

# ANALYSE ET CONCEPTION DE NYQUIST

1

## 1. Introduction

L'analyse de Nyquist est un procédé graphique qui permet de déterminer la stabilité absolue ou relative des systèmes de commande en BF ou BO.

Cette analyse fréquentielle est un complément d'étude de la stabilité. En effet le critère de Routh détermine surtout la stabilité absolue uniquement si l'équation caractéristique est un polynôme fini en  $p$ . Or, si le signal est retardé de  $\tau$ , les termes  $e^{-\tau s}$  apparaissent dans l'équation caractéristique, et donc la méthode de Routh ne peut plus être appliquée sauf, si une approximation de  $e^{-\tau s}$  est effectuée en considérant son développement en série de Taylor comme suit :

$$e^{-\tau s} = 1 + \tau s - \frac{\tau^2 s^2}{2!} + \frac{\tau^3 s^3}{3!} - \dots$$

Mais ceci reste insuffisant car on calcule la stabilité par une approximation seulement, alors que la méthode graphique (fréquentielle) n'utilise aucune approximation.

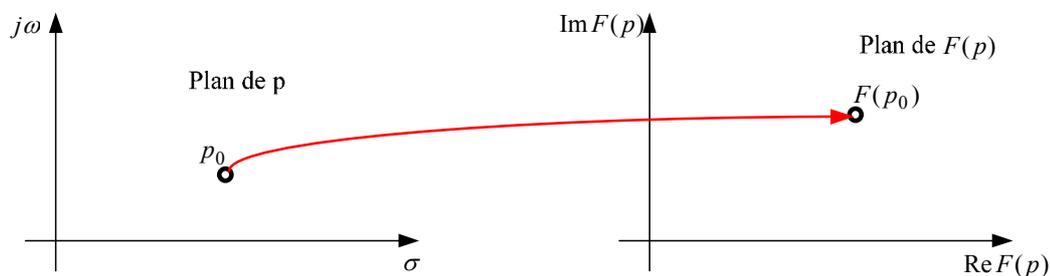
Dans ce qui va suivre on donnera un aperçu mathématique, pour pouvoir manipuler les variables et les fonctions complexes ainsi que leurs tracés. Puis on présentera la méthode fréquentielle de Nyquist qui consiste dans un premier temps à définir le **Contour d'Exclusion de Nyquist** puis, dans un second temps on définira l'image de ce dernier (le **Contour d'Exclusion de Nyquist**) appelé le diagramme de stabilité de Nyquist, et en dernier lieu, on introduira le critère de Nyquist qui est un critère graphique.

## 2. Tracé d'une fonction complexe

Une fonction de transfert complexe  $F(p)$  avec  $p = \sigma + j\omega$ , ne peut être tracée dans un seul système d'axes, on utilise 2 graphes à 2 dimensions pour tracer  $F(p)$  comme suit :

- le premier graphe exprime  $j\omega$  en fonction de  $\sigma$  dans un plan appelé **Plan de  $p$** .
- le deuxième graphe trace la partie imaginaire de  $F(p)$  en fonction de la partie réelle de  $F(p)$  dans un plan appelé plan de  $F(p)$

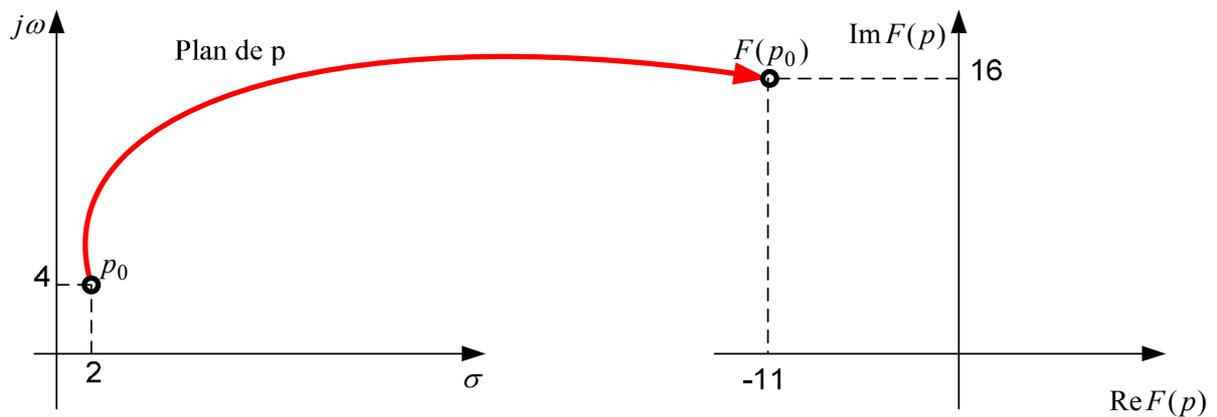
$F$  est la fonction appliquée du plan de  $p$  vers celui de  $F(p)$



