

## **Cours 02 : Problème général de la programmation linéaire**

## 1. Introduction

Un programme linéaire s'écrit sous la forme suivante.

$$\text{MinZ(ou maxW)} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

sous les contraintes ou conditions : p équations

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = d_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = d_2$$

.....

$$a_{p1} x_1 + a_{p2} x_2 + \dots + a_{pn} x_n = d_p$$

et (m-p) inéquations

$$a_{p+11} x_1 + a_{p+12} x_2 + \dots + a_{p+1n} x_n \leq d_{p+1}$$

.....

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq d_m$$

$$x_j \geq 0 \text{ (variables réalisables), } j = 1, 2, \dots, q$$

$$x_j \leq 0 \text{ (variables quelconques), } j > q.$$

On peut écrire ce système sous une autre forme condensée.

$$\text{MinZ(ou MaxW)} = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$(I) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = d_i \quad (i = 1, \dots, p) \\ \sum_{i=1}^n a_{ir} x_r \leq d_r \quad (r = p+1, \dots, m) \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, q \\ x_j \leq 0, j = q+1, \dots, n \end{cases}$$

$a_{ij}, d_i, c_j$  étant des données numériques réelles.

On adoptera les notations suivantes.

$M = \{1, \dots, m\}$  ensemble des indices de contraintes

et  $N = \{1, \dots, n\}$  ensemble des indices de variables.

$M_1 \subset M$  un sous ensemble de  $M$ ,  $N_1 \subset N$  un sous ensemble de  $N$ ,

$A = (a_{ij})_{m \times n}$  une matrice  $m \times n$ ,  $i \in M, j \in N$ .

$a_j$  la  $j$  ième colonne de  $A$ , un vecteur colonne.

$\alpha_i$  la  $i$ ème ligne de  $A$ , un vecteur ligne.

$X$  un vecteur colonne à  $n$  composantes,  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$C$  un vecteur colonne à  $n$  composantes,  $c_1, c_2, \dots, c_n$

$D$  un vecteur colonne à  $m$  composantes,  $d_1, d_2, \dots, d_m$

A est appelée matrice technologique

D vecteur de demande, C vecteur de prix et X vecteur des inconnues.

Le problème (I) s'écrit aussi : Min Z (ou Max W) = C • X ( le produit scalaire)

$$(I) \quad \begin{cases} \alpha_i x = d_i & i \in M_1 \\ \alpha_i x \leq d_i & i \in M - M_1 \\ x_j \geq 0, j \in N_1 \\ x_j & \forall, j \in N - N_1 \end{cases}$$

## 2. Formulations des programmes linéaires

Nous considérons et il existe trois formulations du programme linéaire avec la condition de non-négativité (ou de positivité ou de réalisabilité) de l'ensemble des variables  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ .

La première forme est la "*forme standard*":

$$\text{Min} Z = C \cdot X$$

$$A \cdot X = d$$

$$X \geq 0.$$

La seconde est la "*forme canonique*" : MinZ = C. X

$$A \cdot X \geq d$$

$$X \geq 0.$$

La troisième forme est "*mixte*" : MinZ = C. X

$$\alpha_i \cdot X \geq d_i \quad i \in M_1$$

$$\alpha_i \cdot X = d_i \quad i \in M - M_1$$

$$X \geq 0.$$

On peut ramener les formes générales et mixtes à la forme standard ou à la forme canonique et on peut passer de la forme standard à la forme canonique et vice-versa par des opérations élémentaires.

1<sup>ère</sup> opération : min f(x) = - max (-f(x)).

2<sup>nd</sup> opération: on peut remplacer chaque variable par une différence de variables positives.  $x_j = x_j' - x_j''$  où  $x_j' \geq 0$  et  $x_j'' \geq 0$ .

3<sup>ième</sup> opération: chaque équation  $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = d_i$  peut être remplacée par les inéquations :  $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq d_i$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \geq d_i$$

ou par les inéquations équivalentes:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \geq d_i$$

$$- a_{i1} x_1 - a_{i2} x_2 - \dots - a_{in} x_n \geq - d_i$$

4<sup>ème</sup> opération: Toute inéquation  $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq d_i$

(ou  $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \geq d_i$ ) peut être remplacée par les équations :

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n + x_{n+i} = d_i, \text{ avec } x_{n+i} \geq 0$$

$$(\text{ou } a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n - x_{n+i} = d_i, \text{ avec } x_{n+i} \geq 0)$$

$x_{n+i}$  est appelée une variable d'écart qu'on peut introduire dans le problème et qui est affecté d'un coefficient nul dans la fonction à optimiser.

