Université Ferhat Abbas – Sétif
Faculté de technologie
Tronc Commun S.T.

2ème Année LMD
07 Avril 2011
Temps alloué : 1h30

Contrôle de rattrapage de Physique 3

Exercice 01 (06 points)

Supposant que le système de la figure **01** effectue des oscillations de faibles amplitudes.

1. Quelle est le nombre de degrés de liberté ?
2. Calculer le Lagrangien du système.
3. Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\omega_o}$ et déduire $\boldsymbol{\omega_a}$.
4. Pour $\boldsymbol{\delta<\omega_o}$, Trouver la solution de l'équation différentielle du mouvement. aux conditions initiales $\boldsymbol{x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0}$

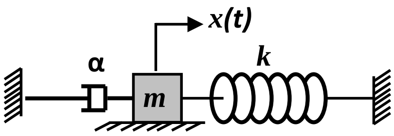


Figure 01

Exercice N°02 (06 points)

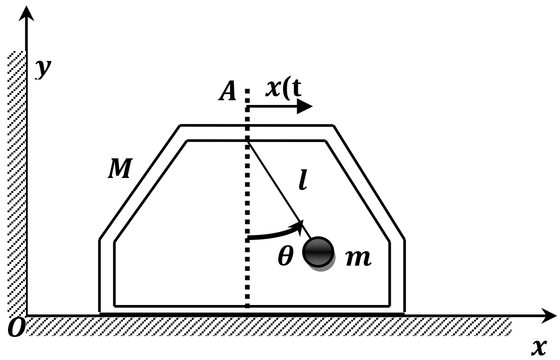
Un système électrique constitué d'une bobine **L**, d'une résistance **R** et d'une capacité **C** placés en série.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
2. Quelle est la nature du mouvement ?
3. Si $\boldsymbol{R = \sqrt{\frac{L}{C}}}$, quel est le type d'amortissement ?
4. Donner la solution de l'équation différentielle et la pulsation du mouvement.
5. Que représente le Décrément Logarithmique. Donner son expression.

Exercice 03 (08 points)

Le système de la figure 03 est constitué d'une masse **M** qui glisse sans frottement sur un plan horizontal et d'un pendule ($\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{l}$) suspendu au point A. Ce pendule oscille sans frottement dans le plan ***xoy.***
On choisit les coordonnées généralisées $\boldsymbol{x}$ (position de la masse **M**) et $\boldsymbol{\theta}$ (angle que fait le pendule avec la verticale).

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Montrer que les équations du mouvement de ce système s'écrivent sous la forme :

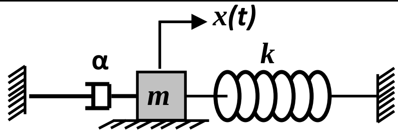


$$\begin{cases} \dfrac{\ddot{x}}{l} + \dfrac{m}{m+M}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) = 0 \\ \ddot{\theta} + \dfrac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Figure 02

3. Montrer que dans le cas des petites oscillations (θ<<**1)**, l'équation différentielle pour θ s'écrit sous la forme : $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$.
4. Donnez la valeur de ω_0 en fonction de $\boldsymbol{g, l}$ *et* $\boldsymbol{M}$ *et* $\boldsymbol{m}$.
5. Etablir les solutions des équations différentielles du système, dans le cas : $\boldsymbol{x(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0}$, $\boldsymbol{\dot{x}(0) = V_0}$ **et** $\boldsymbol{\dot{\theta}(0) = 0}$.

Solution du Contrôle de rattrapage de Physique 3



Exercice 01 :06Points

1. Le nombre de degrés de liberté : **ddl=1** 0.25
2. Le Lagrangien du système :
   Energie cinétique $\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\boldsymbol{m}\dot{\boldsymbol{x}}^2$ 0.5 , Energie potentielle :$\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}^2$ 0.5
   Fonction de dissipation : $\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\dot{\boldsymbol{x}}^2$ 0.5. Le Lagrangien : **L =T-U=**$\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\dot{\boldsymbol{x}}^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}^2$ 0.25
3. L'équation différentielle du mouvement : L'équation de Lagrange dans le cas d'un système libre amorti :