### Exemple 1

Soit à tracer la fonction complexe suivante :  $F(p) = p^2 + 1$

Pour  $p_0 = 2 + j4 \Rightarrow F(p_0) = -11 + j16$



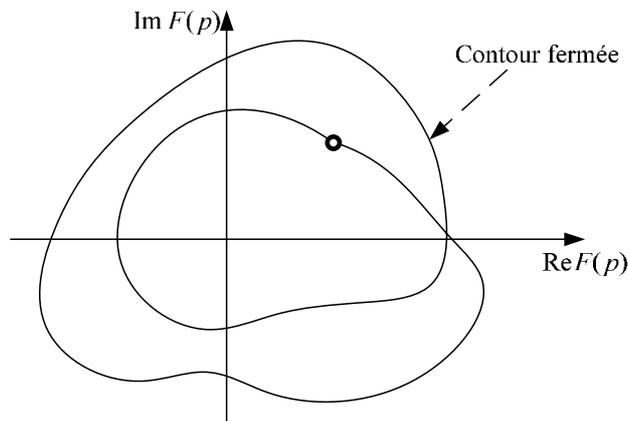
### 3. Définitions

Déf1 : une fonction de variable complexe  $F(p)$  est dite **analytique** dans une région  $\Omega$  du plan complexe  $\mathbb{C}$  si la dérivée de  $F(p)$  en  $p_0$  est définie

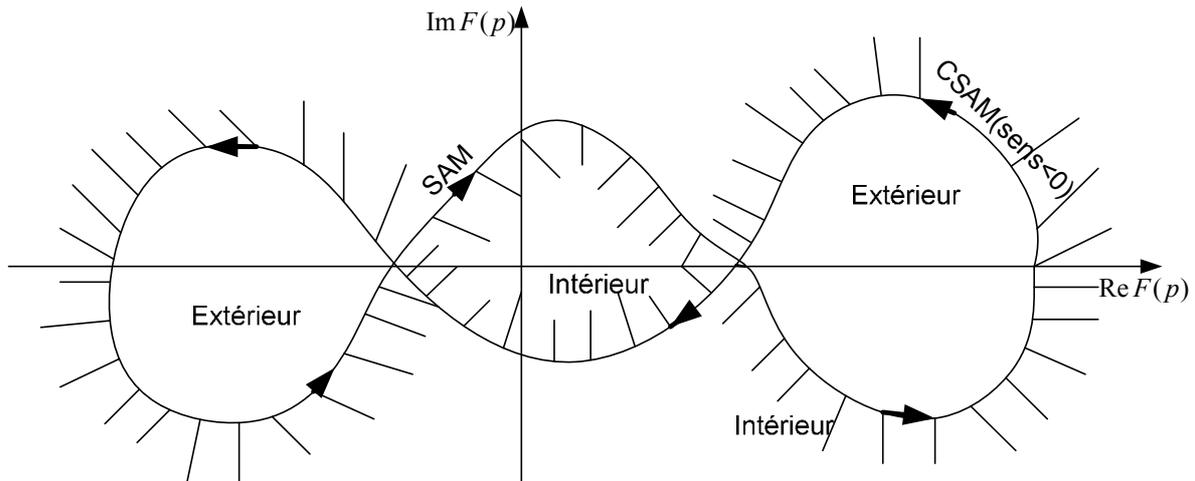
par :  $\left. \frac{dF(p)}{dp} \right|_{p=p_0} \equiv \lim_{p \rightarrow p_0} \left[ \frac{F(p) - F(p_0)}{p - p_0} \right]$  existe en tout point d'une région  $\Omega$  du plan de  $p$

Déf2 : le point où  $F(p)$  n'est pas analytique est un **point singulier** ou **singularité de  $F(p)$**

Déf3 : un contour fermé du plan complexe est une courbe continue commençant et aboutissant au même point.