Les  $x_i$  sont appelées des " variables structurelles ".

**Résumé 1:** De la forme générale, on peut passer à la forme mixte en procédant par les opération 1 et 2.

De la forme mixte et standard à la forme canonique, on procède par l'opération 3.

De la forme mixte et canonique à la forme standard, on procède par l'opération 4.

### 3. Quelques notions de la programmation linéaire

#### Définitions 1:

1. La fonction à optimiser  $Z$  est appelée " fonction objectif " (sous entend fonction dont l'objectif) ou " fonction économique ".
2. On appelle solution réalisable (ou possible), tout vecteur  $X$  satisfaisant à toute les contraintes du problème y compris celle de la non-négativité.
3. On appelle solution optimale une solution réalisable finie (toutes les composantes sont finies) rendant optimale la fonction objectif.
4. Deux problèmes linéaires PL1 et PL2 sont équivalents si pour chaque solution  $X$  de PL1 on trouvera par une certaine règle une solution correspondante  $Y$  de PL2 et réciproquement.

#### Théorème fondamental de la programmation linéaire

$$\text{Soit le problème sous forme standard (P)} \quad \begin{cases} \min z = cx \\ Ax = d \quad \text{où } A : m \times n \text{ avec } m < n. \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le rang de la matrice  $A$ ,  $r(A) = m < n$ . Le problème a une infinité de solutions.

Il existe au moins un ensemble de "  $m$  " vecteurs  $(a_j)_{j=1, \dots, m}$  linéairement indépendants.

**Définitions 2 :**

1. On appelle base du système ou base du problème (P), tout ensemble de " m " vecteurs  $(a_i)_{i=1,\dots,m}$  linéairement indépendants. Les vecteurs d'une base constituent une sous matrice de A régulière d'ordre " m " et inversement.
2. Les " m " variables associées aux vecteurs de base sont appelées variables de base. Elles constituent un vecteur  $X_B$  à m composantes. Les autres variables sont dites hors bases et constituent un vecteur  $X_{HB}$  complémentaire de  $X_B$  dans X.

On adoptera les notations suivantes.

I ensemble des indices des vecteurs (ou variables) de base.

J ensemble des indices des vecteurs (ou variables) hors base.  $J = N - I$ .

$A_B = (a_i)_{i \in I}$  (matrice formée par " m " vecteurs de base)

$A_{HB} = (a_j)_{j \in J}$  (matrice formée par " n- m " vecteurs hors base)

$C_B = (c_i)_{i \in I}$  (coefficients associés aux " m " vecteurs de base)

$C_{HB} = (c_j)_{j \in J}$  (coefficients associés aux " n- m " vecteurs hors base)

Le problème linéaire peut s'écrire :

$$(P') \quad \begin{cases} \min z = c_B x_B + c_{HB} x_{HB} \\ A_B x_B + A_{HB} x_{HB} = d \\ x_B \geq 0, \quad x_{HB} \geq 0 \end{cases}$$

En annulant les variables hors bases dans (P'), on obtient un système " Cramérien "

$A_B X_B = d$  possédant la solution unique  $\bar{x}_B = A_B^{-1} \cdot d$ .

3. La solution  $X = (x_B = A_B^{-1} \cdot d, x_{HB} = 0)$  est appelée solution de base du problème.
4. Une solution de base est réalisable si  $x_B = A_B^{-1} \cdot d \geq 0$ .
5. Une solution de base est dite " dégénérée " si certaines composantes de  $x_B$  sont nulles. Le vecteur  $x_B$  ou X a moins de " m " composantes positives.
6. Une solution optimale de base du problème est une solution de base réalisable qui rend minimale la fonction objectif.

