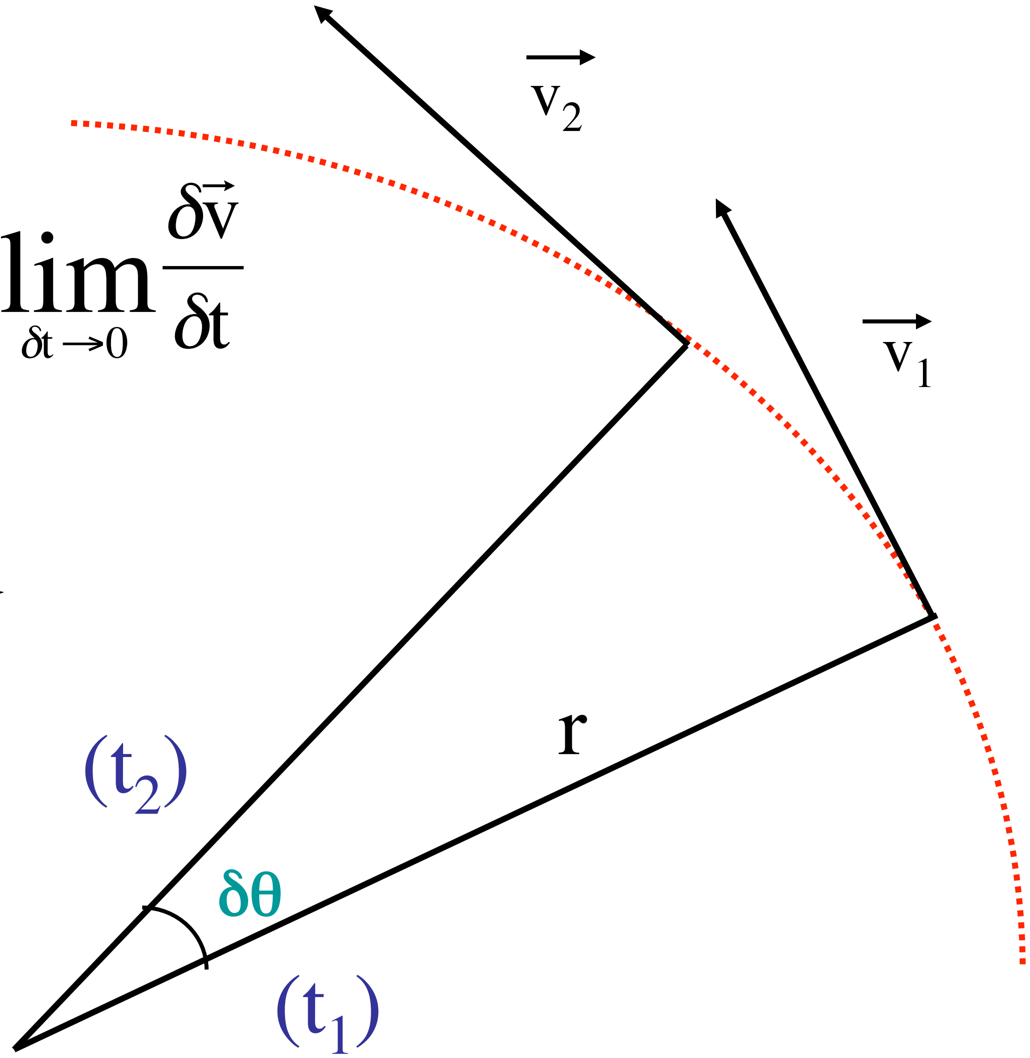
par la méthode des
"petits accroissements"



Calcul de l'accélération dans un mouvement circulaire de rayon r, à vitesse cte = v

$$\vec{a}_r = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \vec{v}}{\delta t}$$