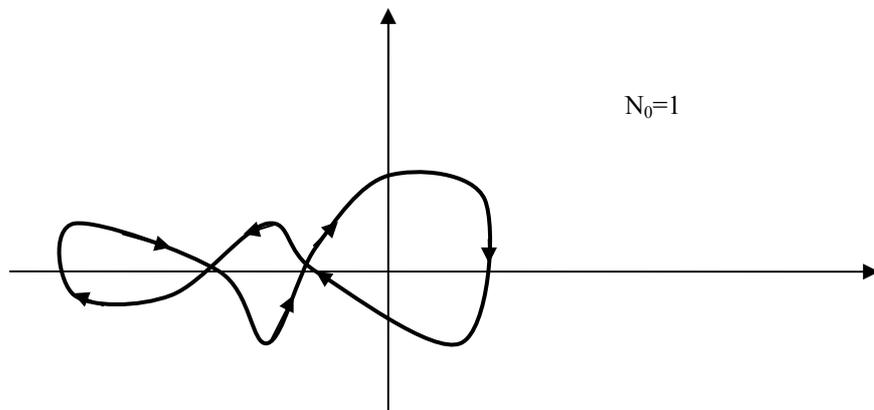


Déf4 : tous les points situés à **droite du contour** lorsqu'on le parcourt dans une direction déterminée sont dits **intérieurs** au contour



**Déf5** : On dit qu'on parcourt le contour dans le sens positif si on décrit le sens des aiguilles d'une montre (SAM).

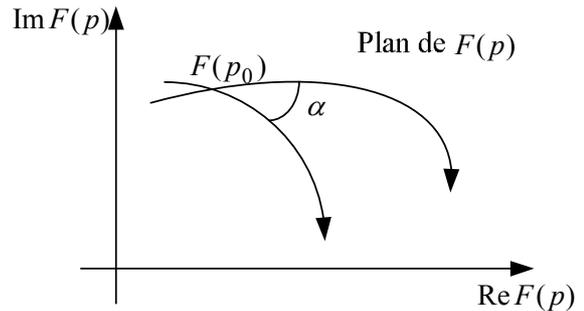
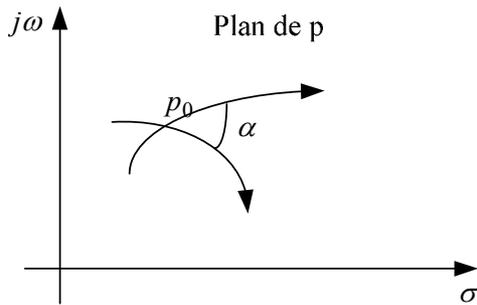
**Déf6** : un contour du plan de  $F(p)$  contourne positivement (SAM)  $n$  fois l'origine, si le rayon vecteur tracé de l'origine au point de la courbe  $F(p)$  tourne dans le sens positif (SAM) de  $360.n$  degrés quand ce dernier (le vecteur) parcourt d'un bout à l'autre la courbe fermée. Si le chemin est décrit dans le sens négatif (SCAM), on dit qu'on contourne l'origine négativement. Le nombre total de tours  $N_0$  est égal à la différence entre les tours (SAM) positifs et les tours (SCAM) négatifs.



#### 4. Propriétés de l'application $F(p) = FTBO$

Dans toutes les applications,  $F(p)$  a les propriétés suivantes :

- a-  $F(p)$  est uniforme (à tout point complexe  $p$  correspond un et un seul point  $F(p)$  : fonction bijective)
- b- Les contours du plan de  $p$  doivent éviter les points singuliers de  $F(p)$  (notion de contour d'exclusion)
- c-  $F(p)$  est analytique sauf aux pôles (singularités de  $F(p)$ )
- d- Tout contour fermé du plan de  $p$  a pour image un contour fermé du plan de  $F(p)$
- e-  $F(p)$  est une représentation conforme : un angle orienté formé par 2 courbes dans  $p$  est conservé par les courbes images dans le plan de  $F(p)$