**Exemple 1:** Déterminons des solutions de base du système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 10 \end{cases}$$

Si on prend  $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , le déterminant formé par ces deux vecteurs

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 2$  qui est différent de 0.  $a_1$  et  $a_2$  forment alors une base.

$$A_B = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, A_{HB} = (a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$X_B = (x_1, x_2), X_{HB} = (x_3, x_4).$$

Le système peut s'écrire aussi  $A_B X_B + A_{HB} X_{HB} = d$ .

Posons  $X_{HB} = (0, 0)$ , le système deviendra :  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

$\bar{x} = (1, 2, 0, 0)$  est une solution de base réalisable non dégénérée car le rang de la matrice A est égale à deux.

Si on choisit  $A_B = (a_1, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $A_B X_B = d \Rightarrow x_B = (x_1, x_3) = (0, 2)$ .

La nouvelle solution  $\bar{x} = (0, 0, 2, 0)$  relative à la nouvelle base est de base réalisable dégénérée.

Si on choisit  $A_B = (a_1, a_4) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ ,  $A_B X_B = d \Rightarrow x_B = (x_1, x_4) = (1, -1)$ .

La solution  $\bar{x} = (1, 0, 0, -1)$  est de base non réalisable et non dégénérée.

#### 4. Détermination d'une solution de base par la méthode de pivotage de Gauss.

Soit un système d'équations de la forme  $A \cdot x = d$ , équivalent au système suivant.

[illegible]

Supposons que  $a_{kr} \neq 0$ . Divisons la  $k$ ème équation par  $a_{kr}$  qui devient :

$$\frac{a_{kl}}{a_{kr}} x_l + \dots + x_r + \dots + \frac{a_{kn}}{a_{kr}} x_n = \frac{d_k}{a_{kr}} \quad (1)$$

Pour éliminer  $x_r$  de la  $i$ ème équation, il suffit de multiplier l'équation (1) par  $(-a_{ir})$  et ajouter à la  $i$ ème équation. On obtiendra :

$$(a_{i1} - \frac{a_{k1}}{a_{kr}} a_{ir})x_1 + \dots + (a_{in} - \frac{a_{kn}}{a_{kr}} a_{ir})x_n = d_i - \frac{d_k}{a_{kr}} a_{ir}$$

$$(S) \begin{cases} a'_{11} x_1 + \dots + a_{1r-1} x_{r-1} + a_{1r+1} x_{r+1} + \dots + a'_{1n} x_n = d'_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + \dots + a_{2n} x_n = d_2 \\ \dots \\ a'_{k1} x_1 + \dots + \dots + x_r + \dots + a'_{kn} x_n = d'_k \\ \dots \\ a'_{m1} x_1 + \dots + a_{1r-1} x_{r-1} + a_{1r+1} x_{r+1} + \dots + a_{mn} x_n = d'_m \end{cases}$$

$$\text{avec } a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj}}{a_{kr}} a_{ir}, i = 1, \dots, m, i \neq k.$$

$$a'_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kr}} a_{ir}, j = 1, \dots, n.$$

$$d'_i = d_i - \frac{d_k}{a_{kr}} a_{ir}, i = 1, \dots, m, i \neq k.$$

$$d'_k = \frac{d_k}{a_{kr}} a_{ir}.$$

Ces relations sont les formules d'élimination de Gauss.  $a_{kr}$  est appelé "pivot".

La ligne "k" est appelée ligne pivot.

Si le rang de la matrice A,  $r(A)$  est égale au rang de la matrice augmentée  $r(A, d)$ , nous pouvons résoudre le système par rapport aux "m" variables ( $x_1, \dots, x_m$ ).

Le système devient.

$$\begin{cases} x_1 + \dots + c_{1m+1} x_{m+1} + \dots + c_{1n} x_n = b_1 \\ x_2 + \dots + c_{2m+1} x_{m+1} + \dots + c_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ x_m + c_{mm+1} x_{m+1} + \dots + c_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

$\bar{x} = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, 0, \dots, 0)$  est une solution de base.

**Remarque 2 :** soit un PL (P)  $\begin{cases} \min z = cx \\ Ax = d \quad \text{où } A : m \times n \text{ avec } m < n. \\ x \geq 0 \end{cases}$

Supposons que  $rg(A) = rg(A, d) = r < n$ .