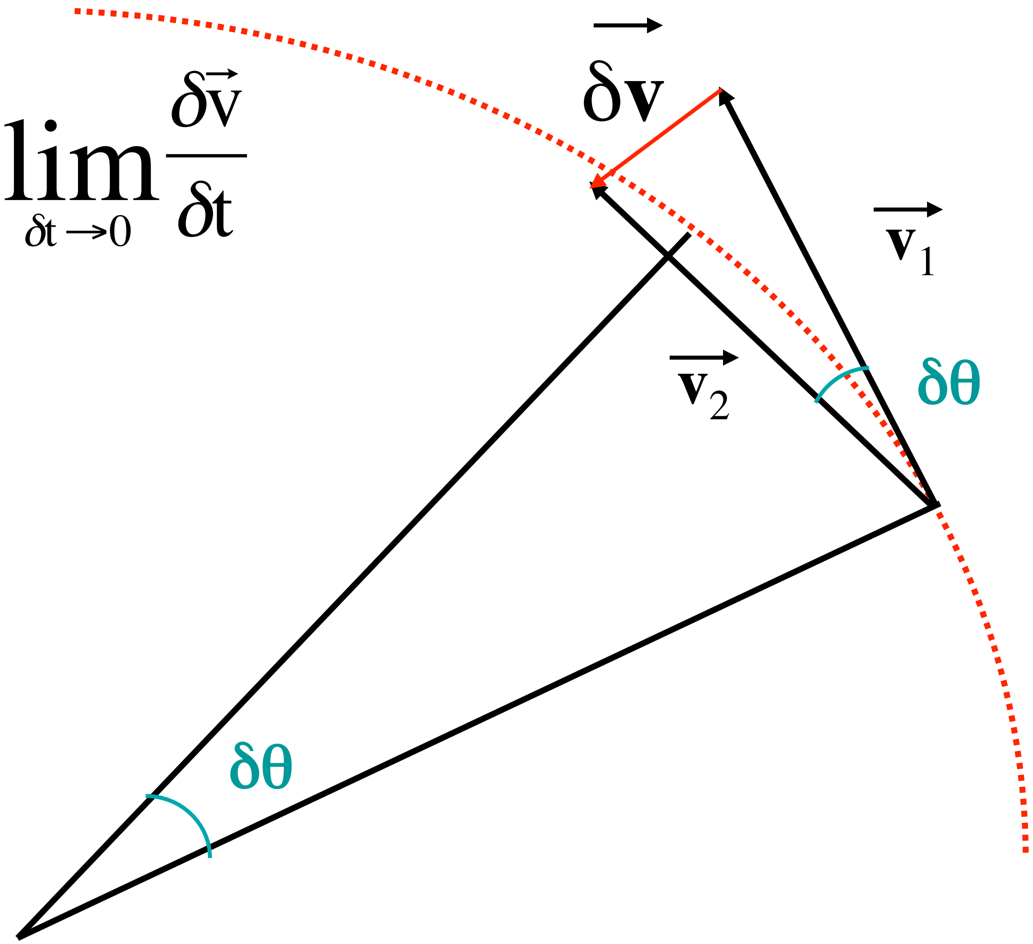
$\delta\theta$ est l'angle parcouru dans le temps δt



Calcul de l'accélération .2

$$\vec{a}_r = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta \vec{v}}{\delta t}$$

transport parallèle
de v_2 vers v_1:
$\overrightarrow{\delta v}$ anti// $\overrightarrow{r}$



angles en rad !

