

Cours de Mathématiques - ASINSA-1

Les applications linéaires

Frédéric STURM

Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon

Année académique 2010-2011



Les applications linéaires

Définition

4

Définition 1.1 (Application linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} .

- On appelle **application linéaire de E vers F** toute application $f : E \rightarrow F$ vérifiant :

$$\begin{cases} f(\vec{x} +_E \vec{x}') = f(\vec{x}) +_F f(\vec{x}') \\ f(\alpha \cdot_E \vec{x}) = \alpha \cdot_F f(\vec{x}) \end{cases}$$

pour tout $(\vec{x}, \vec{x}') \in E^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$.

- Une application linéaire est aussi appelée **morphisme d'espaces vectoriels** et on note $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

Remarque

Clairement, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ et $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in E$.

Les applications linéaires

Isomorphisme réciproque

7

Proposition 1.2

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F . Si f est bijective alors son application réciproque f^{-1} est une application linéaire de F vers E . Autrement dit,

$$f^{-1}(\alpha \cdot_F \vec{y} +_F \beta \cdot_F \vec{y}') = \alpha \cdot_E f^{-1}(\vec{y}) +_E \beta \cdot_E f^{-1}(\vec{y}')$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $(\vec{y}, \vec{y}') \in F^2$.

Remarque

Bien sûr, en plus d'être linéaire, l'application réciproque $f^{-1} : F \rightarrow E$ est-elle même bijective.

Les applications linéaires

Plan du cours

2

- 1 Définitions et propriétés
- 2 Cas particulier des endomorphismes
- 3 Noyau et image
- 4 Rang d'une application linéaire

Les applications linéaires

Caractérisation

5

Proposition 1.1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application $f : E \rightarrow F$ soit linéaire est que

$$f(\alpha \cdot_E \vec{x} +_E \beta \cdot_E \vec{x}') = \alpha \cdot_F f(\vec{x}) +_F \beta \cdot_F f(\vec{x}')$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $(\vec{x}, \vec{x}') \in E^2$.

Exemple 1.1

- L'application $x \in \mathbb{K} \mapsto x^2 \in \mathbb{K}$ n'est pas linéaire.
- L'application $\mathcal{D} : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P' \in \mathbb{K}[X]$ est linéaire.
- Soit $a \in \mathbb{K}$. L'application $x \in \mathbb{K} \mapsto y = ax \in \mathbb{K}$ est linéaire.

Les applications linéaires

Composition d'applications linéaires

8

Proposition 1.3

Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels. Si $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$. En d'autres termes, la composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

En effet, on peut vérifier les points suivants :

- Pour tout $(\vec{x}, \vec{x}') \in E^2$

$$(g \circ f)(\vec{x} +_E \vec{x}') = (g \circ f)(\vec{x}) +_G (g \circ f)(\vec{x}').$$

- Pour tout $\vec{x} \in E$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$(g \circ f)(\alpha \cdot_E \vec{x}) = \alpha \cdot_G (g \circ f)(\vec{x}).$$

Les applications linéaires

Plan du cours

3

- 1 Définitions et propriétés
- 2 Cas particulier des endomorphismes
- 3 Noyau et image
- 4 Rang d'une application linéaire

Les applications linéaires

Définition 1.2 (Cas particuliers)

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

- Forme linéaire** : application linéaire de E dans \mathbb{K} .
- Isomorphisme** : application linéaire bijective de E dans F .
- Endomorphisme de E** : application linéaire f de E dans E . On note : $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Si un endomorphisme f de E est bijectif alors on dit que c'est un **automorphisme** de E . On note : $f \in \mathcal{GL}_{\mathbb{K}}(E)$.

Exemple 1.2

La dérivation des polynômes, c'est-à-dire l'application

$$\mathcal{D} : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P' \in \mathbb{K}[X]$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. On note : $\mathcal{D} \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$.

Les applications linéaires

Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$

9

Proposition 1.4

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ possède une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Il est suffisant de vérifier que $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un sous-espace du \mathbb{K} -espace $\mathcal{A}(E, F)$. Faisons-le.

Soient f, g dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

- Pour tout $(\vec{x}, \vec{x}') \in E^2$

$$(\alpha f + \beta g)(\vec{x} +_E \vec{x}') = (\alpha f + \beta g)(\vec{x}) +_F (\alpha f + \beta g)(\vec{x}').$$

- Pour tout $\vec{x} \in E$ et pour tout $\gamma \in \mathbb{K}$

$$(\alpha f + \beta g)(\gamma \cdot_E \vec{x}) = \gamma \cdot_F ((\alpha f + \beta g)(\vec{x})).$$

On a ainsi vérifié que $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

- Soient $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$ et

$$f : \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mapsto y = ax_1 + bx_2 \in \mathbb{K}.$$

On vérifie que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K})$.

