Programmation Linéaire - Cours 1

P. Pesneau
pierre.pesneau@math.u-bordeaux1.fr

Université Bordeaux 1
Bât A33 - Bur 265

Ouvrages de référence

- V. Chvátal - Linear Programming, W.H.Freeman, New York, 1983. Japanese translation published by Keigaku Shuppan, Tokyo, 1986.
- R. J. Vanderbei - Linear Programming, Foundations and Extensions, Springer-Verlag, 2008.
- C. Guéret, C. Prins et M. Sevaux - Programmation linéaire : 65 problèmes d'optimisation modélisés et résolus avec Visual Xpress, Eyrolles, 2000.
- C. Prins et M. Sevaux - Programmation linéaire avec Excel : 55 problèmes d'optimisation modélisés pas à pas et résolus avec Excel, Eyrolles, 2011.

Sommaire

Problème de production

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

Les matières premières sont en quantité limitée : 800 kilos de Fraises, 700 kilos de Lait et 300 kilos de sucre. La vente des yaourts A rapportent 4€ par kilo et les yaourts B 5€.

Modélisation :

- Variables :
  x_i : quantité (en kg) de yaourts du type $i = A, B$ produit
- Objectif :
  Maximiser $4x_A + 5x_B$
- Contraintes :

$$\begin{array}{rrl} 2x_A + & x_B & \leq 800 \\ x_A + & 2x_B & \leq 700 \\ & x_B & \leq 300 \\ x_A, & x_B & \geq 0 \end{array}$$

Problème de transport

Approvisionner au moindre coût les clients à partir des usines.

Usines ($i \in I$)	Bordeaux	Biarritz	Toulouse
Productions (p_i)	25	15	20

Clients ($j \in J$)	Pau	Bayonne	Bordeaux	Libourne
Demandes (d_j)	20	12	9	14

Prix/unité ($c_{i,j}$)	Pau	Bayonne	Bordeaux	Libourne
Bordeaux	26	19	0	4
Biarritz	12	2	20	24
Toulouse	19	30	24	28

Modélisation :

- Variables :

  $x_{i,j}$: quantité transportée de i à j
- Objectif :

  Minimiser $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{i,j} x_{i,j}$
- Contraintes :

$$\begin{array}{ll} \sum_{j \in J} x_{i,j} \leq p_i, & \forall i \in I \\ \sum_{i \in I} x_{i,j} = d_j, & \forall j \in J \\ x_{i,j} \geq 0, & \forall i \in I, j \in J \end{array}$$

Problème de planification

Planifier la production d'articles à moindre coût pour les 4 prochains mois.

Production maximale normale : 1200 articles / mois
Production maximale en heure sup : 400 articles / mois
Sur-coût heures sup : 7 euros / article
Stockage : 3 euros / article / mois

	mois 1	mois 2	mois 3	mois 4
Demandes	900	1100	1700	1300

Modélisation :

- Variables :

  x_t : production normale en période $t = 1, \ldots, 4$

  y_t : production en heure sup en periode $t = 1, \ldots, 4$

  s_t : stock en fin de période $t = 1, \ldots, 3$

- Objectif :

  Minimiser $7 \sum_{t=1}^{t=4} y_t + 3 \sum_{t=1}^{t=3} s_t$

- Contraintes :

$$
\begin{array}{rrrrll}
 & x_1 + & y_1 = & 900 + & s_1 & \\
s_1 + & x_2 + & y_2 = & 1100 + & s_2 & \\
s_2 + & x_3 + & y_3 = & 1700 + & s_3 & \\
s_3 + & x_4 + & y_4 = & 1300 & & \\
0 \leq & x_t \leq & 1200, & & & t = 1, \ldots, 4 \\
0 \leq & y_t \leq & 400, & & & t = 1, \ldots, 4 \\
 & s_t \geq & 0, & & & t = 1, \ldots, 3
\end{array}
$$

Sommaire

Hypothèses fondamentales pour la programmation linéaire

- **Linéarité :** Objectif et contraintes sont des fonctions linéaires par rapport aux variables de décisions (coéfficients de variables constants, pas de produit de variables)

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{Objectif :} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\textbf{Contraintes :} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
 & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \leq b_2 \\
 & a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \cdots + a_{3,n}x_n \geq b_3
\end{array}
$$

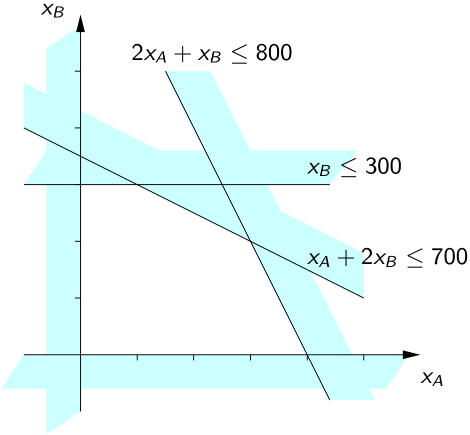
- **Continuité :** Les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle (par opposition aux variables entières)

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \boldsymbol{R}^n$$

Représentation graphique

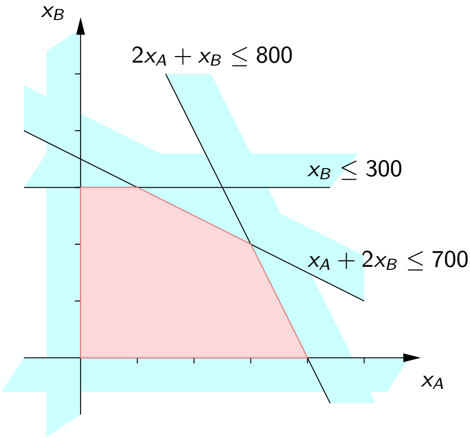
Revenons au premier exemple :

$$\begin{array}{lrrl} \text{Max} & 4x_A + & 5x_B & \\ & 2x_A + & x_B & \leq 800 \\ & x_A + & 2x_B & \leq 700 \\ & & x_B & \leq 300 \\ & x_A, & x_B & \geq 0 \end{array}$$



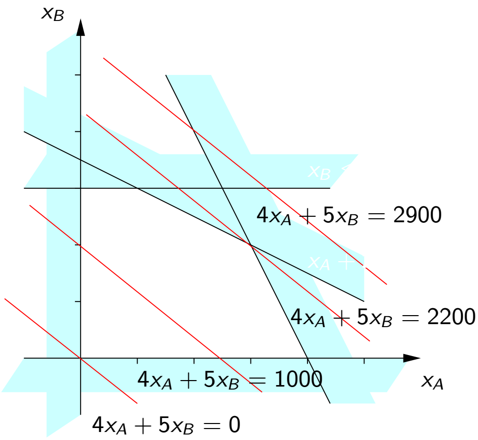
Terminologie

- **Solution :**
  Affectation de valeurs numériques aux variables du problème.
- **Solution réalisable :**
  Une solution est réalisable si les valeurs numériques associées aux variables satisfont à l'ensemble des contraintes du programme linéaire
- **Région réalisable :**
  Ensemble des solutions réalisables.



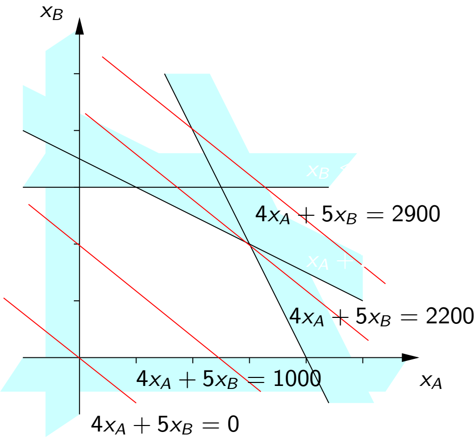
Résolution graphique

$$
\begin{array}{llrrl}
\text{Max} & 4x_A+ & 5x_B & & \\
 & 2x_A+ & x_B & \leq & 800 \\
 & x_A+ & 2x_B & \leq & 700 \\
 & & x_B & \leq & 300 \\
 & x_A, & x_B & \geq & 0
\end{array}
$$



Quelques observations

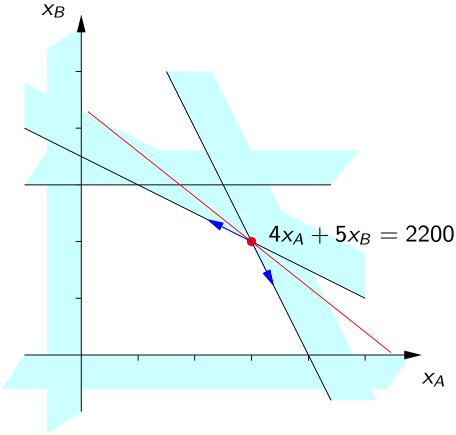
- La solution optimale (s'il en existe une) se trouve sur la frontière de la région réalisable
- Quand il en existe, il existe toujours une solution optimale sur un sommet (point extrême) de la région réalisable
- $\Rightarrow$ Il suffit d'examiner les points extrêmes de la région réalisable (la PL est un problème d'optimisation combinatoire)



Sommaire

Algorithme géométrique

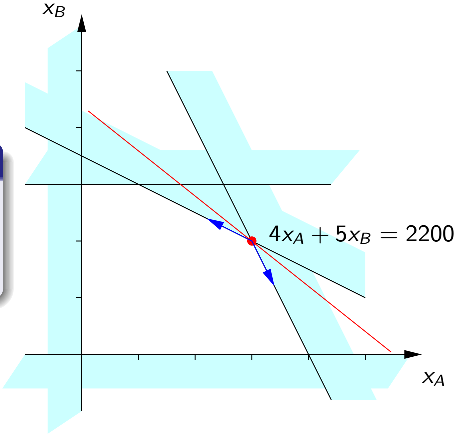
1. Partir d'un point extrême x de la région réalisable
2. Déterminer une arête le long de laquelle l'objectif augmente.
   S'il n'en existe pas, x est optimal, STOP
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au point extrême y suivant.
   S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP
   Sinon, poser $x \leftarrow y$ et revenir en 2



Algorithme géométrique

Theorem

L'optimum local ainsi obtenu (meilleur que ses voisins) est un optimum global



Variables d'écart / Forme standard

$$
\begin{array}{lrrrrrrr}
\text{Max} & 4x_A + & 5x_B + & 0\,s_1 + & 0\,s_2 + & 0\,s_3 & & \\
 & 2x_A + & x_B + & s_1 & & & = & 800 \\
 & x_A + & 2x_B + & & s_2 & & = & 700 \\
 & & x_B + & & & s_3 & = & 300 \\
 & x_A, & x_B, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Chaque variable peut être associée à une contrainte

$$
\begin{array}{c} n \text{ variables} \\ m \text{ contraintes} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} n+m \text{ variables} \\ m \text{ contraintes} \end{array}
$$

Forme normale / Forme Standard

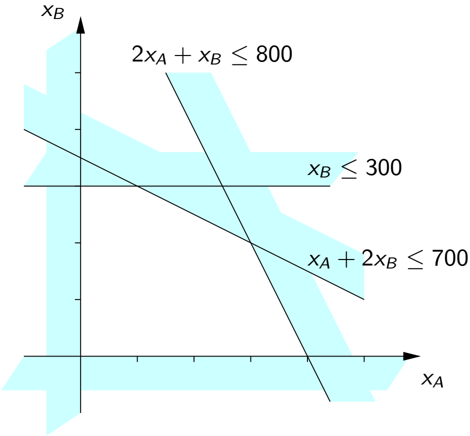
Normale		**Standard**
$\begin{array}{rl} \text{Max} & cx \\ \text{s.c. } Ax & \leq b \\ x & \geq 0 \end{array}$	Ajout variables d'écart $\Longrightarrow$	$\begin{array}{rl} \text{Max} & cx \\ \text{s.c. } Ax & = b \\ x & \geq 0 \end{array}$

Transformation en forme normale :

- Min $cx \Leftrightarrow$ Max $c'x$ où $c' = -c$
- $ax \geq b \Leftrightarrow a'x \leq b'$ où $a' = -a$ et $b' = -b$
- $ax = b \Leftrightarrow ax \leq b$ et $ax \geq b$
- Variable $x_i \leq 0$: on définit une nouvelle variable $x_i' \geq 0$ et on pose $x_i = -x_i'$
- Variable x_i non restreinte : on définit deux nouvelles variables $x_i^+, x_i^- \geq 0$ et on pose $x_i = x_i^+ - x_i^-$

Interprétation géométrique

- Chaque inégalité linéaire définit un **demi-espace** dans $\boldsymbol{R}^n$
- L'intersection de ces demi-espaces définit un **polyèdre** dans $\boldsymbol{R}^n$ qui corespond à la région réalisable
- Chaque **face** du polyèdre est un sous ensemble de points qui satisfont une des inégalités à l'égalité



Définition géométrique d'un sommet

- Les points extrêmes du polyèdre sont les points qui se trouvent à l'intersection d'au moins n hyperplans
- Ils sont donc caractérisés par n variables de valeur 0 (celles associées aux hyperplans qui forment l'intersection)
- Si l'intersection est définie par plus de n hyperplans, alors la solution est dite **dégénérée**

Idée "naïve" pour obtenir une solution à partir de la forme standard :

1. Choisir n hyperplans
2. Mettre les variables associées à 0
3. Résoudre le système linéaire à m variables et m equations

Attention, le système n'a pas nécessairement de solution. Si oui, la solution n'est pas forcement réalisable

pivotage

- le **pivotage** consiste à passer d'un point extrême à un point extrême voisin en longeant une arête
- Deux solutions voisines ne difèrent que par un hyperplan
- L'opération consiste à choisir deux hyperplans (et donc deux variables) qui vont pivoter pour la description du point voisin.

Sommaire

Problème de localisation de dépôts

Parmi un ensemble de sites potentiels, choisir où construire des dépôts et affecter les magasins aux dépôts pour leur réapprovisionnement.
Minimiser le coût de construction et la distance parcourrue.

Données :
$I = \{1, \ldots, n\}$: ensemble des sites potentiels
$J = \{1, \ldots, m\}$: ensemble des magasins
f_i : coût de construction du dépôt $i \in I$
$d_{i,j}$: distance entre le dépôt $i \in I$ et le magasin $j \in J$

Modélisation :

- Variables :

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si on construit en } i \in I \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$y_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si le dépôt } i \in I \text{ dessert le magasin } j \in J \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Objectif :

Minimiser $\sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{i,j} y_{i,j}$

- Contraintes :

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in I} y_{i,j} = 1, & \forall j \in J \\ y_{i,j} \leq x_i, & \forall i \in I, j \in J \\ x_i \in \{0,1\}, & \forall i \in I \\ y_{i,j} \in \{0,1\}, & \forall i \in I, j \in J \end{array}$$

Composition de portefeuille financier

Problème :
Déterminer un ensemble d'avoirs financiers qui vont composer le portefeuille, minimisant les risques et assurant une certaine rentabilité.

Données :

- $I = \{1, \ldots, n\}$ ensemble d'avoirs financiers possibles
- $C_{i,j}$, $i, j \in I$ covariance entre les avoirs
- p_i profit généré par l'avoir $i \in I$
- R rentabilité minimum du portefeuille

Modélisation continue :

- Variables :

  x_i = Proportion de l'avoir $i \in I$ dans le portefeuille
- Objectif :

  Minimiser $\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} C_{i,j} x_i x_j$
- Contraintes :

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in I} p_i x_i \geq R & \\ \sum_{i \in I} x_i = 1 & \\ x_i \geq 0, & \forall i \in I \end{array}$$

Modélisation entière :

- Variables :

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si on prend l'avoir } i \in I \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Objectif :

Minimiser $\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} C_{i,j} x_i x_j$

- Contraintes :

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in I} p_i x_i \geq R & \\ x_i \in \{0,1\}, & \forall i \in I \end{array}$$

Modélisation entière : linéarisation de l'objectif

- Variables :

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si on prend l'avoir } i \in I \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$y_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si les avoirs } i,j \in I \text{ sont pris ensemble} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- Objectif :

Minimiser $\sum_{i\in I} \sum_{j\in I} C_{i,j} x_i x_j$ Minimiser $\sum_{i\in I} \sum_{j\in I} C_{i,j} y_{i,j}$

- Contraintes :

$$\begin{array}{ll} y_{i,j} \leq x_i & \forall i,j \in I \\ y_{i,j} \leq x_j & \forall i,j \in I \\ y_{i,j} \geq x_i + x_j - 1 & \forall i,j \in I \\ y_{i,j} \in \{0,1\}, & \forall i,j \in I \\ \sum_{i\in I} p_i x_i \geq R & \\ x_i \in \{0,1\}, & \forall i \in I \end{array}$$