Calcul de l'accélération .3

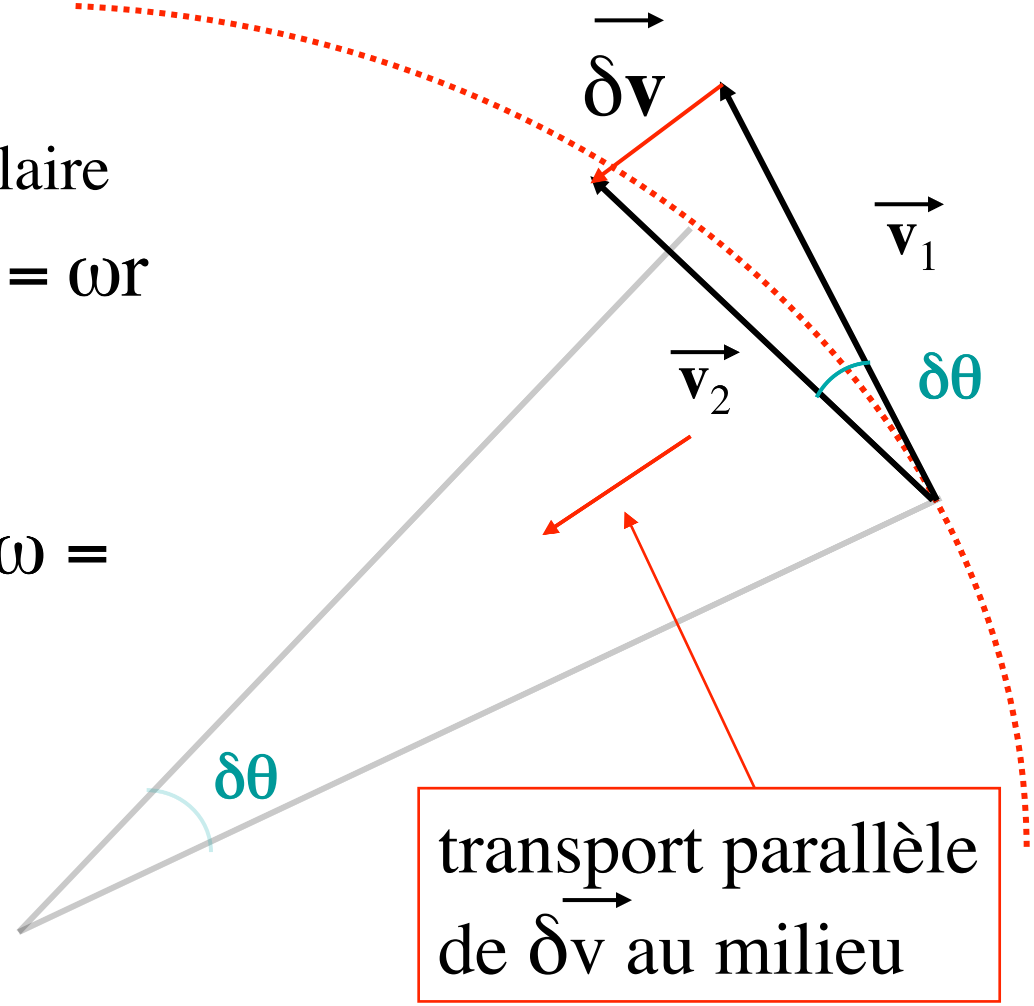
$$\delta\theta \approx \frac{\delta v}{v} \quad \Rightarrow \quad \delta v \approx v\,\delta\theta$$

avec ω la vitesse angulaire

$$\omega = \delta\theta/\delta t \quad \text{et} \quad v = \omega r$$

$$a_r \approx \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{v\delta\theta}{\delta t} = v\omega =$$

$$= \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$



Moment des forces τ, accélération angulaire α et moment d'inertie I

Force F appliquée à une tige fixée en C

F_t est la composante qui agit sur la rotation du point de masse m

F_t est $\perp$ au rayon r

$$F_t = m\, a_t \quad , \qquad a_t = r\, \alpha$$

$$\Rightarrow \quad F_t = m\, r\, \alpha$$

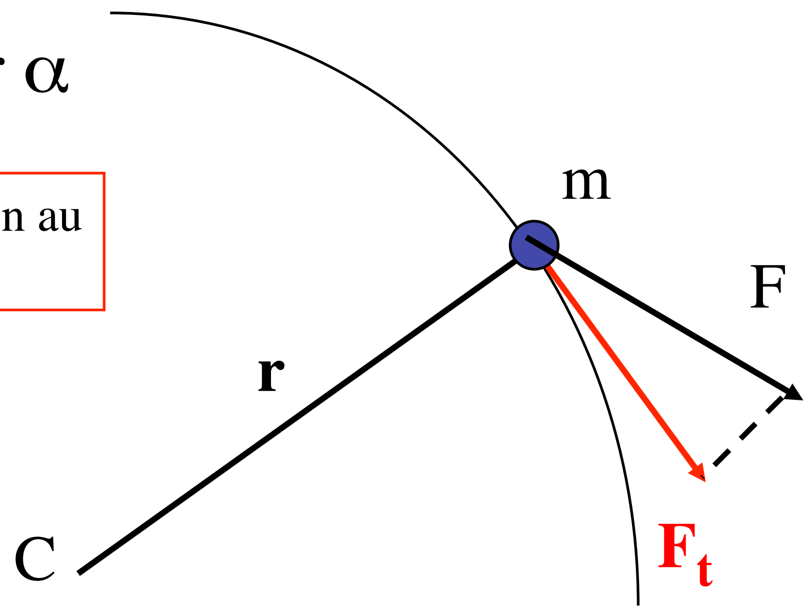
multiplier par r :