- Soient $a \in \mathbb{K}$, $b \in \mathbb{K}$ et

$$f : x \in \mathbb{K} \mapsto \vec{y} = (ax, bx) \in \mathbb{K}^2.$$

On vérifie que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}^2)$.

- Soient a, b, c, d appartenant à \mathbb{K} et

$$f : \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mapsto \vec{y} = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) \in \mathbb{K}^2.$$

On vérifie que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^2)$.



- Définitions et propriétés
- Cas particulier des endomorphismes
- Noyau et image
- Rang d'une application linéaire



En plus d'être un groupe commutatif pour $+$, l'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ possède les propriétés suivantes :

- pour tous f, g, h dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- pour tous f, g, h dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$

$$\begin{cases} f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h), \\ (g + h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f). \end{cases}$$

- Pour tout $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, $f \circ \text{id}_E = \text{id}_E \circ f = f$.

En résumé, on dit que $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ possède une **structure d'anneau**.



- Plus généralement, soit $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application qui à $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ associe $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ où

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p \end{cases}$$

On peut vérifier que $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Exemple 1.3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application qui au vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. C'est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .



Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

$$\left(\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f^k \stackrel{\text{not}}{=} \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}} \right) \quad \text{et} \quad f^0 = \text{id}_E.$$

Définition 2.1 (Endomorphisme nilpotent)

Soient E un \mathbb{K} -espace et f un endomorphisme de E . On dit que f est **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

On en déduit que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$ alors $f^{k'} = 0$ pour tout entier naturel $k' \geq k$. Ainsi,

$$p \stackrel{\text{déf}}{=} \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^k = 0\}.$$

L'entier p est appelé l'**indice de nilpotence de f** .



ATTENTION L'anneau $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ n'est pas commutatif. En effet, il existe f et g dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tels que



$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Remarque

La composée de deux endomorphismes peut être nulle sans que l'un des deux le soit. En effet, il existe f et g dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tels que

$$f \neq 0, \quad g \neq 0 \quad \text{et} \quad g \circ f = 0.$$

En ce sens, on dit que $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ n'est pas intègre.



Proposition 1.5

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors,

$$f(\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_m \vec{v}_m) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_m f(\vec{v}_m)$$

pour tous $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ dans E et tous $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ dans \mathbb{K} .

Supposons E de dimension p . Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E . Alors,

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_p f(\vec{e}_p)$$

où x_1, x_2, \dots, x_p désignent les coordonnées de \vec{x} dans \mathcal{B} .

Ainsi, pour connaître une application linéaire, **il est nécessaire et suffisant** de connaître son action sur une base (quelconque) de son ensemble de départ.



Définition 2.2

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Un endomorphisme p de E est un **projecteur** de E si $p \circ p = p$. On dit aussi **projection vectorielle**.
- Un endomorphisme s de E est une **involution linéaire** de E si $s \circ s = \text{id}_E$. On dit aussi **symétrie vectorielle**.
- Soit $k \in \mathbb{K}^*$. Un endomorphisme h de E est une **homothétie vectorielle de rapport k** si $h = k \text{id}_E$.

Remarque

Une involution linéaire s de E et une homothétie vectorielle h de rapport $k \in \mathbb{K}^*$ constituent des bijections de E . On a :

$$s^{-1} = s \quad \text{et} \quad h^{-1} = \frac{1}{k} \text{id}_E.$$



- Définitions et propriétés
- Cas particulier des endomorphismes
- Noyau et image
- Rang d'une application linéaire



Noyau d'une application linéaire

Définition 3.1 (Noyau d'une application linéaire)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. On appelle **noyau** de f et on note $\text{Ker } f$ le sous-ensemble de E défini par

$$\text{Ker } f \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{0}_F\}.$$

Le noyau d'une application linéaire f de E dans F n'est jamais vide puisqu'il contient le vecteur nul de E . En effet,

$$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$

Mieux encore ! On a le résultat suivant :

Proposition 3.1 (Propriété du noyau)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de départ E .



Image d'une application linéaire

Rappelons que $\text{Im } f \stackrel{\text{not}}{=} f(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in E\}$.

Proposition 3.3

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée F .

Remarque

Rappelons que si f désigne une application de E dans F , on a alors l'équivalence suivante :

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im } f = F.$$

Cette caractérisation est vraie même si f n'est pas linéaire.



Image d'une famille libre

Proposition 3.6 (Image d'une famille libre)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et \mathcal{L} une famille libre de E . Si f est **injective** alors $f(\mathcal{L})$ est une famille libre de F .