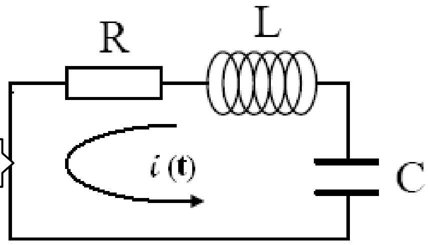
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}, \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{x}} \quad 0.25 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -\boldsymbol{kx} \quad 0.25, \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \boldsymbol{\alpha}\dot{\boldsymbol{x}} \quad 0.25 \end{cases} \Longrightarrow m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x}$$

L'équation différentielle s'écrit : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{m}}\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x} = 0$ 0.5

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; tel que : $\boldsymbol{2\delta} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{m}}$ 0.25 et $\boldsymbol{\omega_0^2} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}$ 0.25 , $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_a} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}} - \frac{\boldsymbol{\alpha^2}}{\boldsymbol{4m^2}}}$ 0.25

4. Ecriture de la solution de l'équation différentielle du mouvement pour $\delta < \omega_0$ **:** *x(t)=C*$\boldsymbol{e^{-\delta t}}$ $\mathbf{sin}(\boldsymbol{\omega_a t + \varphi})$
   On applique les conditions initiales pour calculer C et φ :
   $x(0) = C\,sin\,\varphi = x_0 \Rightarrow \mathbf{C} = \frac{\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{sin\,\varphi}}$ 0.5
   $x(t) = C\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi) \;\Rightarrow \dot{x}(t) = -C\delta\,e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \varphi) + C\,\omega_a e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi)$ 0.5
   $\dot{x}(0) = -C\delta\,sin\varphi + C\omega_a\,cos\varphi = 0 \Rightarrow \mathbf{tg}(\boldsymbol{\varphi}) = \frac{\boldsymbol{\omega_a}}{\boldsymbol{\delta}}$ 0.5
   D'où : $\boldsymbol{x(t)} = \frac{\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{sin\,\varphi}}\,\boldsymbol{e^{-\delta t}}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\omega_a t + \varphi})$ 0.5

Exercice 02 : 06Points



0.5

1- Equation différentielle du mouvement
   Selon la loi de Kirchhoff : $V_R + V_L + V_C = 0$ 0.5

$$R.I(t) + L.\frac{dI(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad \textbf{......(1)}$$

La dérivation de (1) donne : $R.\frac{dI(t)}{dt} + L.\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}\frac{dq(t)}{dt} = 0$ 0.5

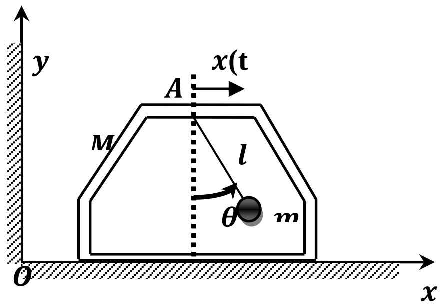
$I(t) = \frac{dq(t)}{dt}$,ce qui donne: $L.\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R.\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = 0$ Ou bien: $\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}I(t) = 0$ 0.5 **(2)**

2- C'est une équation du deuxième ordre représentant un mouvement vibratoire libre amortie d'un système à un seul degré de liberté. 0.5
   Les paramètres caractéristiques du mouvement sont :
   Le facteur d'amortissement : $\delta = \frac{R}{2L}$ 0.5**,** la pulsation propre du système : $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 0.5

3- Si $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Le type d'amortissement, la solution de l'équation différentielle et la pulsation du mouvement.
   Si $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, $\delta = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC}} < \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o$ 0.5
   - On a donc $\delta < \omega_0$: Ce qui correspond à un mouvement **faiblement amorti** 0.5
   - La forme de la solution est de la forme : $I(t) = C.e^{-\delta t}.\sin(w_a t + \varphi)$ 0.5
     Avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \delta_o^2}$ 0.5

4- Le décrément logarithmique représente la vitesse du décroissement de l'amplitude dans le mouvement libre amorti. 0.5

Exercice 03 : 08Points



1. Le Lagrangien du système :

   La masse M : $x(t) \rightarrow \dot{x}(t)$

   Le pendule (m, l) : $\begin{cases} x + l\sin\theta \\ -l\,cos\theta \end{cases} \Rightarrow v_m^2 = \dot{x} + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\,\dot{\theta}^2$

   L'énergie cinétique du système : $T = T_M + Tm$

   $\boldsymbol{T_M = \frac{1}{2}M\,\dot{x}^2}$ 0.25 , $\boldsymbol{Tm = \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\,\dot{\theta}^2\right)^2}$ 0.25