attention au carré

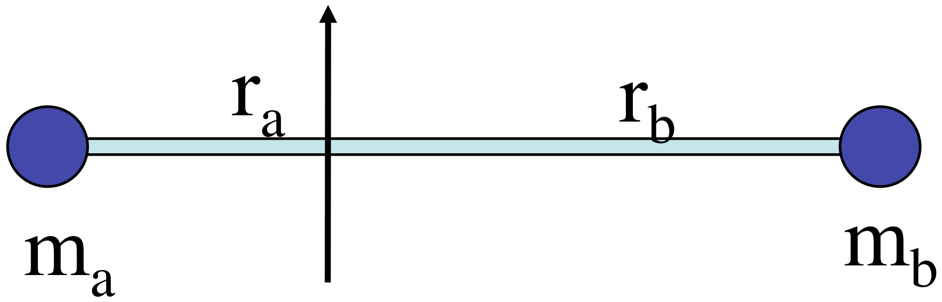
$$r\, F_t = m\, r^2\, \alpha$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = I\, \boldsymbol{\alpha} \qquad \text{avec } I = m\, r^2}$$

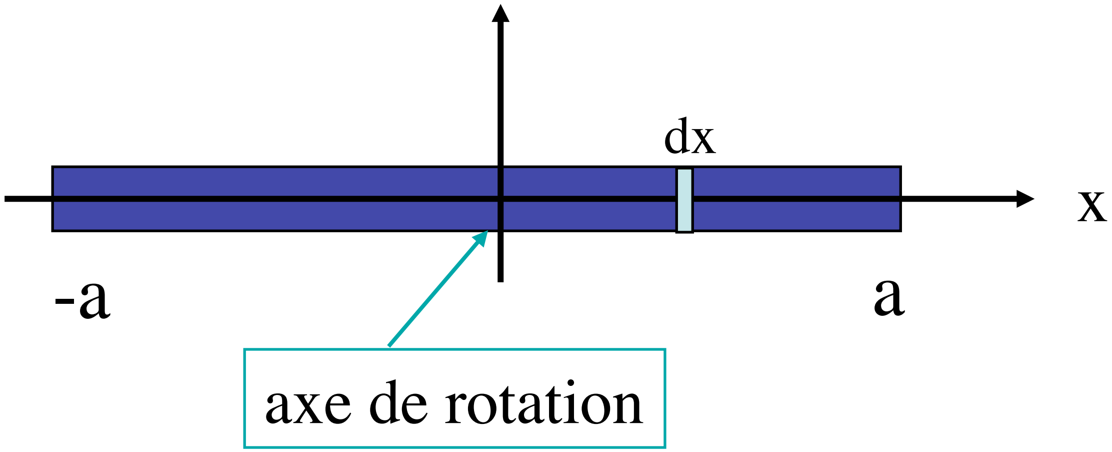
(analogue à F = ma)



Moment d'inertie .1



$$I = m_a\, r_a^{\,2} + m_b\, r_b^{\,2}$$



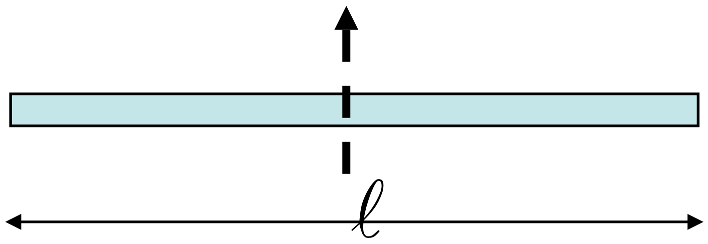
tige de masse m
(densité uniforme)
et de longueur ℓ=2a

masse d'un élément de longueur dx vaut $(m/2a)dx$

$$I = \int_{-a}^{a} x^2 (m/2a)\, dx = (m/2a)\, x^3/3 \Big|_{-a}^{a} = ma^2/3$$

(ou $I = m(\ell/2)^2/3 = m\ell^2/12$)

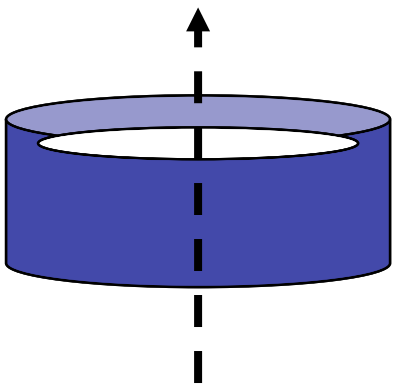
Moment d'inertie .2



$I = m\,\ell^2/12$

attention
à la position
de l'axe de
rotation !