f- **Important** : le nombre total  $N_0=Z_0-P_0$

$Z_0$  : nombre de zéros enfermés dans le contour du plan de p

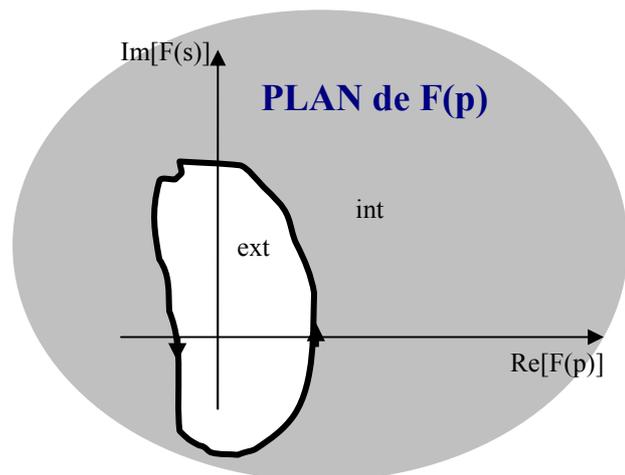
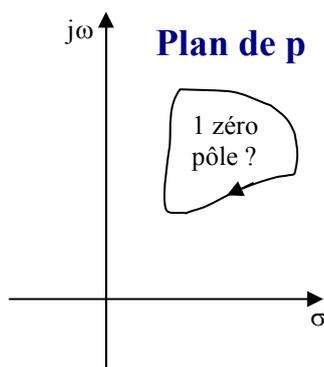
$P_0$  : nombre de pôles enfermés dans le contour du plan de p

$N_0$  : nombre de fois qu'un contour fermé du plan de  $F(p)$  entoure l'origine

g- si le point  $(0,0)$  (**origine**) est à l'intérieur du contour de  $F(p)$  alors  $N_0 > 0$  (**SAM**) sinon

$N_0 \leq 0$  (**CSAM**)

### Exemple 2



Déterminer le nombre de pôles de  $F(p)$  enfermés dans le contour du plan p ?

On sait que  $Z_0=1$  (HYPOTHESE)

L'origine se trouvant à l'extérieur du contour dans le plan de  $F(p)$  et le contour entoure une seule fois l'origine dans le SCAM alors  $N_0 = -1$

À partir de ces deux informations, on peut déduire  $P_0$  sachant que  $N_0=Z_0-P_0$  alors

$$P_0 = Z_0 - N_0 = 1 - (-1) = 2$$

### 5. Courbes en polaire

On peut représenter une fonction de transfert  $F(p)$  dans le domaine des fréquences, en remplaçant  $p$  par  $j\omega$ , d'où  $F(j\omega)$ . Cependant, il existe deux façons de la représenter graphiquement:

a- Représentation polaire :

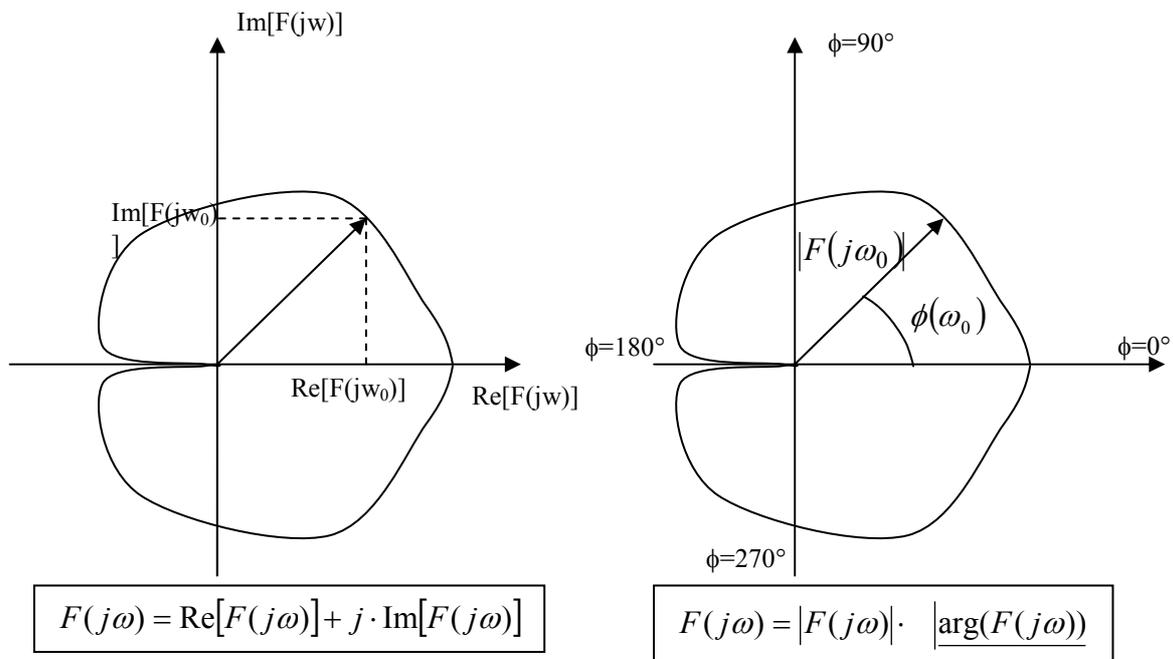
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= |F(j\omega)| \underline{\arg(F(j\omega)) = \phi(\omega)} \\ &= |F(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \\ &= |F(j\omega)| [\cos \phi(\omega) + j \sin \phi(\omega)] \end{aligned}$$

b- Représentation cartésienne :

$$F(j\omega) = \text{Re}[F(j\omega)] + j \text{Im}[F(j\omega)]$$

**Remarque** les courbes d'une fonction de transfert complexe sont identiques pour les deux représentations polaire et cartésienne.

Le graphe d'une fonction complexe  $F(j\omega)$  est obtenu en faisant varier  $\omega$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ . On trace l'allure de  $F(j\omega)$  en évaluant la phase et le module de  $F(j\omega)$  dans le cas des coordonnées polaires ou les parties imaginaire (Im) et réelle (Re) de  $F(j\omega)$  dans le cas des coordonnées cartésiennes



### 5.1 Propriétés des courbes polaires

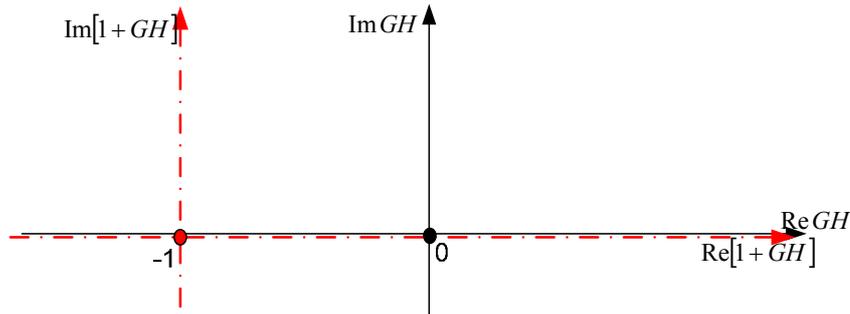
Il est important de mentionner les propriétés des courbes polaires suivantes :

- La courbe en polaire de  $F(j\omega) + a$ , ( $a$  complexe) est obtenue à partir de la courbe en polaire de  $F(j\omega)$  par translation de  $-a$

#### Exemple 3

Pour  $a=1$  et  $F(p)|_{p=j\omega} = GH(p)|_{p=j\omega}$

La courbe en polaire de  $[1 + GH(j\omega)]$  est donnée par la courbe de  $GH(j\omega)$  avec l'origine déplacé au point  $-1 + j0$



- Les courbes en polaire de la fonction de transfert d'un système linéaire à coefficients constants présentent une symétrie par rapport à l'axe horizontal (axe réel) c.à.d pour  $0 < \omega < +\infty$ , la courbe obtenue est symétrique par rapport l'axe horizontal à la courbe de  $-\infty < \omega < 0$
- On peut construire la courbe en polaire à partir des diagrammes de Bode
- Des accroissements constants de la fréquence ne correspondent pas en général à des intervalles égaux le long de la courbe en polaire

#### Exemple 4

Donner la courbe en polaire de la FT en BO suivante :

$$GH(p) = \frac{1}{p+1}, \text{ on pose } p = j\omega$$

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$$

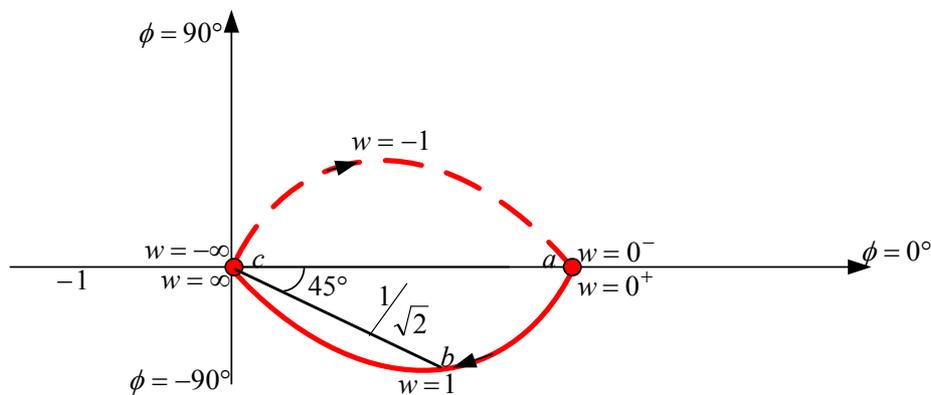
La forme polaire est illustrée par l'expression suivante :  $GH(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} \Big|_{-\arctg(\omega)}$