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\,\dot{\theta}^2)^2$$

   L'énergie potentielle du système : $\boldsymbol{U = U_m = mgl(1 - \cos\theta)}$ 0.5

- Le Lagrangien: $\boldsymbol{L = T - U = \frac{1}{2}(M + m)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\,\dot{\theta}^2)^2 - mgl(1 - \cos\theta)}$

2. On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrit le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x}\;ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \;\; 0.25 \;,\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \;\; 0.25 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{x}l\cos\theta - m\dot{x}l\dot{\theta}sin\theta + m\,l^2\,\ddot{\theta} \;\; 0.25 \;, \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -m\dot{x}l\dot{\theta}sin\theta - mgl\sin\theta \;\; 0.25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \ldots\ldots(1) \;\; 0.5 \\ m\ddot{x}l\cos\theta + ml^2\,\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \;\; 0.5 \end{cases}$$

   On divise l'équation (1) sur $(M + m)l$: $\frac{\ddot{x}}{l} + \frac{m}{M+m}\left(\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta\right) = 0$

   On divise l'équation (2) sur ml^2 : $\ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

- Donc : $\begin{cases} \frac{\ddot{x}}{l} + \frac{m}{M+m}\left(\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta\right) = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \end{cases}$

3. Dans le cas des petites oscillations (θ<<1) $\begin{cases} cos\theta \approx 1 \\ sin\theta \approx \theta \\ \dot{\theta}^2 sin\theta \approx \dot{\theta}^2\theta \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ddot{x}}{l} + \frac{m}{M+m}\ddot{\theta} = 0 \ldots\ldots(3) \;\; 0.5 \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l} + \frac{g}{l}\theta = 0 \ldots.(4) \;\; 0.5 \end{cases}$

   (3) – (4) → $\boldsymbol{\ddot{\theta} + \frac{g(M+m)}{Ml}\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ 0.5

4. La valeur de ω_0 en fonction de $g, l\;et\;M\;et\;m$: Par comparaison, on trouve : $\boldsymbol{\omega_0^2 = \frac{g(M+m)}{Ml}}$ 0.5

5. Les solutions des équations différentielles du système :

   Ecriture de $\boldsymbol{\theta(t)}$: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$ 0.25

   Ecriture de *x(t)* : **(3)** $\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-ml}{M+m}\ddot{\theta} = -\frac{ml}{M+m}[-\omega_0^2\theta] = \left(\frac{ml\omega_0^2}{M+m}\right)\theta(t) = \frac{ml\omega_0^2}{M+m}[A\cos(\omega_0 t + \varphi)]$

   $\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{ml\omega_0}{M+m}[A\sin(\omega_0 t + \varphi)] + B \Rightarrow \boldsymbol{x(t) = -\frac{-ml}{M+m}A\cos(\omega_0 t + \varphi) + Bt + C}$**…….(5)** 0.25

   Calcul des coefficients A et $\boldsymbol{\varphi}$:

   $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A\cos\varphi = \theta_0 \\ -A\omega_0\sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varphi = 0} \;\; 0.25 \\ \boldsymbol{A = \theta_0} \;\; 0.25 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$

   Calcul des coefficients B et C :

   $\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = \theta_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = -\frac{-ml}{M+m}\theta_0\cos(\omega_0 t) + Bt + C \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{ml\theta_0}{M+m}\omega_0\sin(\omega_0 t) + B$

   $\boldsymbol{\dot{x}(0) = V_0} \Rightarrow \frac{ml\theta_0}{M+m}\omega_0\sin(0) + B = V_0 \Rightarrow \boldsymbol{B = V_0}$ 0.25

   $\boldsymbol{x(0) = x_0} \Rightarrow -\frac{ml\theta_0}{M+m} + C = x_0 \Rightarrow \boldsymbol{C = x_0 + \frac{ml\theta_0}{M+m}}$ 0.25

   (5)$\Rightarrow$ $x(t) = -\frac{-ml}{M+m}\theta_0\cos(\omega_0 t) + V_0 t + x_0 + \frac{ml\theta_0}{M+m}$

   Donc la solution générale est $\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{ml}{M+m}\theta_0\,(1 - \cos(\omega_0 t)} \\ \boldsymbol{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)} \end{cases}$