$I = m\,\ell^2/3$



tube (mince) de rayon R: $I = mR^2$

disque de rayon R: $I = mR^2/2$

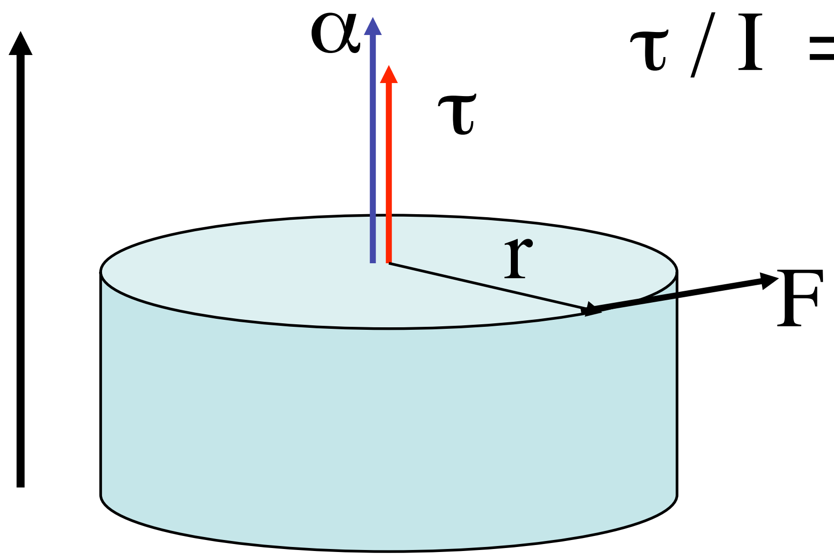
sphère homogène $I = 2mR^2/5$

enveloppe sphérique $I = 2mR^2/3$

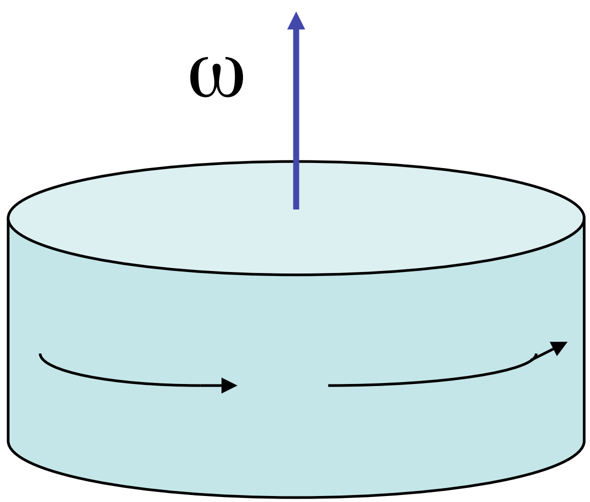
Moment des forces et rotation

Un $\boldsymbol{\tau}$ positif induit un $\boldsymbol{\alpha}$ positif (cas de la figure).
Si l'objet est initialement au repos,
il acquiert un $\boldsymbol{\omega}$ positif (une rotation anti-horaire)

$$\tau / I = \alpha$$

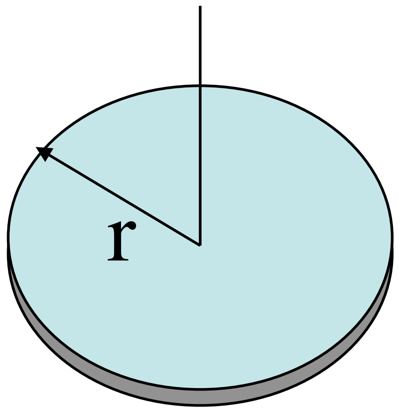


i)



f)

Exemple



Une meule de r=0.08 m   et M=2 kg

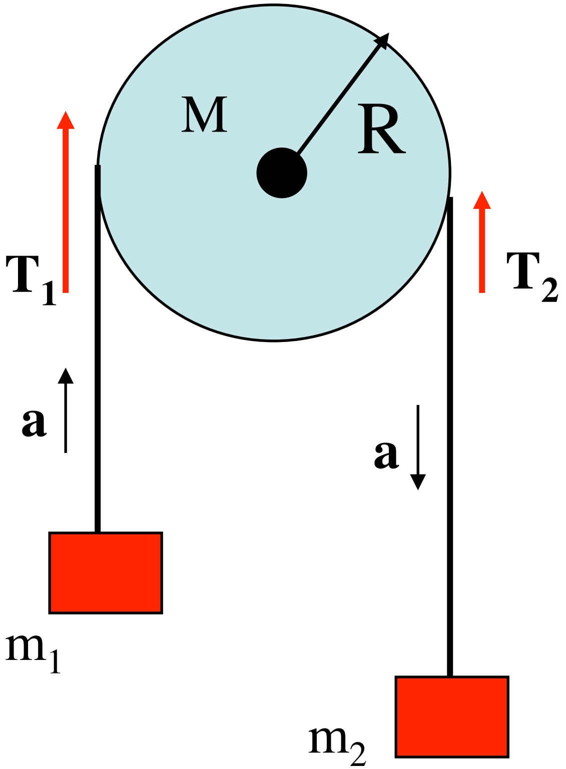
$I = Mr^2/2 = 2 \text{ x } 0.08^2/2 = 0.0064 \text{ kg m}^2$

moment de la force qui fait passer le disque du repos → ω=120 rad/s en 8 secondes ?

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{120}{8} = 15 \quad \text{rad/s}^2$$

$$\tau = I\alpha = 0.0064 \times 15 = 0.096 \;\; \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\text{m} = 0.096 \text{ Nm}$$

Exemple 2



poulie de masse M et rayon R qui tourne sans frottement

Calculer l'accélération tangentielle de la roue si m_2=M et m_1=M/2

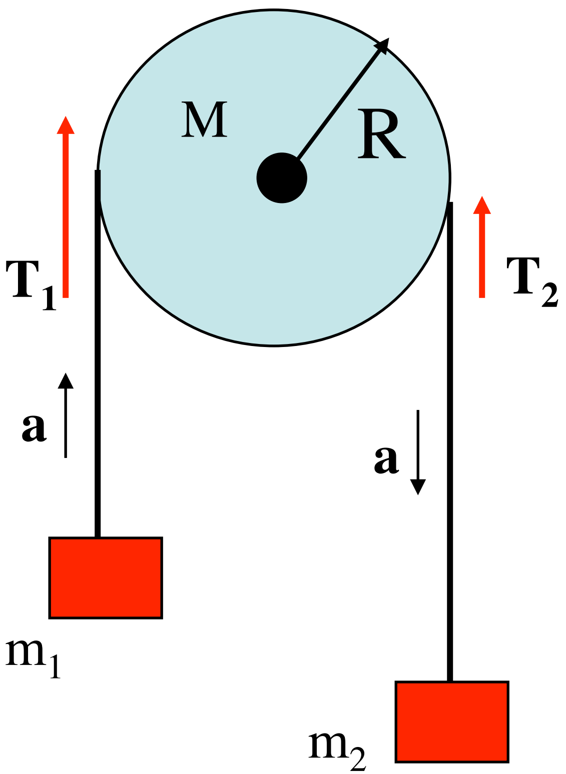
a = module de l'accélération des deux masses = **?**

T_1 et T_2 = tensions:

$$T_1 = m_1(g+a) = \frac{M}{2}(g+a)$$

$$T_2 = m_2(g-a) = M(g-a)$$

Exemple 2 .2



$$T_1 = m_1(g + a) = \frac{M}{2}(g + a)$$

$$T_2 = m_2(g - a) = M(g - a)$$

moment total des forces sur la poulie:

$$\tau = T_2R - T_1R = (T_2 - T_1)R =$$

$$M\left[(g - a) - \frac{1}{2}(g + a)\right]R = MR\frac{1}{2}(g - 3a)$$

on a aussi $\tau = I\alpha = I\frac{a}{R}$ $\quad I = \frac{1}{2}MR^2$

$$\tau = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = \frac{1}{2}MRa \Rightarrow \quad MR\frac{1}{2}(g - 3a) = \frac{1}{2}MRa \qquad a = g/4$$