On fait varier  $\omega$  de  $0 < \omega < +\infty$

Pour  $\omega = 0 \Rightarrow GH(j0) = 1 \Big|_{0^\circ}$

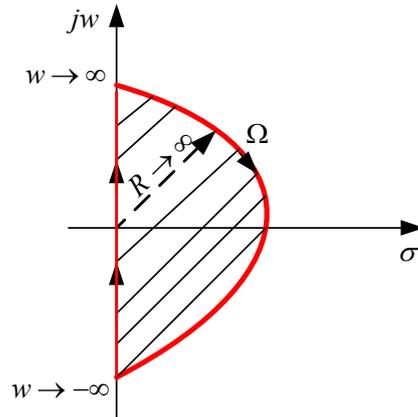
Pour  $\omega = 1 \Rightarrow GH(j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big|_{-45^\circ}$

Pour  $\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow GH(j\infty) = 0 \Big|_{-90^\circ}$



## 5.2 Contour d'exclusion de Nyquist (CEN)

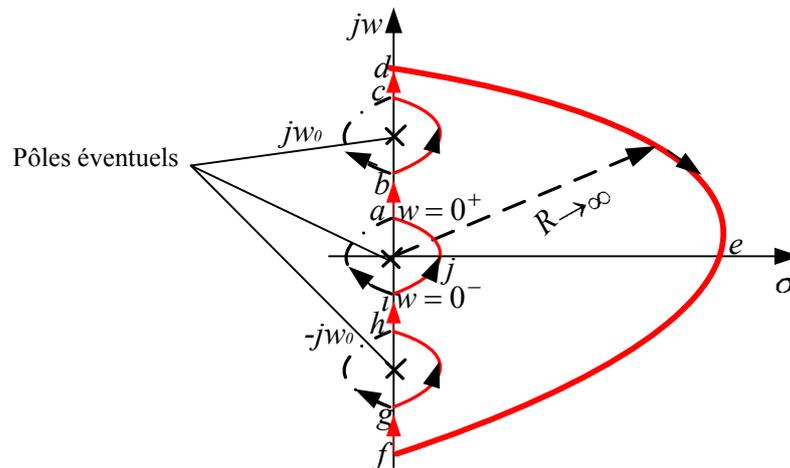
Le CEN est un contour fermé dans le plan de  $p$  qui encercle complètement le DPD caractérisé par la partie réelle positive des pôles.



Le CEN ne passe par aucun pôle de  $F(p)$ , dans le cas de pôles à l'origine ou complexes conjugués purs, on fait passer ce chemin (la partie du contour qui est sur l'axe imaginaire) par des petits demi-cercles le long de l'axe imaginaire du plan de  $p$

On considère que le rayon  $\rho$  des ces demi-cercles tend vers 0.

Pour contenir tout le DPD, on considère que le contour est semi-circulaire dans le DPD de rayon  $R$  (avec  $R$  tendant vers  $\infty$ )



Les différentes sections du CEN sont décrites analytiquement comme suit :

Chemin $\overline{ab}$	$p = j\omega$	$0 < \omega < \omega_0$
Chemin $\overline{bc}$	$p = \lim_{\rho \rightarrow 0} (j\omega_0 + \rho \cdot e^{j\theta})$	$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
Chemin $\overline{cd}$	$p = j\omega$	$\omega_0 < \omega < \infty$
Chemin $\overline{def}$	$p = \lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot e^{j\theta}$	$90^\circ \leq \theta \leq -90^\circ$
Chemin $\overline{fg}$	$p = j\omega$	$-\infty < \omega < -\omega_0$
Chemin $\overline{gh}$	$p = \lim_{\rho \rightarrow 0} (-j\omega_0 + \rho \cdot e^{j\theta})$	$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$
Chemin $\overline{hi}$	$p = j\omega$	$-\omega_0 < \omega < 0$
Chemin $\overline{ija}$	$p = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cdot e^{j\theta}$	$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$