1.  $rg(A) = r$  veut dire qu'il existe une base  $a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \dots, a_{\alpha r}$  de l'ensemble des vecteurs colonnes de A et chaque vecteur  $a_j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) peut être exprimé en leur fonction. Soit,

$$a_j = \sum_{i=1}^r \lambda_i a_{\alpha i}.$$

Si en substituant " $a_j$ " à " $a_{\alpha j}$ " avec  $\lambda_i \neq 0$ , nous montrons facilement que

$(a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \dots, a_{\alpha i-1}, a_j, a_{\alpha i+1}, \dots, a_{\alpha r})$  est une nouvelle base (A faire par les étudiants!).

2. si  $r(A) = r$  alors " $m - r$ " équations de (2) sont redondantes. En supprimant ces équations, on obtient le système équivalent  $A_1 \cdot X = d_1$ .

3. chaque ensemble de " $r$ " vecteurs linéairement indépendants forment une base.

Donc, le nombre maximal de solutions de base est le nombre maximale de sous-

matrices carrés d'ordre " $r$ " que l'on peut extraire de  $A$ , égal à  $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ .

### 5. Enoncé du Théorème fondamental de la programmation linéaire.

Etant donné un problème de la programmation linéaire sous forme standard.

a. s'il possède une *solution réalisable* finie, il possède une solution de *base réalisable*.

b. s'il admet une *solution optimale finie*, il admet au moins une *solution optimale de base réalisable*.

**Preuve:**

a. supposons  $\bar{x}$  une solution réalisable avec " $k$ " composantes finies. Sans perte de généralité, on peut supposer que les " $k$ " composantes positives soient les premières (quitte à faire un changement dans la numérotation des composantes et obtenir les  $k$  premières composantes positives).  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$

$$\text{Le problème est (P) } \begin{cases} \min z = cx \\ Ax = d \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Soit  $A_1 = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  la matrice formée par les " $k$ " premières colonnes de  $A$ .

Par hypothèse :  $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = d$ . Deux cas sont possibles.

Cas 1. Soit  $\text{rg}(A_1) = k$  alors forcément  $k \leq m$ .

$\text{Rg}(A) = m$  se traduit par l'existence d'une base de  $A$  formée des vecteurs  $a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, \dots, a_{\alpha m}$ . Chaque  $a_j$  ( $j=1, \dots, k$ ) s'expriment en fonctions des  $(a_{\alpha i})$   $i=1, \dots, m$  dans laquelle un coefficient au moins est non nul.

D'où  $a_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{\alpha i}$  ( $\lambda_1 \neq 0$  par exemple).  $(a_1, a_{\alpha 2}, \dots, a_{\alpha m})$  constituent une nouvelle

base de  $\mathbb{R}^m$ .  $a_2 = \mu_1 a_1 + \sum_{i=2}^m \lambda'_i a_{\alpha i}$  (avec au moins un  $\lambda'_i \neq 0$  ( $i=2, \dots, m$ )).



$a_1$  et  $a_2$  sont linéairement indépendants si  $\lambda'_2 \neq 0$ .

$(a_1, a_2, a_{\alpha 3}, \dots, a_{\alpha m})$  constituent une seconde nouvelle base de  $\mathbb{R}^m$ .

Et ainsi de suite le même processus peut être répété jusqu'à ce que les vecteurs

$a_1, a_2, \dots, a_k$  sont devenus les vecteurs de base.

Dans ce cas,  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$  est une solution de base réalisable par définition. Cette solution est dégénérée si  $k < m$  et non dégénérée si  $k = m$ .

Cas 2.  $\text{Rg}(A_1) = k > m$ . Les vecteurs  $a_1, a_2, \dots, a_k$  sont linéairement dépendants.

Dans  $\mathbb{R}^m$ , plus de " m " vecteurs sont Linéairement Dépendants.

D'où  $\exists j, j = 1, \dots, k / \lambda_j \neq 0$  et  $\sum_{j=1}^k \lambda_j a_j = 0$ .