Proposition 3.7 (Image d'une base)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et \mathcal{B} une base de E .

- Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit **injective** est que $f(\mathcal{B})$ soit une base de $\text{Im } f$.
- En particulier, f est **bijective** si, et seulement si, $f(\mathcal{B})$ est une base de F .



Exemple 3.1

Reprenons l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui à $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Déterminons le noyau de f . Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \text{Ker } f$. On a :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

D'où $x_2 = -x_3$ et $x_1 = x_3$. Ainsi,

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -x_3, x_3) = x_3(1, -1, 1).$$

Le noyau de f est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, -1, 1)$:

$$\text{Ker } f = \mathbb{R}\vec{u} \text{ avec } \vec{u} = (1, -1, 1).$$



Proposition 3.4 (Image d'une famille génératrice)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces, $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et \mathcal{G} une famille de vecteurs de E . Si \mathcal{G} engendre E alors $f(\mathcal{G})$ engendre $\text{Im } f$.

Exemple 3.3

Reprenons l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui à $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \text{Vect}(f((1, 0, 0)), f((0, 1, 0)), f((0, 0, 1))) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 1), (1, 1, 2), (0, 1, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1)). \end{aligned}$$

car $(1, 1, 2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 1)$. L'application (linéaire) f n'est pas surjective car $\text{Im } f \neq \mathbb{R}^3$.



Plan du cours

- 1 Définitions et propriétés
- 2 Cas particulier des endomorphismes
- 3 Noyau et image
- 4 Rang d'une application linéaire



Caractérisation d'une application linéaire injective

Proposition 3.2

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Pour qu'une application linéaire f de E dans F soit **injective**, il faut et il suffit que

$$\text{Ker } f = \{\vec{0}_E\}.$$

Exemple 3.2

Reprenons l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui à $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ associe le vecteur $\vec{y} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Cette application linéaire f n'est pas injective car

$$\text{Ker } f \neq \{(0, 0, 0)\}.$$

Cas d'une espace E de dimension finie

Soit E est de dimension finie. Supposons que $\dim_{\mathbb{K}}(E) = p$.

L'espace E possède une base finie $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$. D'où

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(\mathcal{B})) = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_p)).$$

On en déduit : $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im } f) \leq p$.

Proposition 3.5

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Si E est de dimension finie alors $\text{Im } f$ est de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im } f) \leq \dim_{\mathbb{K}}(E).$$

On dit qu'une application linéaire ne peut pas « augmenter » la dimension.



Dans ce paragraphe, on considère que :

- l'espace de départ E est de dimension finie ;
- l'espace d'arrivée F est de dimension finie ou infinie.

Définition 4.1 (Rang d'une application linéaire)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. On appelle **rang** de f et on note $\text{rg } f$ la dimension de l'image de f , c'est-à-dire :

$$\text{rg } f \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im } f).$$

Remarque

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ désigne une base de E alors

$$\text{Im } f = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_p)).$$

On en déduit : $\text{rg } f = \text{rg}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_p)) \leq p$. Ainsi,

$$\text{rg } f \leq \dim_{\mathbb{K}}(E).$$



Remarque

Si, de plus, l'espace d'arrivée F est de dimension finie alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) \leq \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

puisque $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de F . On a ainsi :

$$\operatorname{rg} f \leq \min \{ \dim_{\mathbb{K}}(E), \dim_{\mathbb{K}}(F) \}.$$

Le théorème suivant est... **fondamental** ! Jugez plutôt :

Théorème 4.1 (Théorème fondamental du rang)

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Si E est de dimension finie alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg} f + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f).$$



Exemple 4.1

Reprenons l'exemple de l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui à (x_1, x_2, x_3) associe $(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3)$. Rappelons que : $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f) = 1$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im} f) = 2$. On a :

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \underbrace{\operatorname{rg} f}_{=2} + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker} f)}_{=1}.$$

Remarque

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Supposons E et F de dimensions finies (non nécessairement égales).

- Si f est surjective alors $\dim_{\mathbb{K}}(E) \geq \dim_{\mathbb{K}}(F)$.
- Si f est injective alors $\dim_{\mathbb{K}}(E) \leq \dim_{\mathbb{K}}(F)$.
- Si f est bijective alors $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$.



Proposition 4.1

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces de dimensions finies (non nécessairement identiques) et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors

- f est surjective **si, et seulement si**, $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(F)$;
- f est injective **si, et seulement si**, $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(E)$;
- f est bijective **ssi** $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Corollaire 4.1

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$ alors

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}.$$