Par hypothèse,  $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_k a_k = d$  (1)

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = 0$ . Multiplions par  $\alpha > 0$  cette équation et retranchant là de l'équation (1). On obtient :

$$(x_1 - \lambda_1 \alpha) a_1 + (x_2 - \lambda_2 \alpha) a_2 + \dots + (x_k - \lambda_k \alpha) a_k = d.$$

Le vecteur  $(x_1 - \lambda_1 \alpha, x_2 - \lambda_2 \alpha, \dots, x_k - \lambda_k \alpha, 0, 0, \dots, 0)$  est une solution réalisable si  $x_i - \lambda_i \alpha \geq 0, i = 1, \dots, k$ . Choisissons "  $\alpha$  " de tel sorte. Evidemment si  $\lambda_i \leq 0$ .

Le choix sera  $\alpha$ , tel que :  $\alpha \leq \frac{x_i}{\lambda_i}$  si  $\lambda_i \geq 0$  et  $\alpha \geq \frac{x_i}{\lambda_i}$  si  $\lambda_i \leq 0$ .

Déterminons  $\alpha = \frac{x_r}{\lambda_r} = \min \left\{ \frac{x_i}{\lambda_i}, \lambda_i > 0 \right\}$ .

$(x_1 - \lambda_1 \frac{x_r}{\lambda_r}, x_2 - \lambda_2 \frac{x_r}{\lambda_r}, \dots, x_k - \lambda_k \frac{x_r}{\lambda_r}, 0, 0, \dots, 0)$  est une nouvelle solution

réalisable ne comportant au plus que  $(k-1)$  composantes positives. Si les vecteurs associés à ces valeurs sont linéairement dépendants, on répète l'opération. Après un nombre " p " d'opérations ( ou inférieur à p ), on obtient " k - p " vecteurs

Linéairement Indépendants, L.I, ce qui ramène au cas 1.

On a une solution dégénérée si  $k - p < m$  et non dégénérée si  $k - p = m$ .

**Preuve du b.** Faire une même preuve pour une solution optimale sauf qu'il faut trouver des conditions pour que la valeur de la fonction objectif ne diminue pas.

**Remarque 3 :** Le problème de la programmation linéaire est résolu par le théorème fondamental de la PL. En effet, le nombre de base et de solutions de base est fini

$(C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!})$  et on calcule les valeurs de la fonction  $Z$  correspondants à ces solutions de base et choisir la valeur minimale.

**Corollaire 1 :** Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution réalisable soit une solution de base réalisable est que les vecteurs associés aux variables non nulles soient L.I.

**Exemple 2:** soit le système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

et soit  $\bar{x} = (3, 2, 1)$  une solution réalisable.

A partir de  $\bar{x}$ , déterminons une solution de base réalisable.

$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  sont L.D.

Si on prend  $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , le déterminant formé par ces deux vecteurs

$$\exists j, j = 1, 2, 3 / \lambda_j \neq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^k \lambda_j a_j = 0, \text{ soit : } \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0.$$

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } \lambda_1 = 1, \text{ le système devient : } \begin{cases} \lambda_2 + 4\lambda_3 = -2 \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = -1 \end{cases},$$

ce qui donne que  $\lambda_2 = 2/5$  et  $\lambda_3 = -3/5$ .

$$\text{Prenons } \alpha = \min \left\{ \frac{x_i}{\lambda_i}, \lambda_i > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{\frac{2}{5}} \right\} = 3.$$

$\bar{Y} = (x_1 - \lambda_1 \frac{x_r}{\lambda_r}, x_2 - \lambda_2 \frac{x_r}{\lambda_r}, x_3 - \lambda_3 \frac{x_r}{\lambda_r}) = (0, 4/5, 14/5)$  est une nouvelle solution de base réalisable.

**Remarque 4 :** si un  $\lambda_i < 0$ , on peut choisir  $\alpha = \max \left\{ \frac{x_i}{\lambda_i}, \lambda_i < 0 \right\} = \frac{-1}{\frac{3}{5}} = \frac{-5}{3}$ .

$$\bar{T} = (x_1 - \lambda_1 \frac{-5}{3}, x_2 - \lambda_2 \frac{-5}{3}, x_3 - \lambda_3 \frac{-5}{3}) = (3 - \frac{-5}{3}, 2 - \frac{2}{5} \frac{-5}{3}, 1 - \frac{-3}{5} \frac{-5}{3})$$

$\bar{T} = (14/3, 8/3, 0)$  est une seconde solution de base réalisable.

.

.

UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA