جامعة العقيد الحاج لخضر - باتنة

كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم التسيير

دروس وتطبيقات

مقياس الرياضيات I

للسنة الأولى تسيير

السداسي الأول

من إعداد الأساتذة:

د. بركـــــــــات الخير

د. بوضياف نعيـــــمة

أ. مخلوف ساســــية

أ. شطوح كريـــــمة

أ. حــــــدوش وردة

أ. بن جاب الله الطاهر

أ. الوافي هشـــــام

السنة الجامعية: 2013 -- 2014

الفهرس العام

الفصـــــــــــــل الأول

الدوال ذات متغير حقيقي

- النـهايات والاستمرار
- الإشتقاق
- دراسة الدوال الأسية واللوغاريتمية
- النشر المحدود

الدوال ذات متغير حقيقي

1 – عموميات على الدوال

التطبيق المعرف من I نحو $\mathbb{R}$ هو عبارة عن علاقة تربط بين عناصر I و $\mathbb{R}$، بحيث كل عنصر من I له صورة وحيدة في $\mathbb{R}$.

1 - 1 - تعريف:

الدالة f بمتغير حقيقي هي عبارة عن تطبيق من مجال ($I \subseteq \mathbb{R}$) نحو $\mathbb{R}$ ، نرمز لمجموعة الدوال المعرفة من I نحو $\mathbb{R}$ بالرمز $\mathcal{F}\ (\ I,\ \mathbb{R}\ )$ (هذا يعني أن: $f : I \to \mathbb{R}$)

المجموعة D_f هي مجال تعريف الدالة f حيث : $D_f = \{ x \in \mathbb{R} \ /$ معرفة $f(x) \}$

مثال:

1/ $D_f = \mathbb{R}^*$ من أجل

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

2/ $D_f =]1, +\infty[$ من أجل :

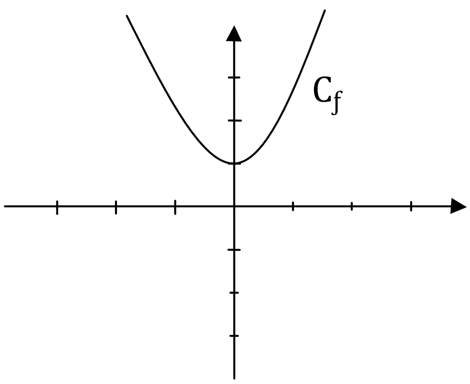
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

المجموعة C_f هي بيان الدالة f حيث : $C_f = \{ \left(x, f(x)\right) / \ x \in D_f \}$

مثال:

من أجل

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 + 1$$



2-1 علاقة الترتيب

تعريف: $g\ ,\ f \in \mathcal{F}\ (I\ ,\mathbb{R}\ )$

نقول أن $f \leq g$ إذا كان $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$

تمرين 1:

أوجد مجال تعريف الدوال التالية:

$$f_1\,(x) = -3\ x^2 + 5\ x - 6 \quad , \quad f_2\,(x) = \frac{3}{x^2 + 4\,x + 9} \quad ,$$

$$f_3\,(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

الحل :

$$Df_1 =]-\infty, +\infty[\quad , \quad Df_2 =]-\infty, +\infty[\quad , \quad Df_3 =]-3, +\infty[$$

3-1 الدوال الفردية والدوال الزوجية

لتكن $f \in \mathcal{F}\ (\ I\ ,\mathbb{R}\ )$ نقول أن :

- f دالة زوجية هذا يعني أن: $\forall x \in Df,\ f(x) = f(-x)$

ومنه بيان f متناظر بالنسبة للمستقيم (oy)

- f دالة فردية وهذا يعني أن: $\forall x \in Df,\ f(x) = -f(-x)$

ومنه بيان الدالة f متناظر بالنسبة لنقطة المبدأ 0

4-1 الدوال الدورية:

تعريف :

لتكن $f \in \mathcal{F}\ (\mathbb{R}\ ,\mathbb{R}\ )$ نقول أن : f دورية ودورها $T\ (T > 0)$ إذا كان :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x)$$

مثال:

- الدوال $\sin x$ و $\cos x$ هي عبارة عن دوال دورية دورها $T = 2\pi$
- كل دالة ثابتة فهي دالة دورية

5-1 الدوال المحدودة:

تعريف : لتكن $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- نقول أن f محدودة من الأعلى على I إذا كان : $\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in I,\ f(x) \leq M$
- نقول أن f محدودة من الأسفل على I إذا كان : $\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in I,\ f(x) \geq m$
- نقول عن f أنها محدودة على I إذا كان: $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ m \leq f(x) \leq M$

6-1 عمليات على الدوال:

لتكن $g \in \mathcal{F}(I', \mathbb{R}), f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ لدينا:

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

b) $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

c) $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ إذا كان : $f(x) \neq 0$

d) إذا كان لدينا $f(I) \subseteq I' \subseteq \mathbb{R}$ فإن: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

مثال:

من أجل : $Df = \mathbb{R}$ ،

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2 + 1$$

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \sqrt{x}, Dg = [0, +\infty[$$

لدينا: $f(Df) = [1, +\infty[\subseteq D(g) = [0, +\infty[$

إذن: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$

7-1- الدوال الرتيبة:

تعريف:

لتكن $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ نقول أن :

- f متزايدة على I في $\mathbb{R}$ إذا كان : $\forall\, x,y \in I\,,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$
- f متناقصة على I في $\mathbb{R}$ إذا كان: $\forall\, x,y \in I\,,\ x \leq y \Longrightarrow f(y) \leq f(x)$
- f متزايدة تماماعلى I في $\mathbb{R}$ إذا كان : $\forall\, x,y \in I\,,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
- f متناقصة تماما على I في $\mathbb{R}$ إذا كان: $\forall\, x,y \in I\,,\ x \leq y \Longrightarrow f(y) \leq f(x)$

النهايات والاستمرار:

1-2 النهايات:

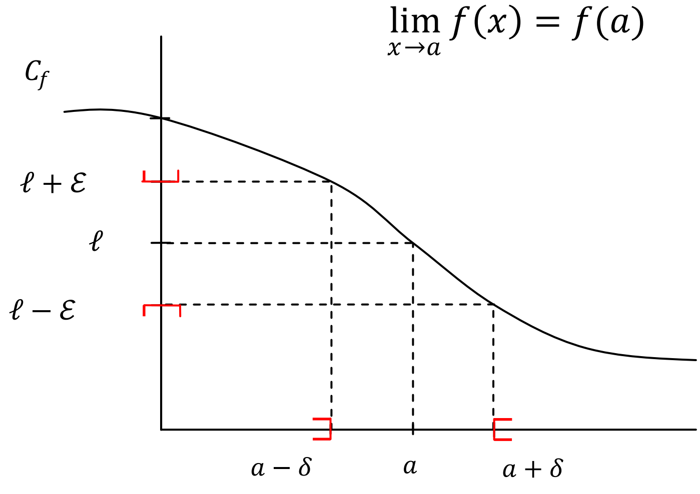
تعريف: لتكن $(f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R}), a \in \bar{I} \cap \mathbb{R})$ و$(\ell \in \mathbb{R})$ نقول أن f تقبل نهاية ℓ عند النقطة a إذا كان من أجل عدد $(\varepsilon > 0)$ ، يوجد عدد حقيقي $(\delta > 0)$ بحيث من أجل كل x من I العلاقة $|\,x-a| \leq \delta$ تستلزم $|\,f(x)-\ell| \leq \varepsilon$ أي

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in I;\ |\,x-a| \leq \delta \Rightarrow |\,f(x)-\ell| \leq \varepsilon$$

في حالة وجود النهاية فهي وحيدة وتكتب $\lim_{x\to a} f(x) = \ell = \lim_a f$ أو $\begin{matrix} f(x) & \to & \ell \\ x & \to & a \end{matrix}$

ملاحظة: إذا كانت f معرفة عند a و كانت النهاية موجودة إذن:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$



نهاية f عند a

مثال:

لتكن : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

نبحث عن نهاية الدالة f من أجل $x = 1$

لدينا:

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

من أجل $x \neq 1$ لدينا :

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2$$

$$|f(x) - 3| = |x+2-3| = |x-1|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0 / \ \forall x \in D_f : |x-1| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - 3| = |x-1| \leq \varepsilon$$

ومنه نستنتج أن:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

<u>تعريف 2</u>: <u>تعريف النهاية من اليمين والنهاية من اليسار</u>

لتكن $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

نقول أن f تقبل نهاية من اليسار عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

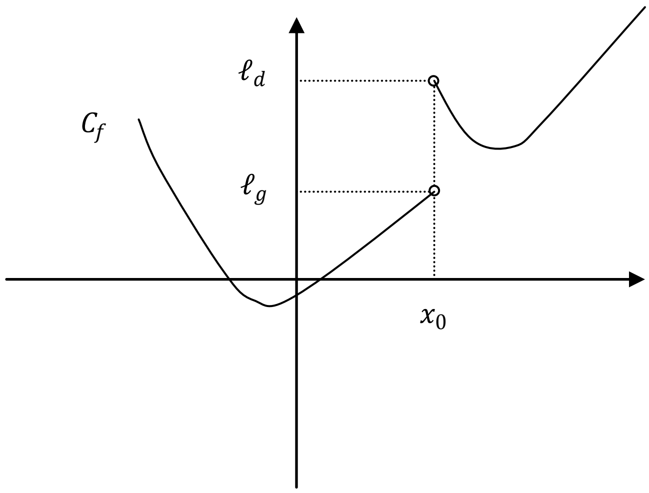
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0, x_0 - n_\varepsilon < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - \ell_d| \leq \varepsilon$$

ونكتب: $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell_d$ أو $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_d$

نقول أن f تقبل نهاية من اليمين عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0, x_0 < x < x_0 + n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - \ell_g| \leq \varepsilon$$

ونكتب: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell_g$ أو $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_g$



ملاحظة:

إذا كانت $f \in \mathcal{F}(I\backslash\{a\}, \mathbb{R})$ و $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \ell$

إذن: نقول أن f تقبل نهاية ℓ عند a

النهايات الغير المنتهية

تعريف 1

من أجل كل عدد حقيقي $a \in \mathbb{R}$ و $\ell = \pm\infty$ لدينا :

1/ $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff (\forall A > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in I)$:

$$|\, x - a| \le \delta \implies f(x) \ge A\,)$$

2/ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff (\forall B < 0\,, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in I)$:

$$|\, x - a| \le \delta \implies f(x) \le B$$

تعريف 2

من أجل $a = \pm\infty$ و $\ell = \pm\infty$ لدينا :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall A > 0\,, \exists\, A' > 0, \forall\, x \in I : x \ge A' \implies f(x) \ge A$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall B < 0, \exists\, A' > 0, \forall\, x \in I : x \ge A' \implies f(x) \le B)$

$3. \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists B' < 0, \forall x \epsilon I : x \leq B' \Longrightarrow f(x) \geq A)$
$4. \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall B < 0, \exists B' < 0, \forall x \epsilon I : x \leq B' \Longrightarrow f(x) \leq B)$

2-2-1 عمليات على النهايات:

إذا كان: $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \bar{\ell}$

إذن:

1) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \ell + \bar{\ell}$

2) $\lim_{x\to a}[f(x). g(x)] = \ell.\bar{\ell}$

إذا كان: $\bar{\ell} \neq 0$ و $g \neq 0$ إذن:

3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\bar{\ell}}$

مثال:

إذا كانت $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ إذن $\lim_{x\to 0} \frac{sim\ x}{x} = 1$

إذا كانت $g(x) = \frac{ln\ (1+2x)}{x}$ إذن $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$

إذن $\lim_{x\to 0}[f(x) + g(x)] = 3$

$\lim_{x\to 0}[f(x). g(x)] = 2$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$

2-1-2 حالات عدم التعيين:

- في حساب النهايات نعرف حالة عدم التعيين (التي نرمز لها بالرمز ح.ع.ت) وكل وضعية تقودنا إلى حالة أين نستخدم كل العمليات على النهايات ولا نجد النهاية.
- بعض حالات عدم التعيين المتداولة والمهمة هي :

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \times \infty, -\infty + \infty, 1^{\infty}, 0^0, 0^{\infty}, \infty^0, \dots$$

مثال: إذا كان

$f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ إذن $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

نقول أن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ هي حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

و $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ يتم تحديدها بالإشتقاق

2-2 الاستمرار:

تعريف:

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجال I و $x_0 \in I$

- نقول أن f مستمرة عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0; |x - x_0| \leq n_\varepsilon$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0| \leq \varepsilon$$

- نقول أن f مستمرة من اليمين عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$

- نقول أن f مستمرة من اليسار عند x_0 إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$$

- نقول أن f مستمرة على مجال $[,b]$ إذا كانت مستمرة على كل نقطة $x \in \;]a,b[$ ومستمرة على يمين a ومستمرة على يسار b .

ملاحظة:

إذا كانت الدالة مستمرة من يمين ومن يسار x_0 إذن f مستمرة عند x_0

تمرين

برهن أن الدالة fالمعرفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si\ x < 0 \\ 3x^2 - x + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

مستمرة عند 0

2-2 -1 عمليات على الدوال المستمرة

إذا كانت : f و g دوال مستمرة عند x_0 اذن :

1 / $f + g$ و $f.g$ هي عبارة عن دوال مستمرة عند x_0

2 / إذا كان $g(x_0) \neq 0$, اذن $\frac{f}{g}$ مستمرة عند x_0

3 / إذا كانت f مستمرة عند x_0 و g مستمرة عند $f\ (x_0)$ اذن :

$g o f$ مستمرة عند x_0

مثال:

1 / الدوال كثيرات الحدود هي عبارة عن دوال مستمرة على $\mathbb{R}$

2 / الدوال المثلثية هي عبارة عن دوال مستمرة على مجال تعريفها .

إذا كان : $f(x) = \sin x$ من اجل x_0 و x في $\mathbb{R}$

لدينا:

$$\sin x - \sin x_0 = 2\ \sin(\frac{x - x_0}{2})\ \cos(\frac{x + x_0}{2})$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq x$$

$$|\sin x - \sin x_0| \leq \left|2sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| \leq 2. \left|sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right|$$

$$\leq 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|$$

إذن:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n = \varepsilon; |x - x_0| \leq n \Longrightarrow |\sin x - \sin x_0| \leq \varepsilon$$

إذن نستنتج أن الدالة $\sin x$ هي مستمرة على $\mathbb{R}$

التمديد بالإستمرار:

تعريف: إذا كانت f دالة معرفة على مجال $I\backslash\{x_0\}$ ، و $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ ، الدالة g المعرفة كما يلي:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ \ell & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

هي تمديد لــ f باستمرار .

مثال:

لتكن g دالة معرفة كما يلي:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

g هي تمديد بالاستمرار للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بــ: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2-2-2 نظرية القيم المتوسطة:

لنظرية القيم المتوسطة أشكال عديدة من أهمها نظرية بولزانو التي تنص على ما يلي:

نظرية:

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال محدود $[a,b]$ وكان الجداء $f(a).f(b) < 0$ إذن توجد نقطة $c \in]a,b[$ بحيث $f(c) = 0$

مثال:

لتكن المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2 = 0$

لدينا:

f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ، $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}$ و $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{79}{64}$

إذن :

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\ f\ \left(\frac{3}{4}\right) < 0$$

بتطبيق نظرية القيم المتوسطة يوجد $\left[\frac{3}{4} \ . \frac{1}{2}\right[$ $c \in$

$$f(c) = 0$$

إذن c هو تقريب كل المعادلة $f(x) = 0$ على المجال $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$

بدقة 25% لان $0{,}25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

4 - الدوال العكسية

تذكــير

لتكن f دالة معرفة على المجال I نقول أن:

f متزايدة تماما $\Leftrightarrow \forall x , y \epsilon I \,; x < y \implies f(x) < f(y)$

f متناقصة تماما $\Leftrightarrow \forall x , y \epsilon I \,; x < y \implies f(y) < f(x)$

ملاحظة:

إذا كانت f مستمرة و متزايدة تماما على $[a,b]$ من $\mathbb{R}$

$$\forall x \,\epsilon [a,b] \,,\, a \le x \le b \implies f\,(a) \le f\,(x) \le f(b)$$

بحيث: $f(a)$ هو الحد الأدنى لـ $f(x)$ $(\,(a) = m\,)$

و$f(b)$ يمثل الحد الأقصى لـ $f\,(x)$ $(f(b) = M\,)$

إذن$[\,f\,(a), f\,(b)] \;= [m, M] = f\,[\,[a,b]]$

بنفس الطريقة إذا كانت f مستمرة ومتناقصة تماما على $[a,b]$

من $\mathbb{R}$ لدينا $[f(b), f\,(a)] = [m, M] = f\,([a,b])$

نظرية

إذا كانت f دالة مستمرة ومتزايدة تماما (متناقصة تماما) على مجال $[a,b]$

إذن f دالة تقابلية على $[a,b]$ نحو $[f(a), f(b)]$ $([f(b), f\,(a)])$ على التوالي .

نستنتج أن :

إذا كانت fدالة مستمرة ومتزايدة تماما (متناقصة تماما) من $([a,b\,] \longrightarrow [m, M])$

f تقبل دالة عكسية تقابلية ترمز لها بالرمز f^{-1} معرفة

$$f^{-1}\,[m, M] \longrightarrow [a,b]$$

$$y \longmapsto f^{-1}(y) = x$$

4 - 1 بيان الدالة العكسية

بيان الدالة f^{-1} متناظر مع بيان الدالة f بالنسبة للمستقيم $(y = x)$

مثـــال:

الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sin x$ على المجال $[\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\,]$

هي الدالة $f^{-1}\;(x)\; = arc\;\sin x$ هي عبارة عن دالة مستمرة ومتزايدة تماما على $[-1,1]$

لدينا: $\sin x : [-\,\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\;\;] \;\longrightarrow\; [-1,1\,]$

$$Arc\sin x : [-1\,,1\,] \;\longrightarrow [-\,\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\;\;]$$

$y = \sin x$ $\qquad$ $x = arc\ \sin y$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $-1 \leq y \leq 1$

بعـض التمــارين التدعيميــة

التمـــريـــن 1:

عين مجال تعريف الدوال التاليــة

$$a)\ f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^3 + x^2 + 2x}, \qquad b)\ g(x) = \sqrt{x(x-1)}$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{1 - |x|}, \qquad d)\ g(x) = \sqrt{6 - |x - 2|}$$

التمــريـن 2 :

احسب نهايات الدوال التالية :

$$a)\ \lim_{x\to 0} = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3}$$

$$c)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}, \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{3 - \sqrt{9 + x}}{x}$$

$$e)\ \lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}, \qquad f)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin x}$$

التمـــريــن 3:

لتكن f دالة معرفة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{2x} & si \quad x<0\\ (x+c)^2 & si \quad x>0\end{cases}$$

أوجد c بحيث تكون $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة ، ماهي قيمة النهاية ؟

التمـــريــن 4:

باستخدام تعريف النهاية برهن أن: $\lim_{x\to 2}(x^2-4x+7)=3$

التمـــريــن 5:

كيف نعرف $f(a)$ بحيث تكون الدالة f مستمرة عند a

$a)\qquad f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}\quad,\quad a=1$

$b)\qquad f(x)=\begin{cases}x^2+1 & si \quad x<1\\ \sqrt{x+3} & si \quad x>1\end{cases}\qquad a=1$

$c)\qquad f(x)=\frac{cos^2 x-1}{\sin x}\quad,\quad a=0$

التمـــريــن 6:

برهن أن المعادلات التالية تقبل على الأقل حل حقيقي:

$$a)\qquad f(x)=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

$b)\qquad x^3-3x^2+15x-7=0$

$c)\qquad 1+\sin x-x^2=0$

التمـــريــن 7:

a) لتكن f دالة معرفة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & si \quad x\geq 0\\ x-1 & si \quad x<0\end{cases}$$

أدرس استمرارية الدالة f

b) نفس السؤال من أجل الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{x^2-a^2}} & \text{si } |x| < a\\ 0 & \text{si } |x| \geq a\end{cases}$$

بحيث $a \in \mathbb{R}_+$

5- الدالة المشتقة والتفسير الهندسي للمشتق:

5-1- الاشتقاق:

تعريف:

لتكن f دالة معرفة على مجال I و $x_0 \in I$

نقول أن f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 ، إذا كان : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \acute{f}(x_0)$

نقول عن $f'(x_0)$ العدد المشتق للدالة f عند $_0$ أو مشتق f في النقطة x_0

ملاحظات:

1. يوضع $x = x_0 + h$

إذن:

$$x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0 \;\; et \;\; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \acute{f}(x_0)$$

2. إذا كانت f قابلة للإشتقاق في النقطة x_0 إذن :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \acute{f}(x_0) + \varepsilon(h) \qquad \text{مع} \qquad \begin{matrix}\varepsilon(h) \to 0\\ h \to 0\end{matrix}$$

ولدينا:

$$\acute{f}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow \begin{matrix}\varepsilon(h) \to 0\\ h \to 0\end{matrix}$$

وإذا كان:

$$\begin{matrix}\varepsilon(h) \to 0\\ h \to 0\end{matrix} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \acute{f}(x_0)$$

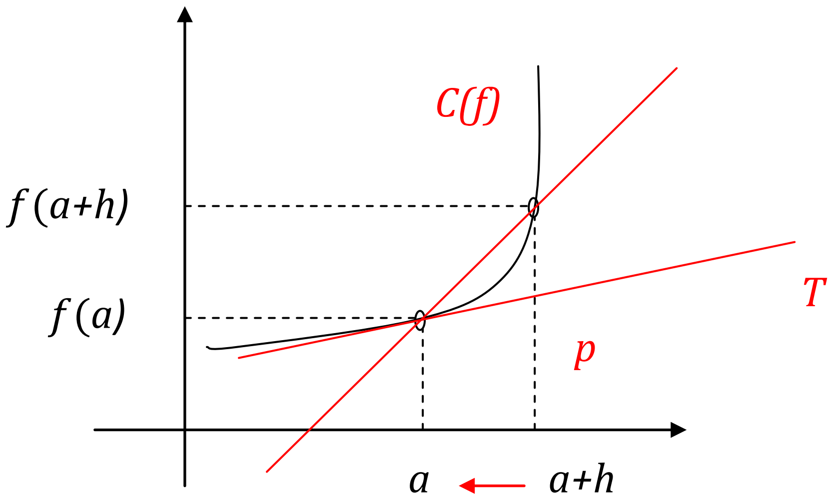
قضية: إذا كانت f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_0 إذن f مستمرة عند x_0

عكس هذه القضية غير صحيح على العموم.

5-2- التفسير الهندسي للمشتق:

لتكن $A(a,f(a))$ و $M(a+h,(a+h))$ نقطتين من البيان f على التوالي ، معامل توجيه المستقيم (AM) هو $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ من أجل $h\to 0$ النقطة M تؤول نحو النقطة A والمستقيم (AM) يمثل إذن مماس للبيان f ومعامل توجيه هو :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\acute{f}(a)$$



نعرف إذن معادلة المماس T للبيان $C(f)$ في النقطة a :(هذا المماس يمر على النقطة $A(a,f(a))$ ومعامل توجيهه هو $f'(a)$) بـ:

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

5-2-1- المشتق من اليمين والمشتق من اليسار:

تعريف:

- نقول أن f قابلة للإشتقاق من اليسار عند x_0 إذا كانت: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة ونكتب:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\acute{f}_g(x_0)$$

- بنفس الطريقة نقول أن f قابلة للإشتقاق من اليمين إذا كانت $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجودة
وتكتب: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \acute{f}_d(x_0)$
- نقول أن f دالة قابلة للإشتقاق على $[a,b]$ إذا كانت f قابلة للإشتقاق على كل نقطة $x \in]a,b[$
و f قابلة للإشتقاق على يسار b وقابلة للاشتقاق على يمين a .

ملاحظة:

إذا كانت f قابلة للإشتقاق من اليمين واليسار وإذا كان $\acute{f}_g(x_0) = \acute{f}_d(x_0)$ إذن نقول أن f قابلة للإشتقاق عند x_0

5-2-2- عمليات على المشتقات:

لتكن f و g دوال حقيقية قابلة للإشتقاق على I و k ثابت حقيقي لدينا :

الدالة	المشتق	
$f+g$	$\bar{f}+\bar{g}$	قابلة للاشتقاق على I
$k.f$	$k\bar{f}$	قابلة للاشتقاق على I
$f.g$	$\bar{f}g+\bar{g}f$	قابلة للاشتقاق على I
$\frac{1}{f}$	$\frac{-\bar{f}}{f^2}$	قابلة للاشتقاق على I ، إذا كان $f \neq 0$ على I
$\frac{f}{g}$	$\frac{\bar{f}g-\bar{g}f}{g^2}$	قابلة للاشتقاق على I ، إذا كان $g \neq 0$ على I

5-2-3- الدوال المألوفة:

$f(x)$	الدالة المشتقة $\bar{f}(x)$	مجال قابلية الاشتقاق
$k = cte$	0	$\mathbb{R}$

$x^p\,(p \in \mathbb{Z})$	px^{p-1}	$\mathbb{R}\ \ si\ p > 0$ $\mathbb{R}^*\ \ si\ p < 0$
$x^{\frac{1}{q}}(q \in Q_+^*)$	$\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$	$\mathbb{R}_+$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$
$arc\ sin$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I =]-1\,,1\,[$
$arc\ cos$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$I =]-1\,,1\,[$
$arc \tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*{}_+$
$sh\ x = \frac{e^x - \overline{\bar{e}^x}}{2}$	$ch\ x$	$\mathbb{R}$
$ch\ x = \frac{e^x + \bar{e}^x}{2}$	$sh\ x$	$\mathbb{R}$
$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$	$\frac{1}{ch^2\ x}$	$\mathbb{R}$

4-2-5 مشتق الدالة المركبة

تعريف:

لتكن f و g دوال معرفة كما يلي :

$$f : I \longrightarrow J$$

$$g : K \longrightarrow \mathbb{R}, J \subset K$$

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0 \in \mathrm{I}$ ، وإذا كانت الدالة g قابلة للاشتقاق عند النقطة $y_0 = f(x_0)\epsilon J$, إذن : $g\ o\ f$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 ولدينا :

$$(gof)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$$

مثال :

1/ $f, f(x) = cos^3 x$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا

$$f'(x) = 3\ cos^2 x \times (-\sin x) = -3 \sin x\ cos^2 x$$

2/ $f, f\ (x) = \cos\ (x^2 + 1)$ دالة قابلة للاشتقاق ولدينا

$$f'(x) = 2x\ (-sin(x^2 + 1)) = -2\ x \sin(x^2 + 1)$$

3 / $f\ , f\ (x) = e^{x^2+1}$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا:

$$f'(x) = 2\ x\ e^{x^2+1}$$

5-2-5 : مشتق الدالة العكسية

لتكن f دالة معرفة ، مستمرة ورتيبة تماما على [a,b] و f^{-1} دالتها العكسية

إذا كان f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0) \neq 0$

إذن :

1/ f^{-1} قابلة للاتقاق عند $y_0 = f\ (x_0)$

2/ لدينا :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\mathrm{y}))}$$

مثـــال :

1/ $arc \sin x$ هي دالة تقابلية قابلة للاشتقاق من
$]-1,1[$ الى $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و $(arc\ sinx\ )' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2/ $arc \tan x$ هي دالة تقابلية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إلى $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ و $(arc \tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

6-2-5 مشتق الدوال من الرتب العالية :

لتكن fدالة قابلة للاشتقاق علىI و مشتقتها هي f' . إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على Iمشتقتها هي f'' ،

نقول أن f'' هي المشتق الثاني لـ f

بصفة عامة المشتق حتى الدرجة n لـ f هو مشتق من الرتبة n وهو معرف بالعلاقة التراجعية التالية :

$$f^{(\mathrm{n})} = \left(f^{(\mathrm{n}-1)}\right)', \forall\ \mathrm{n}\ \geq 0\ , f^{(0)} = f$$

مثـــال:

من اجل

$$sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{لدينا} x \in \mathbb{R} \text{ و } n \in N$$

$$f(x) = sinx$$

$$f'(x) = cosx = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

2/ من اجل كل

$$cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{لدينا } x \in \mathbb{R} \text{ و } n \in \mathbb{N}$$

6-استخدامات المشتقات:

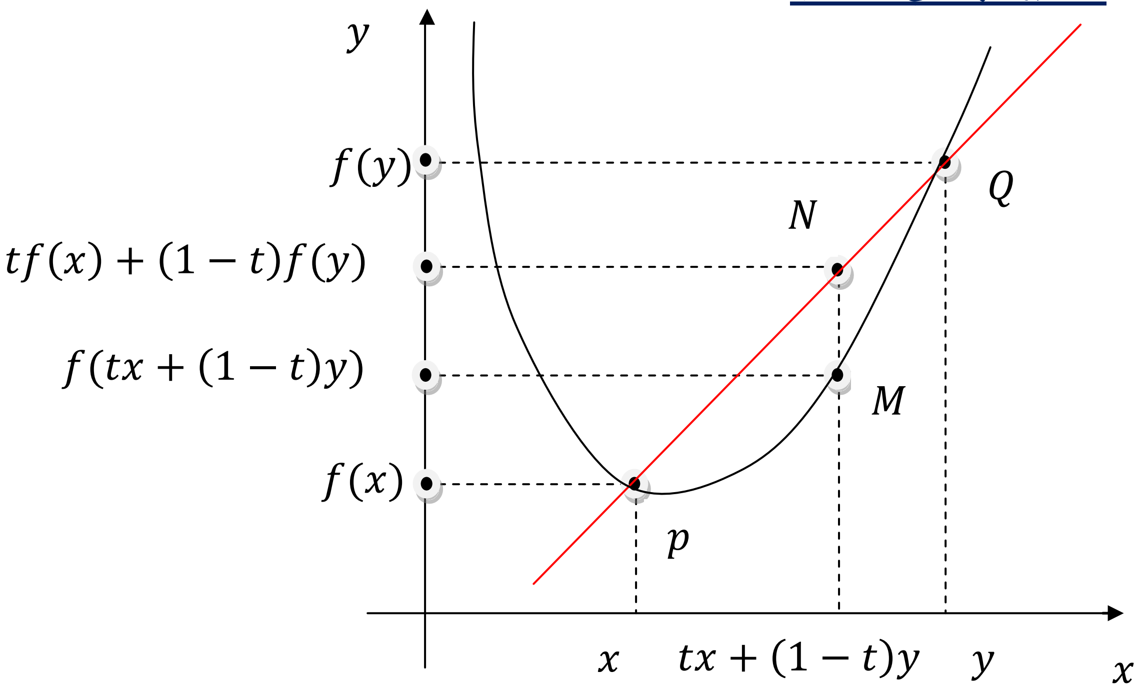
6-2 التقعر و التحدب :

تعريف :

لتكن f دالة حقيقية معرفة على مجال نقول ان f دالة محدبة هذا يعني ان :

$$\forall x, y \epsilon I, \forall t \epsilon [0,1]; f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

<u>التفسير الهندسي للتحــدب</u>



<u>خصائص</u>:

لتكن f دالة معرفة على مجال حقيقي I

القضايا التالية متكافئة

(1) الدالة fمحدبة على I

$$(2)\ \forall x, y, z \epsilon I, x < y < z \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

(3) من اجل كل $x_0 \epsilon I$ ، التطبيق المعروف بـ *application pente* en x_0

معرفة على $I/\{x_0\}$ بـ :

$$x \longmapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

هو عبارة عن تطبيق متزايد

(4)

$$\forall(x\,,y\,,z)\epsilon I^3 : x < y < z \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f(x) & f(y) & f(z) \end{vmatrix} \geq 0$$

قاعدة لوبيطال (règle de l’hôpital)

لتكن f وg دالتان معرفتان ، مستمرتان وقابلتان للاشتقاق بجوار نقطة x_0 اذن

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = l$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x_0)-g(x_0)} = \infty$$

إذا كانت $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ غير موجودة لا نستطيع استنتاج النهاية

مثـــال:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ (هي عبارة عن حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = sinx - x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$g(x) = x^3 \;\Rightarrow g(0) = 0$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{sinx - x}{x^3}$$

$$f'(x) = cosx - 1 \; et \; g'(x) = 3x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{cosx-1}{3x^2}$$

نطبق قاعدة لوبيطال للمرَة الثانية نجد :

$$f'(x) = \cos x - 1 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$f''(x) = -sinx \ et \ g''(x) = -6x$$

ولدينا :

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{6} = \frac{-1}{6} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{sin\,x - x}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

تمــريـــن :

أحسب النهايات التالية :

(1) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x+2}{x+3}$

(2) $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2+x+1} - ax$(ثابت حقيقي a)

(3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x-1}$

(4) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{cosx} - tgx$

(5) $\lim_{x \to a} (a^2 - x^2)\, tg\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$

الدالة اللوغاريتمية :

تعريف:

نعرف اللوغاريتم النيبيري ، ونرمز له بالرمز ln،الدالة الوحيدة المعرفة على $]0, +\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث: $\forall\, x \,\epsilon\,]0, +\infty[, (\ln x)' = \frac{1}{x}\, , \ln(1) = 0$

خصائص :

الدالة ln هي عبارة عن دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0, +\infty[$ بالاضافة الى

1/ من اجل كل x, y عددين موجبين تماما لدينا :

$a)\ \ln(xy) = lnx + \ln y$

$b)\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

$c)\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ lnx - \ln y$

$d)\ \ln(x^{\alpha}) = \ \alpha lnx$

2/ من اجل: $lnx \ \leq x - 1, x > 0$

3/ لدينا بعض النهايات المتداولة :

$$a)\ \lim_{x\to 0}\ln(x) = \ -\infty,\ \lim_{x\to +\infty}\ln(x) = \ +\infty$$

$$b)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x)}{x} = \ 0, \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \ 1$$

$$c)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\propto}} = \ 0^{+;}\ \ \propto > 0$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\propto x)}{x} = \propto, \lim_{x\to 0} = \ \frac{\propto x}{\ln(1+\propto x)} = 1$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} x^{\propto}\ln(x) = \ 0;\ \propto > 0$$

تعريف :

ليكن $a \ \epsilon\ ]0\ ,1\ [\cup]\ 1, +\infty[$ اللوغاريتم ذو الأساس a،

التطبيق المعرف على $]0, +\infty[$ بـ :

$$\forall\, x > 0, log_a\ (x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

حساب مـــرونة "تابع"

f دالة و E مرونة التابع فإن : $E = \frac{dln\ f(x)}{dlnx}$

ومنه : $E = f'(x).\frac{x}{f(x)}$

(المرونة = النسبة بين التغيير النسبي للتابع و التغيير النسبي للمتحول)

مثـــــال

اوجد (احسب) مرونة التكاليف بالنسبة للإنتاج عندما تكون كمية الإنتاج $x = 12$

إذا كانت دالة التكاليف هي : $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 10$

لدينـــــا :

$x = 12$

$$E = y'\ \frac{x}{y} = \cdots$$

8/ الـــدالة الأسية :

تعريف : الدالة الأسية ذات الأساس a $(a > 0)$ هي معرفة كما يلي :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto y = f(x) = a^x = e^{xln(a)}$$

هذه الدالة عبارة عن دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ومشتقتها كما يلي :

$$(a^x)' = \left(e^{xln(a)}\right)' = \ln(a)\, e^{xln(a)} = \ln(a)\, a^x$$

حالـــــة خاصـــة

الدالة الأسية ذات الأساس e

خصائص :

■ $e^0 = 1$

■$\forall\, x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$

■$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, e^{\ln(x)} = x$

■$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x \times e^y$

■$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

■$\forall\, x \in \mathbb{Z}, (e^x)^x = e^x \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

■$\forall\, (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

بعـــض النهـايـات المعـــــروفة :

■ $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 1}{\mathrm{x}} = 1$

■ $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{x}} = +\infty$

■ $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 0$

■ $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty;\ \alpha \in \mathbb{Z}$

قضيـــــة 1 :

من اجل كل عددين حقيقيين c وb لدينا :

$* \ 1^{\mathrm{b}} = 1$

$* \ x^{b+c} = x^b x^c, (x^b)^c = x^{bc}\ si\ x > 0$

إذا كان $x > 0$ و $y > 0$ لدينا:

$(xy)^c = x^c y^c$

إذا كان $x > 0$ لدينا:

$x^{-c} = \frac{1}{x^c}$

قضيـــــة 2 :

$$1/ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & si \quad \alpha < 0 \\ 1 & si \quad \alpha = 0 \\ +\infty & si \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

$$2/\ \lim_{x\to 0} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & si \quad \alpha < 0 \\ 1 & si \quad \alpha = 0 \\ 0 & si \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

النشـــــــر المحـــــدود :

تعريـــف:

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و I مجال من $\mathbb{R}$ يحوي x_0 ، $I \neq \{x_0\}$, ولتكن f دالة معرفة على I او $I \setminus \{x_0\}$

(f غير معرفة عند x_0) . لتكن $n \in \mathbb{N}$ ، تقول أن f تقبل نشر محدود من الرتبة n بجوار x_0

إذا وجد $a_n ,\dots ,a_1 ,x_0$ أعداد حقيقية و $\epsilon : I \to \mathbb{R}$

بحيث :

$$\forall\ x \in D, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a\,,, + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\ \epsilon\,(\propto)$$

مع $\lim_{x\to x_0} \epsilon\ (x) = 0$

من اجل x_0 معدوم نتحصل على نشر "ماك لوران"

مثـــــــال:

$$1/e^x{}_{x\to 0}\ \sum_{n=0}^{n} \frac{x^n}{x!} + 0(x^n)$$

$$2/\cos(x)_{x\to 0} = \sum_{n=0}^{n}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1})$$

$$3/\sin(x)_{x\to 0=} \sum_{n=0}^{n}(-1)^x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0(x^{2n+2})$$

$$4/(1+x)_{x\to 0}^{\propto} = \sum_{n=1}^{n} \propto \frac{(\propto-1)---(\propto-n+1)}{n!} x^{n+} + 0\,(x^n)$$

حـــالات خـــاصة:

لدينـــــا:

$$*\propto \geq \mathbf{0}$$

$$\propto \frac{(\propto -1)---(\propto -n+1)}{n!} = C_{\propto}^{n}$$

$$*\propto = -\mathbf{1}$$

$$\propto \frac{(\propto -1)---(\propto -n+1)}{n!} = (-1)^k$$

إذن:

$$\frac{1}{1+\mathrm{x}_{\mathrm{x}\to 0}} = \sum_{n=0}^{n}(-1)^k\ x^k + 0\,(x^k)$$

ونستنتج أيضا :

$$\frac{1}{1-x_{\mathrm{x}\to 0}} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{x}^{\mathrm{k}} + 0\left(\mathrm{x}^{\mathrm{k}}\right)$$

جامعة الحاج الأخضر
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مقياس الرياضيات
سنة أولى LMD

السلسلة 2

تمرين 1: عين مجموعة تعريف الدوال التالية : **-1** $f(x)=\sqrt{x^2-3x-4}$ ، **-2** $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}$ ،
-3 $f(x)=\ln(lnx)$ ، **-4** $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

تمرين 2: أحسب النهايات التالية : **-1** $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ ، **-2** $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}\right)$ ،
-3 $\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 0}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)$.

تمرين 3: أدرس استمرار التوابع التالية عند x_0 في كل حالة :

-a $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ مع $x_0=0$

-b هل الدالة f المعرفة بالشكل التالي :
$$f(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}$$
تقبل تمديدا بالاستمرار عند $x=1$ و $x=-1$.

تمرين 4: أحسب مشتقات التوابع التالية :
-1 $f(x)=\frac{cosx}{1+cos^2}$ ، **-2** $f(x)=x^{\sin x}$ ، **-3** $f(x)=\sqrt[x]{x}$ ، **-4** $f(x)=3^x.\sqrt{x^2+1}.cos^2x$

تمرين 5: بإستعمال قاعدة لوبيطال احسب النهايات التالية :

- 1 $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1+e^x}{x})$ ، **-2** $\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}x^2lnx)$

تمرين 6: عين القيم الحرجة للتابع التالي ثم اختبر شرط الرتبة الثانية لتعيين النهايات العظمى و الصغرى :

$$Y=x^4+36x^3+28x^2-17$$

تمرين 7: أحسب المشتق في كل من الدوال الضمنية التالية :

.1 $5x^4y^3-x^2+y=0$
.2 $3x^3+x^2\,log\,y-12=0$

تمرين 8: أحسب المشتقة من الرتبة n فيما يلي : **-1** $Y=\frac{1}{2x-3}$ ، **-2** $Y=sin^2x$

تمرين 9:
.1 أنشر التابع $f(x)=\frac{1}{2x-3}$ بجوار $x_0=2$ من الرتبة n مع كتابة باقي لاغرانج.

.2 أنشر التابع $f(x)=sin^2x$ بجوار الصفر من الرتبة n

الفصـــــــــــــل الثاني

الدوال ذات عدة متحولات

- مفاهيم عامة
- المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى
- المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية
- تفاضل الدوال ذات عدة متحولات
- القيم الحدية للدوال ذات عدة متحولات

الدوال ذات عدة متغيرات

مفاهيم عامة :

تعريف 1: نسمي دالة ذات عدة متغيرات حقيقية كل دالة معرفة من جزء E من $\mathbb{R}^n$ أو كل $\mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}$.

صورة نقطة M ذات الإحداثيات $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ هي عدد حقيقي نرمز له بـ : $f(M)$ أو $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ أي :

$$f : E \sqsubseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

مثال :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$$

تعريف 2: مجموعة تعريف دالة هي مجموعة *العناصر* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ من $\mathbb{R}^n$ التي لها صورة فعلية وفق f، و نرمز لها بـ: D_f (D_f هي جزء من $\mathbb{R}^n$ أو $\mathbb{R}^n$ كلها).

مثال :

-1
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \frac{xy}{x^2+y^2}$$ فإن :

$$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

-2
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$ فإن :

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 1\}$$

النهايات و الاستمرار :

تعريف 1: لتكن f معرفة *بجوار* M_0 $(M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0))$، ربما غير معرفة عند M_0.

نسمي :

$\lim_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ إن وجدت بنهاية f عند M_0.

مثال:

فإن ، $f(x,y) = (x^2+y^2)sin\frac{1}{xy}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

تعريف 2: نقول أن مستمرة عند x_0 إذا كانت :

1 - f معرفة عند $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

2 - $\lim_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\to(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)} f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$.

مثال :

$(x_0,y_0) = (0,0)$ ،

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sin\,\frac{1}{xy} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1- f معرفة عند (0,0) و لدينا :

$$-(x^2+y^2) \leq \left((x^2+y^2)sin\frac{1}{xy}\right) \leq (x^2+y^2)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(-(x^2+y^2)\right) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(+(x^2+y^2)\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

إذن f مستمرة عند (0,0) .

المشتقات الجزئية:

1 - المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى: إذا كان $Z = f(x,y)$ فإن المشتقات الجزئية من المرتبة الاولى هي:

$$f'_x(x,y) = Z'_x = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad و \quad f'_y(x,y) = Z'_y = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

إذا كان $Z = f(x,y,t)$ فإن المشتقات الجزئية لـ Z من المرتبة الاولى هي:

$$Z'_x = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad ، \quad Z'_y = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad ، \quad Z'_t = \frac{\partial Z}{\partial t}.$$

مثال :

1 - $Z = x^3 - 3xy^2$ فإن :

$Z'_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$ و $Z'_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = -6xy$

2 - $Z = x^2e^{-t} + xcosy$ فإن :

$Z'_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = 2xe^{-t} + cosy$ ، $Z'_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = -xsiny$ و

$Z'_t = \frac{\partial Z}{\partial t} = -x^2e^{-t}$.

-2 **<u>المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية :</u>** ليكن $Z = f(x,y)$ قابلا للتفاضل فإن $\frac{\partial Z}{\partial x}$ هي أيضا قابلة للتفاضل و نحصل على المشتقة الجزئية من الرتبة الثانية كما يلي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \quad و \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$$

و ايضا إذا كان $\frac{\partial Z}{\partial y}$ قابلا للتفاضل نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} \quad و \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$$

إذا كان التابع f و مشتقاته مستمرة فإن : $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$. في الحالة العامة المساواة غير صحيحة.

<u>مثال :</u>

$Z = x^3 - 3xy^2$ فإن :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = -6y \quad و \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = -6y$$

<u>التفاضل الكلي :</u>

العبارة : $d_xZ = d_x\, f(x,y) = Z_x'dx$ تسمى تفاضل التابع $Z = f(x,y)$ بالنسبة للمتغير : x، و نسمي : $d_yZ = d_y\, f(x,y) = Z_y'dy$ بتفاضل التابع $Z = f(x,y)$ بالنسبة للمتغير : y، و منه نحصل على التفاضل الكلي لـ : Z حسب العبارة التالية :

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial Z}{\partial y}\, dy = Z_x'dx + Z_y'dy \,.$$

<u>مثال :</u>

$Z = x^3 - 3xy^2$ فإن :

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad dx + \frac{\partial Z}{\partial y} \quad dy = (3x^2 - 3y^2)dx + (-6xy)dy$$

المشتق الكلي : إذا كان $Z = f(x,y)$ و كانت x و y تتعلقان بمتغير و ليكن t أي : $x = g\ (t)$ و $y = h(t)$ فإن المشتق الكلي لـ Z يكتب بالشكل التالي :

$$Z' = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = Z'_x . x' + Z'_y . y'$$

مثال :

$Z = xy + x$ حيث $x = sin$ و $y = cost$.

فإن : $$Z' = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = (y+1).cost - x.sint$$

الدوال المحدبة و الدوال المقعرة :

تعريف 1: لتكن E مجموعة جزئية من R^n. تكون E مجموعة محدبة إذا كان :

$$\forall\, x, y \in E,\ \forall \propto \in [0,1]\, ,\ \propto x + (1-\propto)y \in E$$

تعريف 2: f دالة معرفة على مجموعة E محدبة من R^n .

1 - f دالة محدبة (convexe) على E إذا كان من اجل كل $\propto \in [0,1]$ و من اجل كل $x, y \in E$ يكون :

$$f(\propto x + (1-\propto)y \leq \propto f(x) + (1-\propto)f(y)$$

إذا كانت المتراجحة اقل تماما (<) نقول أن f محدبة تماما.

2 - f دالة مقعرة (concave) على E إذا كان :

$$f(\propto x + (1-\propto)y \geq \propto f(x) + (1-\propto)f(y)$$

، $\forall\, x, y \in E,\ \forall \propto \in [0,1]$

إذا كانت المتراجحة اكبر تماما (>) نقول أن f مقعرة تماما.

ملاحظة :

1 - إذا كانت الدالة f محدبة فإن النقطة التي تحقق $\nabla f(x,y) = 0$ تعين نقطة حدية صغرى للتابع f. ($\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$)

2 - إذا كانت الدالة f مقعرة فإن النقطة التي تحقق $\nabla(x,y) = 0$ تعين نقطة حدية عظمى للتابع f.

أمثلية الدوال المتعددة المتغيرات (القيم الحدية للدوال المتعددة المتغيرات) :

تعريف: نقول عن التابع $Z = f(x,y)$ أنه يأخذ قيمة عظمى محلية $\bar{Z}$ من اجل القيم $(\bar{x},\bar{y})$ إذا كان تغيير قيمة أي واحد من المتغيرات يجعل قيمة الدالة Z أقل من قيمتها $\bar{Z}$ و بنفس الطريقة نعرف النهاية المحلية الصغرى للتابع.

الشرط اللازم و الكافي لوجود النهاية المحلية (العظمى و الصغرى) :

$Z = f(x,y)$ تقبل نهاية محلية في النقطة $a(a_1,a_2)$ إذا تحقق :

1 - $\frac{\partial Z}{\partial x}(a) = \frac{\partial Z}{\partial y}(a) = 0$ ، و يسمى بشرط المرتبة الأولى.

2 - شرط المرتبة الثانية :

- إذا كان : $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(a) > 0$ و $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(a) > 0$ و كان $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(a).\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(a) - \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}(a).\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}(a)>0$ نقول أن a تعين نهاية محلية صغرى.
- إذا كان : $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(a) < 0$ و $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(a) < 0$ و كان $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(a).\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(a) - \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}(a).\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}(a)>0$ نقول أن a تعين نهاية محلية عظمى.

ملاحظة 1: إذا كان $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(a).\frac{Z}{\partial y^2}(a) - \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}(a).\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}(a) < 0$ نسمي النقطة بنقطة سرج، أما إذا كان $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(a).\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(a) - \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}(a).\frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}(a) = 0$ فإن الاختبار غير حاسم.

ملاحظة 2: يمكن كتابة الشروط السابقة بالصيغة التالية : اي تكون a نهاية محلية للتابع $Z = f(x,y)$ إذا تحقق :

(1 $\nabla Z(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial Z}{\partial y}(a) \end{pmatrix} = 0$ أي $\frac{\partial Z}{\partial x}(a) = 0$ و $\frac{\partial Z}{\partial y}(a) = 0$.

(2 إذا كان $H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}(a) \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}(a) & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$ (Hessienne) و

- $tr\left(H_f(a)\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(a) > 0$ و $det\left(H_f(a)\right) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(a).\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(a) - \frac{\partial^2 Z}{\partial y\partial x}(a).\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}(a) > 0$ نقول أن a تعين نهاية محلية صغرى.

- $0 > tr\left(H_f(a)\right)$ و $det(H_f(a)) > 0$ نقول أن a تعين نهاية محلية عظمى.

مثال 1:

و $Z \in C^2$: لدينا $(x,y) \in R^2$ ، $Z = \frac{1}{3}x^3 + xy + y^2$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = x^2 + y = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = x + 2y = 0$$

فنحصل على النقاط الحرجة التالية : $(0,0)$ و $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.

و منه : $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- $H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ و منه $tr\left(H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right) = 3 > 0$ و $det\left(H_f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)\right) = 1 > 0$ اذن $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ تعين نهاية محلية صغرى.
- $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ و منه $tr\left(H_f(0,0)\right) = 2 > 0$ و $det\left(H_f(0,0)\right) = -1 < 0$ اذن $(0,0)$ نقطة سرج.

مثال 2: نأخذ التابع : $Z = x^2 + y^2 + t^2 - xy - xt$ ، لدينا :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 2x - y + t = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 2y - x = 0$$

$\frac{\partial Z}{\partial t} = 2t + x = 0$ ، فنحصل على النقاط

الحرجة $a = (0,0,0)$ و منه :

$$H_f(x,y,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial x} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial t} & \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial t} & \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$H_f(0,0,0)$

لنحسب :

$$det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2-2)=0$$

فنحصل على $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 2+\sqrt{2}$ و $\lambda_3 = 2-\sqrt{2}$. بما أن $\lambda_i > 0$ من اجل $i = 1,2,3$ فإن التابع Z يقبل نهاية حدية صغرى عند النقطة $(0,0,0)$ و هي صغرى كلية.

ملاحظة : إذا كانت $\lambda_i < 0$ من اجل كل i فإن التابع Z يقبل نهاية حدية عظمى عند النقطة a و هي عظمى كلية.

النهايات الحدية المقيدة بقيود التساوي (مضاعف لاغرانج (Lagrange)) :

إذا كانت الدالة $Z = f(x,y)$ خاضعة للقيد $g(x,y) = 0$ فإنه يمكن كتابة المسألة بالشكل :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

و تسمى الدالة $L(x,y,\lambda)$ بدالة لاغرانج حيث $f(x,y)$ تسمى بدالة الهدف و $g(x,y)$ هو القيد الذي وضع مساويا للصفر و بالتالي اضافة $\lambda g(x,y) = 0$ لا تغير من قيمة دالة الهدف.

مثال: لتكن المسألة :

$$\begin{cases} Z = xy^2 \\ \text{تحت القيد} \\ x-y=1 \end{cases}$$

تعيين القيم الحدية و بيان نوع كل منها, لدينا :

$L(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(1-x+y)$ و منه :

$$\begin{cases} L'_x = y^2-\lambda = 0 \\ L'_y = 2xy+\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 1-x+y = 0 \end{cases}$$

و منه نحصل على نقطتين حرجتين هما : $(1,0,0)$ و $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{9})$.

اختبار النقطتين الحرجتين و لذلك يجب حساب :

$H_L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y & -1 \\ 2y & 2x & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و منه :

- $\det(H_L(1,0,0)) = det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$ ، إذن النقطة (1,0,0) تعين نهاية حدية صغرى للمسألة و $\min(xy^2) = 0$.
- $\det(H_L(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{9})) = det\begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 > 0$ ، إذن النقطة $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{9})$ تعين نهاية حدية عظمى للمسألة و $\max(xy^2) = \frac{4}{27}$.

النهايات الحدية المقيدة بقيود التباين :

نظرية : (شروط كون تاكر) (Karush, Kuhn et Tucker)

إذا كان التابع $Z = f(x,y)$ الخاضع للقيود $g_i(x,y) \leq 0$ حيث $i = 1, \dots, m$ ، قابلة كلها للاشتقاق باستمرار، فإن الشرط اللازم حتى تكون (x_0,y_0) نهاية حدية حسب (K.K.T) هو : يوجد $\lambda_i \geq 0$ ، $i = 1, \dots, m$ تسمي مضاعفات لاغرانج بحيث :

$$(\boldsymbol{K.K.T}) \begin{cases} \nabla f(x_0,y_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_0,y_0) = 0 \\ \lambda_i g_i(x_0,y_0) = 0\,,\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

إذا كان f و g_i محدبة فإن الشروط السابقة تكون لازمة و كافية لـ (x_0,y_0) حتى تكون (x_0,y_0) نقطة حدية كلية.

مثال: حل المسألة التالية :

$$\begin{cases} \min Z = x^2 + 3y \\ \text{تحت القيد} \\ 2x - y \leq -3 \end{cases}$$

، أي أن $g(x,y) = 2x - y + 3 \leq 0$

و منه :

$$(\boldsymbol{K.K.T}) \begin{cases} 2x + 2\lambda = 0 \\ 3 - \lambda = 0 \\ \lambda(2x - y + 3) = 0 \end{cases}$$

فنحصل على : $x_0 = y_0 = -3$ و $min(x^2 + 3y) = 0$ و ذلك من اجل $\lambda = 3$.

جامعة العقيد الحاج الأخضر **مقياس الرياضيات**
كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير **سنة أولى LMD**

السلسلة 3

تمرين 1: أحسب التفاضل الكلي للتوابع التالية :

.1 $Z = yx^y$ ، **.2** $Z = xy^t$ ، **.3** $Z = x^y y^t t^{x^2}$ ، **.4** * $Z = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^t$.

تمرين 2:

.1 * بفرض أن : $Z = xy + xe^{y/x}$ برهن أن : $x\frac{\partial Z}{\partial x} + y\frac{\partial Z}{\partial y} = xy + Z$.

.2 بفرض أن : $Z = \frac{xy^2}{x+y}$ برهن أن : $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 Z}{\partial y . \partial x} = \frac{6xy^2}{(x+y)^3}$.

تمرين 3: أحسب المشتقات الكلية للتوابع التالية :

.1 $Z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad / \quad x = \cos t \ , \ y = \sin t$.

.2 $Z = x^y \quad / \quad x = e^{-t} \ , \ y = e^t$.

تمرين 4: أدرس النهايات المحلية (النهايات الحدية) للتابع Z ثم أحسب قيمته عند هذه النقاط :

.1 * $Z = 5x^2 - 8x - 2xy - 6y + 4y^2 + 27$.

.2 * $Z = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y$.

.3 $Z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

.4 $Z = e^{x^2+y^2}$.

تمرين 5: باستعمال دالة لاغرانج عين القيم الحدية للتوابع التالية ثم أحسب قيمة Z :

.1 * $\begin{cases} Z = x^2 + y^2 - xy + x + y \\ \text{S.C} \quad x + y = -3 \end{cases}$.

.2 $\begin{cases} Z = x^2 + y^3 \\ S.C \quad 2x - 2y = -1 \end{cases}$

ملاحظة: الأسئلة التي عليها * تترك للطلبة .

الفصـــــــــــل الثالث

التكـــــــامل والتفـــــــاضل

- ❖ **التفاضل**
- ❖ **التكامل**

التفاضل

نعلم أنه إذا كان التابع :$y = f(x)$ فان مشتق هذا التابع هو: $f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

حيث dy هو تفاضل التابع وdx تفاضل المتحول هذا يعني أن $dy = f'(x).dx$

I. **تفاضل أي تابع** ما هو إلا حاصل جداء مشتق هذا التابع في تفاضل المتحول المتعلق به.

مثال : تفاضل التابع $y = x^2 + 2x - 1$

هو : $dy = (2x + 2)dx$

II. تفاضل تابع التابع:

ليكن التابع $y = f(u)$ حيث $u = g(x)$

نعلم أن مشتق التابع y بالنسبة ل x هو: $y'_x = f'_u(u).u'_x$

بضرب الطرفين في dx نحصل على: $y'_x dx = f'_u(u).u'_x.dx$

و منه: $dy = f'_u(u).du$

III. خواص التفاضل:

1) $d(u + v + w) = du + dv + dw$

2) $d(u.v) = v.du + u.dv$

3) $d(c.u) = c.du$ حيث c ثابت

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ حيث $v \neq 0$

حيث u, v, w هي توابع قابلة للمفاضلة بالنسبة لمتغير ما x

IV. التفاضلات المتتالية:

ليكن التفاضل : $dy = y'dx$ حيث نعتبر دوما dx ثابتا اختياريا في جميع الحسابات.

فإذا فاضلنا هذا التركيب حصلنا على التفاضل الثاني ونرمز له ب d^2y أي:

$$d(dy) = (y'dx)dx$$

$$d^2y = y''.dx.dx = y''.dx^2$$

و هكذا فإن

$$d^3y = y'''.dx^3$$

.

.

.

$$d^ny = y^{(n)}dx^n$$

مثال: أوجد التفاضل من المرتبة الثالثة للتابع $y = 2x^4 - x + 1$

فإن : $d^3y = 48x.dx^3$

ملاحظة: $dx^2 = dx.dx$ أي كمية مربعة بينما d^2y هو رمز.

التكامل

-**التابع الأصلي:** درسنا سابقا كيف نجد التابع المسمى مشتق تابع مفروض ونأتي الآن لدراسة المسألة العكسية وهي كيفية إيجاد تكامل تابع مشتقه تابع معلوم.

تعريف: التابع الأصلي للتابع $f(x)$ هو ذلك التابع $F(x)$ الذي مشتقه يساوي التابع المعطى $f(x)$ أي:

$F'(x) = f(x)$ و يسمى $F(x)$ بالتابع الأصلي لـ $f(x)$.

مثال: ما هو التابع الأصلي للتابع $y = x$

نلاحظ أن $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$ وهكذا فإن $\frac{x^2}{2}$ هو التابع الأصلي للتابع $y = x$ إلا أننا نلاحظ أن هذا

ليس وحيدا فنجد مثلا : $\frac{x^2}{2} + 3, \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}, \dots$ وهي توابع أصلية للتابع

$y = x$ و بشكل عام يمكننا أن نكتب $\frac{x^2}{2} + c$ حيث c ثابت كيفي

وهكذا فإن لكل تابع مستمر يوجد لا نهاية من التوابع الأصلية التي تختلف عن بعضها

البعض بمقدار ثابت اختياري فإذا كان $F(x)$ هو احدها فإن مجموعة التوابع الأصلية

لـ $f(x)$ هي $F(x)+c$ حيث يكون محققا: $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$

التكامل غير المحدد

تعريف: نسمي عملية البحث عن التابع الأصلي بالمكاملة غير المحددة . أما العبارة التي تمثل التابع الأصلي لـ $f(x)$ فتسمى التكامل غير المحدد للتابع $f(x)$ ونرمز لها بـ $\int f(x).dx$ ونسمى $f(x)$ التابع المكامل أما x فيسمى متغير المكاملة، ونكتب: $\int f(x)dx = F(x) + c$

التكامل المحدد

التكامل المحدد هو حساب المساحة المحصورة تحت المنحنى $y=f(x)$ عندما يكون مجال تغير x هو $a \leq x \leq b$.

ولقد بقيت مسألة حساب المساحة المحصورة داخل المنحنى صعبة جدا، حتى جاءت التكامل المحدد للعالم

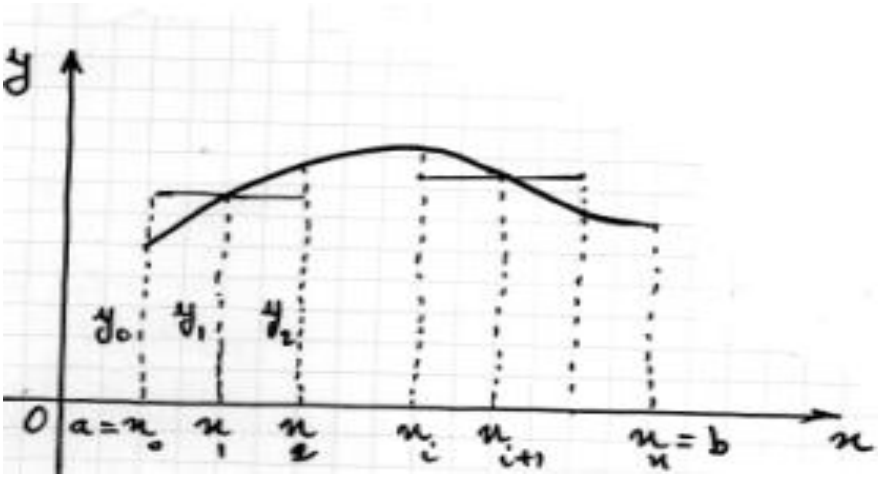
ريمان الذي حل هذه المشكلة .

فإذا كان المطلوب حساب المساحة المحصورة بين المحور الأفقي ox والمستقيمين $x=b$ و $x=a$

و المنحنى الذي معادلته $y=f(x)$، فإننا نقسم المجال $[a,b]$ بعدد من النقط x_i إلى عدد x من المجالات الجزئية بحيث :

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

إذا حسبنا الآن مجموع مساحات المستطيلات المبينة في الشكل حصلنا على قيمة تقريبية للمساحة S



فإذا ازداد عدد نقط التقسيم إلى مالا نهاية بحيث ينتهي طول مجال جزئي إلى الصفر وانتهى عندئذ مجموع مساحات المستطيلات إلى نهاية محدودة. فإن هذه النهاية تمثل المساحة المطلوبة و نعبر عن ذلك بالشكل :

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\Delta x_i$$

وبأخذ نهاية المجموع عندما $\Delta x_i \to 0$ ونجد:

$$S' = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\Delta x_i$$

تعريف : نسمي النهاية S' (إن ونجدت) التكامل المحدد للتابع $f(x)$ من a إلى b و نعبر عن ذلك بالشكل

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).\Delta x_i$$

و نسمي a , b حدي التكامل الأدنى و الأعلى على الترتيب.

مثال: أحسب التكامل $\int_3^5 x.\mathrm{dx} = \left[\frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_3^5 = \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = 8$

خواص التكامل المحدد

إذا كان g(x),f(x) دالتين مستمرتين في مجال التغيير $a \le x \le b$ فإن:

1. $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x).\mathrm{dx} = -\int_{\mathrm{b}}^{\mathrm{a}} f(x).\mathrm{dx}$
2. $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} f(x).\mathrm{dx} = 0$
3. $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x).\mathrm{dx} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}} f(x).\mathrm{dx} + \int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}} f(x).\mathrm{dx} \;,\; c \in [a,b]$
4. $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} [\alpha f(x) \pm \beta g(x)].\mathrm{dx} = \alpha \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x).\mathrm{dx} \pm \beta \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} g(x).\mathrm{dx}$

حيث α,β ثابتان

5. إذا كان $f(x) \ge 0 \,,\forall x \in [a,b]$

   فإن $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x).\mathrm{dx} \ge 0$
6. إذا كان $f(x) \le g(x) \,,\forall x \in [a,b]$

   فإن $\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x).\mathrm{dx} \le \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} g(x).\mathrm{dx}$
7. $\left|\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x).\mathrm{dx}\right| \le \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} |f(x)|.\mathrm{dx} \;,\; a<b$
8. إذا كان $m \le f(x) \le M \,,\forall x \in [a,b]$

   فإن: $m(b-a) \le \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x).\mathrm{dx} \le M(b-a)$

التكامل غير المحدد : كتبنا في السابق أن : $\int f(x).\mathrm{dx} = F(x) + c$ ويقرأ الطرف الأيسر التكامل غير المحدود للتفاضل $f(x).\mathrm{dx}$ ويسمى العدد الثابت c الموجود في الطرف الثاني بثابت التكامل.

ملاحظة : إذا أعطينا المشتق فإن $y' = f(x)$ فإن تابعه الأصلي $F(x) + c$، وإذا أعطينا التفاضل فإن تكامله : $y = \int f(x).\mathrm{dx} = F(x) + c$

التكاملات الشهيرة:

1) $\int x^n.\mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{\mathrm{n}+1} + \mathrm{c} \,,\forall \mathrm{n} \setminus \mathrm{n} \ne -1$

2) $\int (ax+b)^n.\mathrm{dx} = \frac{(ax+b)^{n+1}}{\mathrm{a}(\mathrm{n}+1)} + \mathrm{c}\,,\; \mathrm{a} \ne 0,\; \forall \mathrm{n} \setminus \mathrm{n} \ne -1$

3) $\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} = \log|\mathrm{x}| + \mathrm{c}$

4) $\int e^x.\mathrm{dx} = e^x + c$

5) $\int a^x.\mathrm{dx} = \frac{a^x}{loga} + c \backslash a > 0$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

7) $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + c$

8) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + c$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = argsh\ x + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = argch\ x + c$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$

12) $\int \frac{dx}{1-x^2} = argthx + c = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

13) $\int \sin x\,.\mathrm{dx} = -\cos x + c, \int \cos x\,.\mathrm{dx} = \sin x + c$

14) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + c\ , \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -cotg\ x + c$

15) $\int \mathrm{ch}\, x\,.\mathrm{dx} = \mathrm{sh\ x} + \mathrm{c}\ ,\ \int \mathrm{sh}\, x\,.\mathrm{dx} = \mathrm{ch\ x} + \mathrm{c}$

16) $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = th\ x + c,\ \int \frac{dx}{x+a} = log|x+a| + c$

17) $\int \mathrm{tg}\, x\,.\mathrm{dx} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{dx} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\log|\cos x| + c$

18) $\int \mathrm{ctg}\, x\,.\mathrm{dx} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{dx} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -\log|\sin x| + c$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

20) $\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + c$

21) $\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

خواص التكاملات غير المحدودة :

1. يمكن إخراج عامل ثابت من تحت إشارة التكامل أو بالعكس دون أن تتغير النتيجة أي : $\int Af(x).\mathrm{dx} = \mathrm{A}\int f(x).\mathrm{dx}$, حيث A ثابت.
2. تكامل المجموع الجبري لعدة توابع يساوي المجموع الجبري لتكاملات هذه التوابع أي:

$$\int (f(x) \pm g(x)).\mathrm{dx} = \int f(x).\mathrm{dx} \pm \int g(x).\mathrm{dx}$$

الطرق العامة في الاستكمال :

لاستكمال تابع علينا في البداية أن ننظر لصيغته فربما كان يمثل مشتقا لتابع معلوم فإن كان الأمر كذلك استنتجنا تابعه الأصلي وإلا فإننا نعتمد على بعض الطرق التي ترجع التكامل المفروض تكامل معروف

وأهم هذه الطرق اثنتان:

1. طريقة تغيير المتحول "التكامل بالتعويض"

لحساب التكامل $I=\int f(x).\mathrm{dx}$ نجري تحويلا مناسبا للمتغير الذي تتم المكاملة بالنسبة له فنضع $\mathrm{x}=\varphi(\mathrm{t})$ حيث $\varphi(\mathrm{t})$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق، عندئذ : $dx=\varphi'(\mathrm{t}).\mathrm{dt}$ و بالتعويض في التكامل نجد $I=\int f(x).\mathrm{dx}=\int f(\varphi(\mathrm{t})).\varphi'(\mathrm{t}).\mathrm{dt}$

بعد إيجاد التكامل نعوض $\varphi(\mathrm{t})$ ب x.

مثال (1): أحسب التكامل

$$I=\int\frac{3\mathrm{dx}}{5x-1}$$

بفرض أن $t=5x-1$ $\Leftarrow$ $dt=5d$

$$dx=\frac{\mathrm{dt}}{5}$$

إذن

$$\mathrm{I}=\frac{3}{5}\log|\mathrm{t}|+\mathrm{c}=\frac{3}{5}\log|5\mathrm{x}-1|+\mathrm{c},(\log=\ln)$$

مثال 2: أحسب التكامل

$$I=\int\sqrt{1-x^2}.dx$$

بما أن x لا يمكن أن تتجاوز 1 لذلك يمكن أن نفرض $x=\sin t \Leftarrow t=arc\sin x$ و منه $dx=\cos t.dt$

$$I=\int\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t.dt=\int\cos t.\cos t.dt$$

$$=\int\cos^2 t.dt=\int\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}.\frac{\sin 2t}{2}+c=\frac{arc\sin x}{2}+\frac{2\sin t\cos t}{4}+c$$

$$=\frac{arc\sin x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+c$$

2. طريقة التكامل بالتجزئة:

إذا كان العنصر التفاضلي في التكامل $I=\int f(x).\mathrm{dx}$ من الشكل $u.dv$ أو يمكن وضعه بهذا الشكل حيث u تابع و v تابع آخر، فيمكن الاستفادة من دستور تفاضل جداء تابعين :

$$d(u.v)=u.dv+vdu$$

حيث يمكن كتابته بالشكل:

$$u.dv=d(u.v)-vdu$$

وبأخذ تكامل الطرفين نحصل على القانون:

$$\int u.dv=u.v-\int vdu$$

و بهذه الطريقة نكون قد انتقلنا من حساب التكامل $\int u.dv$ الذي يكون عادة أقل صعوبة من الأول إذا أحسنا اختيار التابعين u,v.

تستعمل هذه الطريقة كثيرا لاسيما في الحالات الآتية:

- ✓ **الحالة الأولى:** إذا كان التكامل من الشكل: $I=\int x^n.e^{ax}.dx$

نفرض $\begin{cases}u=x^n\Rightarrow du=nx^{(n-1)}.dx\\ dv=e^{ax}.dx\Rightarrow v=\frac{1}{a}e^{ax}\end{cases}$

مثال: أحسب التكامل $I=\int x.e^x.dx$

$$\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=e^x.dx\Rightarrow v=e^x\end{cases}$$

$$I=xe^x-\int e^x.dx=xe^x-e^x+x=x(x-1)+c$$

- ✓ **الحالة الثانية:** إذا كان التكامل من الشكل:

$$\int x^n.\sin wx.\mathrm{dx} \quad \text{او} \quad \int x^n.\cos wx.\mathrm{dx}$$

نفرض $\begin{cases}u=x^n\Rightarrow du=n.x^{(n-1)}.dx\\ dv=\cos wx.dx\Rightarrow v=\frac{\sin wx}{w}\end{cases}$

مثال: أحسب التكامل: $I=\int x.\sin 2x.\mathrm{dx}$

$$\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=\sin 2x.dx\Rightarrow v=-\frac{\cos 2x}{2}\end{cases}$$

$$I=\int x.\sin 2x.\mathrm{dx}=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x.\mathrm{dx}$$

$$=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+c$$

✓ **الحالة الثالثة:** إذا كان التكامل من الشكل: $I=\int x^n.\log x\,.\,dx$

أي إذا كان العنصر التفاضلي يتضمن تابعا غير عادي مثل $\log x$, $\arcsin x$, …..

و كان مشتقه تابعا جبريا، في هذه الحالة نفرض

$$\begin{cases} u=\log x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^n.dx \Rightarrow v=\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

مثال: أحسب التكامل: $I=\int x.\log x\,.\,dx$

نفرض
$$\begin{cases} u=\log x \Rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ dv=x.dx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$I=\int x.\log x\,.\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{2}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+c=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+c$$

مثال: أحسب التكامل: $I=\int x.arctg\,x\,.\,\mathrm{dx}$

نفرض
$$\begin{cases} u=arctgx \Rightarrow du=\frac{dx}{x^2+1} \\ dv=x.dx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$I=\int x.arctg\,x\,.\,\mathrm{dx}=\frac{x^2}{2}\,arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2.}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\,arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}\,arctgx-\frac{1}{2}\int\mathrm{dx}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$
$$=\frac{x^2}{2}\,arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\,arctgx+c$$

✓ **الحالة الرابعة:** إذا كان التكامل من الشكل:

$\int e^{ax}.\cos wx\,.\,\mathrm{dx}$ او $\int e^{ax}.\sin wx\,.\,\mathrm{dx}$

نفرض
$$\begin{cases} u=e^{ax} \Rightarrow du=a.e^{ax}.dx \\ dv=\cos wx\,.\,dx \Rightarrow v=\frac{\sin wx}{w} \end{cases}$$

مثال: أحسب التكامل: $I=\int e^x.\cos 2x\,.\,\mathrm{dx}$

نفرض
$$\begin{cases} u=e^x \Rightarrow du=e^x.dx \\ dv=\cos 2x\,.\,dx \Rightarrow v=\frac{\sin 2x}{2} \end{cases}$$

$$I=e^x.\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\underbrace{\int e^x.\sin 2x\,.\,\mathrm{dx}}$$

نضع $I_1 = \int e^x . \sin 2x . \mathrm{d}x$

و منه نفرض
$$\begin{cases} u_1 = e^x \Rightarrow du_1 = e^x . dx \\ dv_1 = \sin 2x . dx \Rightarrow v_1 = -\frac{\cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$I_1 = \int e^x . \sin 2x . \mathrm{d}x = -e^x . \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{\int e^x . \cos 2x . \mathrm{d}x}_{= \mathrm{I}}$$

$$I = e^x . \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\left[-e^x . \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\right]$$

$$\frac{5}{4} I = e^x . \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{4} e^x . \cos 2x$$

$$I = \frac{4}{5} . \frac{1}{2} e^x . \sin 2x + \frac{4}{5} . \frac{1}{4} e^x . \cos 2x + c$$

$$= \frac{e^x}{5} (2 \sin 2x + \cos 2x) + c$$

✓ **الحالة الخامسة:** إذا كان التكامل من الشكل: $\mathrm{I_n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$

لإنجاز هذا التكامل ما يسمى بطريقة التراجع، أي لحساب التكامل نبدأ بحساب $\mathrm{I_1}$

$$\mathrm{I_1} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^1} = arctg\, x + c$$

حتى نصل إلى حساب $\mathrm{I_n}$ وذلك بإيجاد علاقة تربط بين $\mathrm{I_n}$ و $\mathrm{I_{n-1}}$ من تطبيق دستور التجزئة على التكامل

$$\mathrm{I_{n-1}} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

نضع

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \Rightarrow du = \frac{2(1-n)x . dx}{(1+x^2)^n} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\mathrm{I_{n-1}} = \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2 . dx}{(1+x^2)^n}$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^n} dx$$

$$= \frac{x}{(1+\ x^2)^{n-1}} + 2(n-1)\left[\int \frac{dx}{(1+\ x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(1+\ x^2)^{n}}\right]$$
$$= \frac{x}{(1+\ x^2)^{n-1}} + 2(n-1)[\mathrm{I}_{\mathrm{n}-1} - \mathrm{I}_{\mathrm{n}}]$$
إذن: $\mathrm{I}_{\mathrm{n}} = \frac{2\mathrm{n}-3}{2(\mathrm{n}-1)}.\mathrm{I}_{\mathrm{n}-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \mathrm{c}$

مثال: أحسب التكامل

$$\mathrm{I}_3 = \int \frac{dx}{(1+\ x^2\ )^3}$$
$$\mathrm{I}_3 = \frac{2.3-3}{2(3-1)}.\mathrm{I}_2 + \frac{x}{2(3-1)(1+\ x^2)^2}$$
$$= \frac{3}{4}\mathrm{I}_2 + \frac{x}{4(1+\ x^2)^2}$$
$$\mathrm{I}_2 = \frac{2.2-3}{2(2-1)}.\mathrm{I}_1 + \frac{x}{2(2-1)(1+\ x^2)}$$
$$= \frac{1}{2}arctgx + \frac{x}{2(1+\ x^2)}$$

إذن

$$\mathrm{I}_3 = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}arctgx + \frac{x}{2(1+\ x^2)}\right] + \frac{x}{4\ (1+\ x^2\ )^2}$$

$$\mathrm{I}_3 = \frac{x}{4\ (1+\ x^2\ )^2} + \frac{3x}{8(1+\ x^2)} + \frac{3}{8}arctgx + c$$

✓ **الحالة السادسة:** إذا كان التكامل من الشكل: $I = \int \cos^{\mathrm{n}} x\,.\mathrm{dx}$ او $I = \int \sin^{\mathrm{n}} x\,.\mathrm{dx}$

في هذه الحالة يكتب التكامل بالشكل $\cos^2 x$

نفرض
$$\begin{cases} u = \cos^{\mathrm{n}-1} x \Rightarrow du = \cdots \\ dv = \cos x\,.dx \Rightarrow v = \cdots \end{cases}$$

مثال :أحسب التكامل $I = \int \cos^3 x\,.\mathrm{dx}$

$$I = \int \cos^2 x.\cos x\,.\mathrm{dx}$$

نفرض
$$\begin{cases} u = \cos^2 x \Rightarrow du = -2\cos x.\sin x.dx \\ dv = \cos x\,.dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$$
$$I = \sin x\,.\cos^2 x + 2\int \cos x.\sin^2 x\,.\mathrm{dx}$$

$$= \sin x \,.\cos^2 x + 2\int \sin^2 x \,.\mathrm{d}(\sin x)$$

$$I = \sin x \,.\cos^2 x + \frac{2}{3}\sin^3 x + c$$

أو بطريقة تغيير المتحول $I = \int (1-\sin^2 x).d(sinx)$

نفرض $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x.dx$

$$I = \int (1-u^2).du = u - \frac{u}{3} + c = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

ملاحظة : لإيجاد التكملات قد تختلف الأجوبة شكلا باختلاف الطرق المتبعة ولكن هذه الأجوبة متكافئة فيما بينها.

تكامل الكسور الناطقة

نقصد بالكسر الناطق كسرا بسطه ومقامه كثير حدود ونرمز له ب $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، واستكمال الكسر الناطق يعتمد في الدرجة الأولى على تفريقه إلى كسور بسيطة من الشكل $\frac{A}{(x-a)^n}$ أو من الشكل $\frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^r}$ حيث n, r عددان موجبان صحيحان.

ويشترط في الكسر الثاني أن يكون مقامه من الدرجة الثانية (كثير حدود) لا يقبل جذورا حقيقية.

بعض الحالات الخاصة :

✓ **الحالة الأولى:** إذا كان التكامل من الشكل

$$I = \int \frac{dx}{k^2 + x^2}$$

في هذه الحالة نكتب التكامل من بالشكل

$$I = \frac{1}{k}\int \frac{\frac{dx}{k}}{1+\frac{x^2}{k^2}} = \frac{1}{k}\int \frac{\frac{1}{k}dx}{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2} = \frac{1}{k}arctg\,\frac{x}{k} + c$$

✓ **الحالة الثانية:** إذا كان التكامل من الشكل

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

حيث المقام لا يقبل جذورا حقيقية.

في هذه الحالة نضيف و نطرح المقدار لإتمام إلى مربع كامل، وبعد الإصلاح يصبح المقام على شكل مجموع مربعي حدين أي :

$$I=\int \frac{dx}{\mathrm{x}^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$$

$$=\int \frac{dx}{\left(\mathrm{x}+\left(\frac{p}{2}\right)\right)^2+k^2} / \mathrm{k}^2=\mathrm{q}-\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

نفرض $u=\mathrm{x}+\left(\frac{p}{2}\right) \Leftarrow du=dx$ وبالتالي فإن:

$$I=\int \frac{du}{\mathrm{k}^2+u^2}=\frac{1}{k} arctg\ \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{k}}+\mathrm{c}$$

مثال: أحسب التكامل:

$$I=\int \frac{dx}{\mathrm{x}^2-2x+5}$$

نضع $u=\mathrm{x}-1 \Leftarrow du=dx$ ومنه

$$\mathrm{I}=\int \frac{dx}{(\mathrm{x}-1)^2+4^2}=\frac{1}{2} arctg\ \frac{\mathrm{u}}{2}+\mathrm{c}$$

$$=\frac{1}{2} arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+\mathrm{c}$$

✓ **الحالة الثالثة:** إذا كان التكامل من الشكل

$$I=\int \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{x^2+px+q} dx$$

حيث المقام لا يقبل جذورا حقيقية.

نفرض $u=x^2+px+q \Leftarrow du=(2x+p)dx$

ومنه

$$xdx=\frac{du-pdx}{2}$$

بالتعويض نجد:

$$I=\int \frac{\mathrm{A}\frac{du-pdx}{2}+\mathrm{B}dx}{\mathrm{u}}$$

يكتب هذا التكامل بالشكل

$$I=\frac{A}{2}\int\frac{du}{u}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2\ +px+q}$$
$$I=\frac{A}{2}\log(x^2\ +px+q)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2\ +px+q}$$
و التكامل الموجود في الطرف الأيمن لقد عالجنه في الحالة الثانية .

مثال: أحسب التكامل :
$$I=\int\frac{2x+1}{x^2\ -2x+5}dx$$
نفرض $u=x^2\ -2x+5 \Rightarrow du+2dx=2xdx$

بالتعويض نجد:
$$I=\int\frac{du+2dx+dx}{\mathrm{u}}=\int\frac{du}{u}+3\int\frac{dx}{x^2\ -2x+5}$$
$$=\log(x^2\ -2x+5)+\frac{3}{2}arctg\left(\frac{x-1}{2}\right)+\mathrm{c}$$
ملاحظة : إذا كان المقام $x^2\ +px+q$ في الحالتين الثانية و الثالثة يقبل جذرين حقيقين فسنرى أن كلا الكسرين يحلل إلى مجموع كسرين مقام كل منهما من الدرجة الأولى وينجز تكاملها بسهولة

تفريق كسر ناطق إلى مجموع كسور بسيطة.

ليكن الكسر الناطق $\frac{F(x)}{\mathrm{g}(x)}$ لتفريقه إلى مجموع كسور بسيطة، فلتفريقه إلى مجموع كسور بسيطة , ننظر إلى هذا الكسر فإن كانت قوة البسط أكبر أو يساوي قوة المقام فإننا نقسم البسط على المقام و يكتب هذا الكسر بالشكل:
$$\frac{F(x)}{\mathrm{g}(x)}=\mathrm{Q}(x)+\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$$
حيث $\mathrm{Q(x)}$ حاصل القسمة، $f(x)$ الباقي ، وتكون درجته اقل من درجة المقام بدرجة واحدة على الأقل.

ونلاحظ أن استكمال الكسر $\frac{F(x)}{\mathrm{g}(x)}$ يؤول إلى استكمال الكسر $\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$ لأن تكامل كثير الحدود سهل و معروف.

مثال: أحسب التكامل :
$$I=\int\frac{x^4-x^3+1}{x-\ 1}dx$$
$$I=\int\left(x^3-\frac{1}{x-\ 1}\right)dx=\int x^3\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x-\ 1}dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \log|x - 1| + c$$

ولكي نجد التكامل $\frac{f(x)}{g(x)}$ يجب أن نحلل $g(x)$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى وعوامل من الدرجة الثانية ليس لها جذور حقيقية.

ونميز الحالات الآتية:

- **الحالة الاولى:** إذا كانت عوامل المقام جميعها من الدرجة الأولى وغير مكررة مثل $(x - a)$ يوافقه كسر بسيط من الشكل $\frac{A}{x-a}$ حيث A عدد ثابت.

مثال :فرق الكسر إلى مجموع كسور بسيطة :

$$Y = \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}$$

و يكتب بالشكل

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

بعد توحيد المقامات في الطرف الأيمن ومقارنة البسط الناتج في الطرف الأيسر مع بسط الطرف الأيمن وإيجاد قيم A, B, C $\left(A = -\frac{3}{2}, B = \frac{5}{3}, C = -\frac{1}{6}\right)$

ومنه

$$Y = -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$$

- **الحالة الثانية:** إذا كانت عوامل المقام جميعها من الدرجة الأولى و بعضها مكرر، في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الأولى و مكرر , n مرة مثل $(x - a)^n$ يوافقه مجموع n كسربسيطا من الشكل :

$$\frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{x-a}$$

حيث $A_1, A_2, \dots, _n$ أعداد ثابتة.

مثال :فرق الكسر الآتي إلى مجموع كسور بسيطة : $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$

لدينا

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

بتوحيد المقامات في الطرف الأيمن وأجزاء المقارنة مع الطرف الأيسر نجد

$$(A = -1, B = 2, C = 1, D = 2)$$

أي :

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}$$

- **الحالة الثالثة:** إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الثانية وغير مكررة مثل x^2+px+r في يوافقه كسربسيط من الشكل :

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

مثال : فرق الكسر الآتي إلى كسور بسيطة :

$$\frac{4}{x(x^4+4)}$$

و يكتب هذا الكسر بالشكل:

$$\frac{4}{x(x^4+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^4+4)}$$

بتوحيد المقامات و المقارنة نجد :

$$(A=1,B=-1,C=0)$$

إذن:

$$\frac{4}{x(x^4+4)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^4+4)}$$

- **الحالة الرابعة:** إذا كانت عوامل المقام من الدرجة الثانية الأولى و بعضها مكرر، في هذه الحالة كل عامل من الدرجة الثانية و مكرر n مرة مثل $(x^2+px+r)^n$ يوافقه مجموع n كسربسيط من الشكل :

$$\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+r)^n}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+r)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{x^2+px+r}$$

مثال : فرق الكسر الآتي إلى كسور بسيطة:

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+2)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)}$$

بتوحيد المقامات و المقارنة نجد :

$$(A=-2,B=0,C=1,D=1)$$

$$\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}+\frac{x+1}{(x^2+2)}$$

تكامل التوابع المثلثية (الدائرية)

الطريقة العامة : ليكن التكامل : $\int f(\sin x,\cos x,tg\ x)\,dx$ فالطريقة العامة لحسابه هي وضعه على شكل تكامل كسري ناطق وذلك بالتعبير عن النسب المثلثية بدلالة $tg\ \frac{x}{2}$.

نفرض $t=tg\ \frac{x}{2}\Leftarrow x=2arctg\ t\Leftarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

ثم نستبدل النسب المثلثية بقيمها حسب الدساتير: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, tg\ x = \frac{2}{1-t^2}$

ملاحظة : $x = arctgtg\ x, x = \arcsin(\sin x)\,, x = \arccos(cosx)$

مثال: أحسب التكامل :

$$I = \int \frac{\sin x\,.dx}{1+\sin x} = \int \frac{\sin x + 1 - 1}{1+\sin x}dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+\sin x}$$

نفرض $t = tg\ \frac{x}{2} \Leftarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}\,, (x = 2arctg\ t)$

$$I = x - 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)} = x - 2\int \frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)^2 + 2t(1+t^2)}$$

$$= x - 2\int \frac{(1+t^2)dt}{(1+t^2)^2(1+2t+t^2)} = x - 2\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= x + \frac{2}{1+t} + c = x + \frac{2}{1+tg\ \frac{x}{2}} + c$$

الحالة الثانية: التكامل من الشكل: $\int f(\sin^2 x, \cos^2 x, tg^2\ x, \sin x \cos x\ )\ dx$

في هذه الحالة نعبر عن جميع الحدود بدلالة $t = tgx \Leftarrow (x = 2arctg\ t)$

مع العلم أن : $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2\,x}, \sin^2 x = \frac{tg^2x}{1+tg^2\,x}$

مثال: أحسب التكامل :

$$I = \int \frac{tg^2x.\,dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$$

نفرض $t = tgx \Leftarrow (x = 2arctg\ t) \Leftarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

لدينا $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2\,x}, \sin^2 x = \frac{tg^2x}{1+tg^2\,x}$

$$I = \int \frac{t^2dt}{(1+t^2)}.\frac{1+t^2}{(3+t^2)} = \int \frac{t^2dt}{(3+t^2)} = \int \frac{t^2+3-3dt}{(3+t^2)}$$

$$= \int dt - 3\int \frac{dt}{t^2+3} = t - \frac{3}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= tgx - \frac{3}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{3}}\right) + c$$

تكامل التوابع الصماء

I. نلاحظ أن:

$$\int \frac{dx}{k^2 - x^2} = \frac{1}{2k}\log\left|\frac{x+k}{x-k}\right| + c \dots\dots..(1)$$

$$\int \frac{dx}{k^2 + x^2} = \frac{1}{k} arctg\left(\frac{x}{k}\right) + c \dots\dots..(2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\log\left|\frac{x-k}{x+k}\right| + c \dots\dots..(3)$$

وهذه التكاملات تسمى بالتكاملات الشهيرة.

II. التكامل من الشكل :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

نعلم أن ثلاثي الحدود الموجود تحت إشارة الجذور يمكن كتابته على شكل مجموع مربعي كميتين أو فرق مربعي كميتين ولهذا نميز أربعة حالات :

1) بفرض أنه رد إلى الشكل $\int \frac{du}{k^2-u^2}$ ولإنجازه انظر إلى العلاقة رقم(1)أعلاه .

2) بفرض أنه رد إلى الشكل $\int \frac{du}{u^2+k^2}$ ولإنجازه انظر إلى العلاقة رقم(2)أعلاه

3) بفرض أنه رد إلى الشكل $\int \frac{du}{(u+k)^2}$ أي : $\int \frac{du}{(u+k)} = I = \log(u+k) + c$:

4) بفرض أنه رد إلى الشكل $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-k^2}}$ ولإنجازه انظر إلى العلاقة رقم(3)أعلاه

III. . التكامل من الشكل :

$$I = \int \frac{\mathrm{Ax + B}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

في هذه الحالة نفرض: $ax^2 + bx + c = u \Rightarrow (2ax + bdx) = du$

$$x.dx = \frac{du - bdx}{2a}$$

$$I = \int \frac{A.\frac{du - bdx}{2a} + Bdx}{\sqrt{u}} = \frac{A}{2a}\int \frac{du}{\sqrt{u}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$= \frac{A}{2a}.2\sqrt{u} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

$$\frac{A}{2a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

تكامل التوابع القطعية

لاستكمال التوابع القطعية نستفيد من دساتير المثلثات القطعية ، كما نستفيد من استخدام e^x كمتحول جديد في بعض الأحيان.

مثال: أحسب التكامل :

$$I = \int \frac{dx}{shx}$$

نفرض $t = tg\frac{x}{2} \Leftarrow (x = 2arctg\ t) \Leftarrow dx = \frac{2dt}{1-t^2}$

وحسب الدستور $shx = \frac{2t}{1-t^2}$

$$I = \int \frac{2dt}{1 - t^2}.\frac{1 - t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c$$

$$= \log\left|th\frac{x}{2}\right| + c$$

جامعة العقيد الحاج الأخضر
كلية علوم الإقتصاد و التسيير و التجارة

مقياس الرياضيات
سنة أولى LMD

سلسلـــــة 4

تمرين 1: (تغيير المتحول) أحسب التكاملات التالية :

1) * $I=\int \frac{\log(1+x)}{1+x}\,dx$ ، * 2) $I=\int \frac{e^x}{tge^x}\,dx$ ، 3) $I=\int x\sqrt{1+x}\,dx$ ،

4) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$ ، * 5) $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$ ، * 6) $I=\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

تمرين 2: أحسب التكاملات التالية : (التكامل بالتجزئة)

1) * $I=\int (2x+1)^2\cos x\,dx$ ، 2) * $I=\int x^{\alpha}\log x\,dx$ ، 3) $I=\int \log(1-x)\,dx$

4) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx$ ، 5) $I=\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ ، 6) $I=\int Arctgx\,dx$

7) * $I=\int -3e^{\frac{1}{2}x}dx$ ، مع الشرط الابتدائي : $I(0)=-2$.

تمرين 3: أحسب التكاملات التالية : (التكامل من الشكل $\int Q(x)e^x.dx$)

1) $I=\int (3x^3-2x^2+x-4)e^x\,dx$.

* 2) $I=\int (2x^5-3x^4+5x^3-x^2+2x-1)e^x\,dx$.

تمرين 4:

1. * أحسب المساحة المحصورة بين منحنى التابع $y=-x^2+2x+3$ و محور الفواصل و المستقيمين $x_1=-1$ و $x_2=3$.
2. * أحسب مساحة السطح المحصورة بين منحنى التابع $y=4x^2-8x+7$ و $y=-5x^2+10x-3$ و المستقيمين $x_1=0$ و $x_2=2$.
3. * أرسم الشكل البياني للتوابع التالية ثم قدر المساحة بين المنحنيات في الفترة المحددة:
   - $y_1=x$, $y_2=3$, $x_1=0$, $x_2=5$.
   - $y_1=6x$, $y_2=2x^2-8x+12$, $x_1=0$, $x_2=3$* .
   - $y_1=x+2$, $y_2=12-\frac{3}{2}x$, $x_1=0$, $x_2=6$.

تمرين 5: (تكامل تابع كسري) أحسب التكاملات التالية :

* 1) $I=\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$ ، * 2) $I=\int \frac{x-1}{x^2-2x-2}.dx$ ، 3) $I=\int \frac{2x-3}{x^2+4x-3}.dx$

4) $I=\int \frac{-2x-6}{x(x-3)(x-2)}dx$ ، مع الشرط الابتدائي : $I(1)=\log 2$ ، 5) $I=\int \frac{x-6}{x(x^2+3)}.dx$.

ملاحظة : التمارين التي عليها علامة * تترك للطلبة .

<u>الفصــــــــــــــل الرابع</u>

المعـادلات التفاضـــلية

- **المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى**
- **المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية**

1. المعادلات التفاضلية : هي المعادلات التي تحوي على تفاضلات أو مشتقات وتكتب على الشكل :

$$y' = 2x + 3 \quad \text{او} \quad \frac{dy}{dx} = 2x + 3 \ldots..(1)$$

$$y'' + xy' + 5 = 0 \quad \text{او} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 5 = 0 \ldots..(2)$$

مرتبة المعادلة التفاضلية: هي مرتبة أعلى مشتقة ولذلك فإن المعادلة (1) تسمى معادلة التفاضلية من المرتبة الأولى أما المعادلة (2) تسمى معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وكلا المعادلتين هما من الدرجة الأولى.

درجة المعادلة التفاضلية: تسمى درجة المعادلة التفاضلية، قوة أعلى رتبة مشتق فيها، فالمعادلة $(y'')^2 = (1+y')^3$ هي معادلة التفاضلية من الدرجة الثانية والمرتبة الثانية .

ولحل المعادلة التفاضلية يجب مكاملة المعادلة عدة مرات، نعتمد على مرتبة المعادلة التفاضلية و الحل يحتوي على ثوابت يشير إلى مرتبة المعادلة التفاضلية أي : يحوي الحل العام للمعادلة التفاضلية عددا من الثوابت مساويا لرتبة المعادلة المدروسة.

مثال (1) : بين أن العلاقات الجبرية :

$$1)\ y = 2e^x; 2)\ y = 3x; 3)\ y = c_1e^x + c_2x$$

حيث c_1, c_2 ثوابت.

هي حلول للمعادلة التفاضلية: $\quad y''(1-x) + y'x - y = 0 \ldots(1)$

الحل :

$$1)\ y = 2e^x \Rightarrow y' = 2e^x \Rightarrow y" = 2e^x$$

إذن $\quad 2e^x(1-x) + 2e^x x - 2e^x = 0$

وبالتالي فإن المعادلة (1) هي حل من حلول للمعادلة التفاضلية (1)

$$2)\ y = 3x \Rightarrow y' = 3 \Rightarrow y" = 0$$

إذن المعادلة (2) هي حل من حلول للمعادلة التفاضلية (1)

$$3)\ y = c_1e^x + c_2x \Rightarrow y' = c_1e^x + c_2 \Rightarrow y" = c_1e^x$$

$$c_1e^x(1-x) + (c_1e^x + c_2)x - c_1e^x - c_2x = 0$$

إذن المعادلة (3) هي حل من حلول للمعادلة التفاضلية (1).

مثال(2) كوَن المعادلة التفاضلية التي تقبل : $1)\ y = cx^2 - x; 2)\ y = c_1x^2 + c_2x$ حلولا لها.

الحل:

$$1)\ y = cx^2 - x \Rightarrow y' = 2cx - 1 \Rightarrow c = \frac{y'+1}{2x}$$

بتعويض قيمة c في المعادلة (1) نحصل على:

$$y = \frac{y'+1}{2x}.x^2 - x \Rightarrow 2y = y'x + x - 2x$$

$$\Rightarrow y'x - 2y - x = 0$$

وهي المعادلة المطلوبة.

$$2)\ y = c_1x^2 + c_2x \Rightarrow y' = 2c_1x + c_2 \Rightarrow y" = 2c_1$$

$$c_1 = \frac{y"}{2}y \quad , y' = 2.\frac{y"}{2}x + c_2 \Rightarrow c_2 = y' - y"x$$

إذن $y = \frac{y"}{2}.x^2 + (y' - y"x)x \Rightarrow 2y = y"x^2 + 2y'x - 2y"x^2$

$$y"x^2 - 2y'x + 2y = 0$$

وهي المعادلة المطلوبة.

2. حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الأولى :

A. إذا كانت المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى على الشكل :

$$f_1(x).g_2(y)dx + f_2(x).g_2(y)dy = 0 \ldots.(1)$$

لحل مثل هذه المعادلات يجب فصل المتغيرات المتشابهة كلّ على حدى.

فبقسمة المعادلة (1) على المقدار $f_2(x).g_1(y)$ نحصل على

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}.dx + \frac{g_2(y)}{g_2(y)}.dy = 0$$

ولحل المعادلة التفاضلية يجب مكاملة كل حد من حدودها على الشكل :

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}.\mathrm{dy} = \mathrm{c}$$

مثال (1): حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$

$$(1+y^3).dx + xy^2(1+x^2).dy = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على $x(1+x^2)(1+y^3)$ نحصل على

$$\frac{y^2}{1+y^3}dy + \frac{dx}{x(1+x^2)} = 0$$

وبمكاملة الطرفين نجد

$$\int \frac{y^2}{1+y^3}dy + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int 0 = k$$

$$\frac{1}{3}\log|1+y^3| + \int \frac{A.dx}{x} + \int \frac{Bx + C}{1+x^2}dx = k$$

$$\frac{1}{3}\log|1+y^3| + \log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) = k$$

مثال (2): حل المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 y}{sin^2 x}$

$$\frac{dx}{sin^2 x} = \frac{dy}{cos^2 y} \Rightarrow tg\ y + cotg\ x = k$$

B. في حالة وجود معادلة التفاضلية من المرتبة الأولى ومتجانسة :

$$N(x,y).dx + M(x,y).dy = 0$$

ولكن من الصعوبة جدا الفصل بين المتغيرات x,y .

في هذه الحالة نعوض عن y بـ vx أي: $y = vx \Rightarrow dy = vdx + xdv$

والتي تحول المعادلة التفاضلية إلى معادلة التفاضلية متجانسة يسهل فصل متغيراتها .

مثال: حل المعادلة التفاضلية : $2xy.dy = (x^2 - y^2).dx$

بالتعويض بـ $y = vx \Leftarrow dy = vdx + xdv$

إذن

$$2x(vx).(vdx + xdv) = (x^2 - v^2x^2).dx$$
$$3x^2v^2dx - x^2dx + 2x^3vdv = 0$$
$$x^2(3v^2 - 1)dx + 2x^3vdv = 0$$

وبقسمة الطرفين على $x^2(3v^2-1)$ نحصل على $\frac{dx}{x} + \frac{2v.dv}{3v^2-1} = 0$

وبمكاملة الطرفين نجد

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{3.2v.dv}{3v^2-1} = c$$

$$\log|x| + \frac{1}{3}\log|3v^2 - 1| = c$$

بالتعويض عن v نجد :

$$\log|x| + \frac{1}{3}\log\left|3\frac{y^2}{x^2} - 1\right| = \log|c|$$

$$\log|x| + \frac{1}{3}[\log|3y^2 - x^2| - \log|x^2|] = \log|c|$$

$$\log|x| + \log|3y^2 - x^2| - \log x^2 = 3\log|c|$$

$$3xy^2 - x^3 = k$$

حالات خاصة في حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

I. إذا كانت المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والتي لا يمكن حلها بالطرق المذكورة سابقا (لا يمكن فصل المتغيرات بسهولة عن بعضها ولو عوضنا عن $y = vx$) ، هذا النوع من المعادلات التفاضلية يكتب على الصورة:

$$f(x).dx + f(y).dy + f(x).dy + f(y).dx = 0$$

لحل هذه المعادلات نجعل الحد: $f(x).dy + f(y).dx = 0$

وتجرى عملية التكامل ثم نجمع تكامل الحدود جبريا وتسمى هذه الطريقة بالتكامل المركزي للحدود.

مثال: حل المعادلة التفاضلية : $(x^2 + y)dx + (y^3 + x).dy = 0$

$$x^2.dx + y.dx + y^3.dy + x.dy = 0$$

نأخذ $y.dx + x.dy = 0$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{y} = R$$

$$\log|x| + \log|y| = \log|c| \Rightarrow \log|x.y| = \log|c|$$

$$\Rightarrow x.y = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$x^2.dx + y^3.dy = c'$$

$$\frac{x^3}{3}+\frac{y^4}{4}=c' \;\ldots .(2)$$

نجمع $(1),(2)$ نجد $\frac{x^3}{3}+\frac{y^4}{4}+xy=c+c'=k$

II. المعادلات التفاضلية الخطية :

إذا كانت المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى من الشكل :

$$\frac{dy}{dx}+p(x).y=Q(x)\;\ldots .(1)$$

حيث p , Q تابعان مستمران لمتحول وحيد x .

نبحث عن حل المعادلة بالشكل $y=u.v\;\ldots .;(2)$:

حيث كل من u, v تابع للمتحول x.

لنشتق التابع : $y=u.v\Rightarrow \frac{dy}{dx}=u.\frac{dv}{dx}+v.\frac{du}{dx}$

بالتعويض في (1) نجد: $u.\frac{dv}{dx}+v.\frac{du}{dx}+p(x).u.v=Q(x)$

$$u.\left(\frac{dv}{dx}+p(x).v\right)+v.\frac{du}{dx}=Q(x)\;\ldots .(3)$$

نعين التابع v بحيث يحقق المعادلة $\frac{dv}{dx}+p(x).v=0\Rightarrow \frac{dv}{v}=-p(x).dx$:

وبمكاملة الطرفين نجد: $\int \frac{dv}{dx}=-\int p(x).dx\;\Rightarrow \log|v|=-\int p(x).dx$

$$\Rightarrow v=e^{-\int p(x).dx}$$

بالتعويض في (3) نجد: $v.\frac{du}{dx}=Q(x)\Rightarrow du=\frac{Q(x)}{V(x)}.dx$

$$\int du=\int \frac{Q(x)}{V(x)}.dx\Rightarrow u=\int \frac{Q(x)}{V(x)}.dx+c$$

بالتعويض في (2) نجد $y=V(x).\left[\int \frac{Q(x)}{V(x)}.dx+c\right]$:

$$=e^{-\int p(x).dx}\left[\int e^{\int p(x).dx}.Q(x).dx+c\right]$$

و هو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

نسمى $e^{-\int p(x).dx}$ بعامل التكامل.

و هناك طريقة ثانية لحل المعادلة التفاضلية الخطية (التامة) أي نحل المعادلة بدون طرف ثاني

أي $\frac{dy}{dx}+p(x).y=0\;\;\Rightarrow \int \frac{dy}{y}=-\int p(x).dx$

$$\log|y|=-\int p(x).dx+\log|c|$$

c ثابت.

$$\log|y|-\log|c|=-\int p(x).dx$$

$$\log\left|\frac{y}{c}\right| = -\int p(x).dx \Rightarrow \frac{y}{c} = e^{-\int p(x).dx}$$

$$\Rightarrow y = c.e^{-\int p(x).dx} \; .... (4)$$

وهنا نعتبر c متغيرا بالنسبة للمتحول x ونجري مايلي:

$$\frac{dy}{dx} = c'.e^{-\int p(x).dx} + c(c.e^{-\int p(x).dx})'$$

ثم نجد قيمة c و نعوض عن c بقيمته في المعادلة (4) حينئذ نجد الحل النهائي للمعادلة التفاضلية الخطية (المعادلة التفاضلية التامة).

مثال: حل بطريقتين مختلفتين المعادلة التفاضلية :

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$$

الطريقة الأولى :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3 \; ... (1)$$

نفرض أن حل المعادلة هو : $y = u.v \; ... (2)$

$$y = u.v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

$$u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx} - \frac{2}{x+1}u.v = (x+1)^3$$

$$u.\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}.v\right) + v.\frac{du}{dx} = (x+1)^3$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}.v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2}{x+1}dx \Rightarrow \log|v| = 2\log|x+1| = \log|x+1|^2$$

$$\Rightarrow v = (x+1)^2$$

$$v.\frac{du}{dx} = (x+1)^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} = x+1$$

$$du = (x+1) \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + x + c$$

إذن :

$$y = u.v = \left(\frac{x^2}{2} + x + c\right)(x+1)^2$$

الطريقة الثانية :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x+1}dx \Rightarrow \log|y| = 2\log|x+1| + \log|c|$$

$$= \log(x+1)^{2} + \log|c|$$

$$\log\left|\frac{y}{c}\right| = \log(x+1)^{2} \Rightarrow y = c(x+1)^2$$

باعتبار أن c متغيرا

$$\frac{dy}{dx} = c'(x+1)^2 + 2c(x+1)$$

بالتعويض في المعادلة الأصلية نجد

$$c'(x+1)^2 + 2c(x+1) - \frac{2(x+1)^2}{x+1} = (x+1)^3$$

$$\frac{dc}{dx} = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} = x+1 \Rightarrow dc = (x+1)dx$$

$$\Rightarrow c = \frac{x^2}{2} + x + k$$

إذن :

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + k\right)(x+1)^2$$

حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية :

هناك عدة صور لكتابة المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية :

الحالة الأولى : إذا كانت المعادلات التفاضلية تكتب على الصورة :

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

ولحل المعادلة التفاضلية نكامل المعادلة مرتين و يجب الحصول على عدد من الثوابت يساوي 2.

مثال: حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x + \cos x$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = xe^x + \cos x \Rightarrow d\left(\frac{dy}{dx}\right) = (xe^x + \cos x)dx$$

$$\int d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \int (xe^x + \cos x)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int xe^x.dx + \int \cos x\,.dx = xe^x - e^x + \sin x + c_1$$

$$dy = (xe^x - e^x + \sin x + c_1)dx$$

$$\int dy = \int xe^x.dx - \int e^x\,.dx + \int \sin x\,.\mathrm{dx} + c_1\int dx$$

$$y = xe^x - e^x - e^x - \cos x + c_1\,x + c_2$$

$$y = e^x(x-2) - \cos x + c_1\,x + c_2$$

الحالة الثانية : إذا كانت المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية على الشكل :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$$

لحل هذه المعادلات نفرض

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

وهناك حالات أخرى لحل المعادلات التفاضلية من المرتبة الثانية مثل:

$$F(x, y, y', y") = 0$$

1) إذا كانت المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية على الشكل $y" - w^2y = 0, (w \neq 0)$

فإن حل هذه المعادلة هو: $y = c_1e^{wx} + c_2e^{-wx}$ حيث c_2, c_1 ثوابت.

مثال: $y" - 4y = 0 \Leftarrow w = 4 \Leftarrow w = \mp 2$

إذن : $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

2) إذا كانت المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية على الشكل $y" + w^2y = 0, (w \neq 0)$

فإن حل هذه المعادلة هو: $y = c_1 \cos wx + c_2 \sin wx$ حيث c_2, c_1 ثوابت.

مثال: حل المعادلة التفاضلية: $y" + 16y = 0$

$$w = \mp 4 \Leftarrow w = 16 \Leftarrow$$

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$$

3)إذا كانت المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية على الشكل :

$y" + ay + b = 0$ حيث a ,b أعداد ثابتة.

في هذه الحالة نحل المعادلة $m^2 + am + b = 0$

نجد المميز Δ حيث $\Delta = a^2 - 4b$

نلاحظ هنا أنه إذا كان :

- $\Delta > 0$ يوجد جذرين m_2, m_1 للمعادلة (1) ويكون الحل كالآتي:

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

- $\Delta = 0$ يوجد جذر مضاعف للمعادلة (1) ويكون الحل كالآتي:

$$m_1 = m_2 , y = e^{m_1x}(c_1x + c_2)$$

- $\Delta < 0$ يوجد جذرين $m_2 = \alpha - iw, m_1 = \alpha + iw$ للمعادلة (1) ويكون الحل كالآتي:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos wx + c_2 \sin wx)$$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $y" + 2y' + 5y = 0$:

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$$

$$y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

جامعة الحاج الأخضر
كلية علوم الإقتصاد و التسيير
و التجارة

مقياس الرياضيات
سنة أولى LMD

سلسلـــــة 5

* **تمرين 1:** حل المعادلات التفاضلية التالية :

a) * $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$, **b)** * $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, **c)** * $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+1}$, **d)** $\frac{dy}{dx}-\frac{1+y}{1+x}=0$, **e)** $\frac{dy}{dx}=xy^2$

تمرين 2: حل المعادلات التفاضلية التامة التالية :

a) * $y'+y=\frac{1}{e^x}$, **b)** $y'+2xy=3xe^{-2x^2}$, **c)** $y'-ycosx=(x+cosx)e^{sinx}$

d) * $y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$

تمرين 3: حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية التالية :

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-5y=0$.
2. $y''+2y'+2y=0$.
3. * $y''-6y'+8y=0$.
4. * $y''+9y=0$.

تمرين 4: كوّن المعادلات التفاضلية التي تقبل المعادلات التالية حلولا لها :

1. $y=cx^2+1$.
2. * $xy=x^3-c$.
3. * $y=cx^2+c^2$
4. * $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$.
5. $y=c_1x^2+c_2x^3$.

ملاحظة: الأسئلة التي عليها * تترك للطلبة .

الفصـــــــــــل الخامس

المتتاليـــــــــــات و السلاســـــــــــل

- المتتاليـات الحسابية و الهندسية
- السلاسـل الحسابية و الهندسية
- السلاسل العددية ذات الحدود الموجبة
- معايير التقارب
  - معيار المقارنة
  - معيار دالمبير
  - معيار كوشي

1 المتتـــــاليات

- **تــــعريف:**

نسمي متتالية عددية U_n كل تطبيق من IN (او جزء I من IN) نحو IR.

نرمز عادة لمتتالية بـــ: $(U_n)_{n\geq 0}$ او اختصارا (U_n) .

يسمي الحد U_n بالحد العام للمتتالية (U_n).

امثلة:

1. اليك بعض العبارات التي تعرف متتاليات:

$$U_n = \sqrt{n};\ U_n = -\frac{\sqrt{n}}{n+2};\ U_n = 2n-3;\ U_n = \frac{1}{n+2}$$

2. لدينا

a) الحد من المرتبة 0 لـ $(2n-3)_{n\geq 0}$ هو (-3)،الحد الرابع هو 3 (الحد من المرتبة 3)

b) الحد الثالث لـ $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ هو $\frac{1}{3}$

c) الحد الاول لـ $\left(\frac{2p}{3n}\right)_{n\geq 1}$ هو $\frac{2p}{3}$، و لـ $\left(\frac{2p}{3n}\right)_{p\geq 0}$ هو 0

- **اتجاه تغير متتـــــالية:**

نقول عن متتالية (U_n) انها متزايدة (متناقصة،على الترتيب) اذا كان $\forall\ n \in IN;\ \ U_n \leq U_{n+1}$ ($\forall\ n \in IN;\ \ U_n \geq U_{n+1}$ على الترتيب)

امثلة:

1. المتتالية التالية $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots.$ متناقصة تماما.

لدينا: $\forall n \geq 1;\ U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$

ومنه: $\forall\ n \geq 1;\ \ U_{n+1} < U_n$

2. المتتالية $(-1)^n$ غير رتيبة، المتتالية $\sqrt{n}$ متزايدة ، المتتالية $\frac{1}{n+2}$ متناقصة.

- **المتتـــــاليات المحدودة:**

نقول عن متتالية (U_n) انها محدودة من الاعلى اذا وجد عدد حقيقي $M \in IR$ بحيث :

$$\forall\, n \in IN;\;\; U_n \leq M$$

نقول عن متتالية (U_n) انها محدودة من الاسفل اذا وجد عدد حقيقي $m \in IR$ بحيث :

$$\forall\, n \in IN;\;\; U_n \geq m$$

نقول عن متتالية (U_n) محدودة اذا كانت محدودة من الاعلى و من الاسفل أي:

$$\forall\, n \in IN;\; m \leq U_n \leq M$$

امثلة:

1. المتتالية $\left(3-\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ محدودة من الاسفل بـ 2 و من الاعلى بـــ 3 ،اذن هي متتالية محدودة
2. المتتالية $((-1)^n + 2n)_{n\geq 0}$ هي محدودة من الاسفل بـ 1 و لكن ليست محدودة من الاعلى.

- **المتتاليات المتقـــــــــاربة:**

المتتالية (U_n) متقاربة نحو $\alpha \in IR$ اذا كان

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in IN: \forall n \geq n_0, |U_n - \alpha| < \varepsilon$$

و نكتب: $\lim U_n = \alpha$

إذا كانت متتالية ليست متقاربة فهي متباعدة.

ملاحظات:

a) اذا وجدت نهاية متتالية فهي وحيدة.
b) كل متتالية متقاربة محدودة.

- **المتتاليات الحســــــابية:**

نسمي متتالية حسابية ذات الاساس r كل متتالية (U_n) تحقق :

$$\forall n \in IN;\; U_{n+1} = U_n + r$$

عبارة الحد العام: $U_n = U_0 + nr$.

مجموع n حد الاولي للمتتالية :

$$\sum_{k=0}^{n-1} U_k = \frac{n}{2}(u_0 + u_{n-1}) = nu_0 + r\frac{n(n-1)}{2}$$

امثلة:

a) المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_{n+1} = U_n + 3$ $U_0 = 2, \forall n \in IN;$ و المتتالية (V_n) المعرفة بـ
$\forall n \in IN;\ V_n = 4 - 5n$، هي متتاليات حسابية.

b) المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ هو $\sum_{K=1}^{100} k = \frac{100}{2}(1 + 100) = 5050$

- **المتتاليات الهندسيـــــــة:**

(U_n) متتالية هندسية اذا وجد عدد حقيقي غير معدوم q بحيث
$\forall n \in IN;\ U_{n+1} = qU_n$، q يسمي اساس المتتالية.

عبارة الحد العام: $U_n = U_0 q^n$.

- حتي تكون متتالية (U_n) هندسية يلزم و يكفي ان يوجد $a, b \in IR$ بحيث:

$$\forall n \in IN;\ U_n = ab^n$$

المجموع $\sum_{k=p}^{p+N-1} U_k$ لـ N حد متتابع $U_P, \dots, U_{p+N-1}$ لمتتالية هندسية (U_n) ذات الاساس q $(q \neq 1)$ هو $U_P + \cdots + U_{p+N-1} = U_P \frac{1-q^N}{1-q}$

امثلة:

a) المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_{n+1} = -5U_n$ $U_0 = 3, \forall n \in IN;$ و المتتالية (V_n) المعرفة بـ
$\forall n \in IN;\ V_n = 2(-3)^n$، هي متتاليات هندسية.

b) $\sum_{K=0}^{10} 2^k = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10} = 1\frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047$

2 السلاســــــــل:

- تـــــعريف :

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حقيقية، السلسلة ذات الحد العام U_n هي المتتالية $(S_n)_{n\in IN}$ المعرفة بـ

$S_N = U_0 + U_1 + \cdots + U_N, N \in IN$ و يرمز لها بـ $\sum_{n\geq 0} U_n$ او $\sum U_n$

S_N يسمي المجموع الجزئي من المرتبة N للسلسلة ذات الحد العام U_n.

- تقــارب سلســـلة:

نقول عن السلسة $\sum U_n$ انها متقاربة اذا كانت متتالية المجاميع الجزئية S_n متقاربة .

يسمي العدد $\lim_{+\infty} S_n = S$ بمجموع السلسلة و نرمز له بـ $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ أي

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$$

ملاحظـات :

a) نقول عن سلسلة غير متقاربة انها متباعدة .

b) يقصد بدراسة طبيعة سلسلة دراسة تقاربها من تباعدها .

امثــلة:

a) لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ $U_n = n$، السلسلة ذات الحد العام U_n هي المتتالية $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)_{n\in IN}$ لان المجموع الجزئي للسلسلة:

$$S_N = U_0 + U_1 + \cdots + U_N = 0 + 1 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2}.$$

b) لندرس طبيعة السلسلة المعرفة بحدها العام $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ بحيث $n \in N^*$ نعين طبيعة المتتالية S_n

لدينا:

$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

اذن $\lim_{+\infty} S_n = 1$ اي ان السلسلة $\sum U_n$ متقاربة و مجموعها

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = 1.$$

- **الشـــرط اللازم للتقـــارب:**

اذا كانت السلسلة $\sum U_n$ متقاربة فان $\lim_{+\infty} U_n = 0$

و منه :

اذا كانت $\lim_{+\infty} U_n \neq 0$ فان $\sum U_n$ متباعدة.

مثـــال :

لتكن السلسلة: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots=\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1}$

هذه السلسلة متباعدة لان: $\lim_{+\infty} U_n = \lim_{\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

- **السلســـلة الهندسيـــة:**

نسمي سلسلة هندسية السلسلة ذات الحد العام aq^n ، الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} aq^n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

تكون $\sum aq^n$ متقاربة اذا وفقط اذا كان $|q| < 1$

و مجموعها: $\lim_{+\infty} S_n = S = a\frac{1}{1-q}$

- **عمليـــات علي السلاســـل:**

لتكن السلسلتين $\sum U_n$ و $\sum V_n$ و ليكن العدد الحقيقي λ

1) اذا تقاربت السلسلتان $\sum U_n$ و $\sum V_n$ فان السلسلة $\sum(U_n + V_n)$ متقاربة و لدينا

$$\sum_{n\geq 0}(U_n + V_n) = \sum_{n\geq 0} U_n + \sum_{n\geq 0} V_n$$

2) اذا تقاربت السلسلة $\sum U_n$ فان السلسلة $\sum \lambda U_n$ متقاربة و لدينا:

$$\sum_{n\geq 0} \lambda U_n = \lambda \sum_{n\geq 0} U_n$$

3) اذا تقاربت السلسلة $\sum U_n$ وكانت السلسلة $\sum V_n$ متباعدة فان السلسلة $\sum (U_n + V_n)$ متباعدة.

ملاحظـــــــة:

اذا كانت السلسلتان $\sum U_n$ و $\sum V_n$ متباعدتين فلا يمكن البت في طبيعة السلسلة $\sum (U_n + V_n)$.

أمثـــلة:

a) السلسلة $\sum \frac{3}{2^n}$ متقاربة ،هي جداء السلسلة الهندسية المتقاربة $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ بالعدد الحقيقي 3.

b) من اجل $U_n = \frac{1}{n}$ و $V_n = \frac{-1}{n}$ فان السلسلتين $\sum U_n$ و $\sum V_n$ متباعدتان في حين السلسلة $\sum (U_n + V_n)$ متقاربة (مجموعها معدوم)

c) من اجل $U_n = \frac{1}{n}$ و $V_n = \frac{1}{n}$ فان السلاسل $\sum U_n$ ،$\sum V_n$ و $\sum (U_n + V_n)$ متباعدة .

- **السلاســـــــل ذات الحدود الموجبـــــــة:**

$\sum U_n$ سلسلة ذات حدود موجبة معناه : $\forall n \geq 0 \,;\, U_n \geq 0$

- ***نظـــرية :***

تكون السلسلة $\sum U_n$ ذات الحدود الموجبة متقاربة اذا وفقط اذا كان متتالية $(S_n)_{n\in IN}$ المجاميع الجزئية محدودة من الاعلى.

- **سلسلـــــــة ريمان:**

نسمي سلسلة ريمان ،السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ بحيث $\alpha \in IR$.

السلسلة $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ متقاربة اذا وفقط اذا كان $\alpha > 1$.

من اجل $\alpha = 1$،السلسلة المتباعدة $\sum \frac{1}{n}$ تسمى سلسلة توافقية.

- **نظـــرية المقارنة:**

لتكن $\sum U_n$ و $\sum V_n$ سلاسل ذات حدود موجبة بحيث: $\forall\ n \in IN;\ \ U_n \leq V_n$

اذن:

1) اذا كانت $\sum V_n$ متقاربة فان $\sum U_n$ متقاربة.

2) اذا كانت $\sum U_n$ متباعدة فان $\sum V_n$ متباعدة.

امثـــــلة:

1. من اجل السلسلة : $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{19}+\cdots+\frac{1}{n^2+3}+\cdots=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+3}$

الحد العام لهذه السلسلة هو $\frac{1}{{}^2+3}$ و لدينا $\frac{1}{n^2+3}<\frac{1}{n^2}\quad \forall n\geq 1;$.

$\sum\frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان متقاربة $(\alpha=2>1)$، اذن حسب نظرية المقارنة $\sum\frac{1}{n^2+3}$ متقاربة.

2. من اجل السلسلة : $2+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+\cdots+\frac{n^2+1}{n^3}+\cdots=\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+1}{n^3}$

الحد العام لهذه السلسلة : $U_n=\frac{n^2+1}{n^3}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}$

نلاحظ: $\forall n\geq 1;\quad \frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}>\frac{1}{n}$

و $\sum\frac{1}{n}$ سلسلة توافقية متباعدة

اذن $\sum\frac{n^2+1}{n^3}$ متباعدة .

- **قـــواعد التقـــــارب:**

1) معيـــار كوشـــي:

لتكن $\sum U_n$ سلسلة ذات حدود موجبة و اذا كان $\lim_{+\infty}\sqrt[n]{U_n}=\ell$ فان:

a. اذا كان $\ell<1$، السلسلة متقاربة.
b. اذا كان $\ell>1$، السلسلة متباعدة.
c. اذا كان $\ell=1$، لايمكن الاستنتاج.

2) معيـــار دالمبيـــــــر:

من اجل $\sum U_n$ سلسلة ذات حدود موجبة ، اذا كان $\lim_{+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\ell$ فان:

a. اذا كان $\ell<1$، السلسلة متقاربة.

b. اذا كان $\ell > 1$، السلسلة متباعدة.

c. اذا كان $\ell = 1$، لايمكن الاستنتاج.

امثـــلة:

1. السلسلة $\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$ ، لدينا حسب كـــوشي :

$$\lim_{+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}=\lim\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

اذن السلسلة متقاربة.

2. السلسلة $\frac{1!}{4}+\frac{2!}{4^2}+\cdots+\frac{n!}{4^n}+\cdots=\sum_{n\geq1}\frac{n!}{4^n}$

$$U_n=\frac{n!}{4^n}\quad,\quad U_{n+1}=\frac{(n+1)!}{4^{n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)!}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{n!}=\frac{n+1}{4}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{\infty}\frac{n+1}{4}=\infty$$

بمان $\ell > 1$ اذن السلسلة متباعدة .

تمـــــــرين:

1) اثبت ان السلسلة ذات الحد العام $U_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ متقاربة و احسب مجموعها.

" ارشاد اكتب U_n على الشكل $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$ "

2) عين طبيعة السلاسل التالية:

■ $\sum \frac{\ln n}{n^3}$

■ $\sum \frac{n!}{n^n}$

■ $\sum \left(\sin \frac{1}{n}\right)^n$

■ $\sum \frac{2}{n(n^2-1)}$

جامعة العقيد الحاج الأخضر
كلية علوم الإقتصاد و التسيير و التجارة

مقياس الرياضيات
سنة أولى LMD

سلسلـــــة 6

* **تمرين 1:** (U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $U_0=1$ ، $\forall n \in N^*$, $U_{n+1}=\sqrt{U_n+6}$

1. أثبت أن : $\forall n \in N$, $0 \le U_n \le 3$.
2. أثبت أن : (U_n) متزايدة .
3. أدرس تقارب (U_n) ثم أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

* **تمرين 2:** أوجد المتتالية الحسابية التي مجموع n حدا من حدودها الأولى هو $n(3n+1)$ مهما تكن n .

* **تمرين 3:** عين المتتالية الهندسية (U_n) المتناقصة و ذات الحدود الموجبة المعرفة على N^* التي تحقق :

$U_1U_3=144$ و $U_1+U_2+U_3=63$.

تمرين 4: أدرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة:

1) * $U_n=\frac{3n-5}{n+2}$ ، 2) * $U_n=\frac{3n^2-4n}{2n-1}$ ، 3) * $U_n=\frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$

4) $U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ ، 5) $U_n=\frac{2^n+2.3^n+3.5^n}{3^n+3.4^n+5.5^n}$.

تمرين 5: (U_n) متتالية عددية معرفة بحدها العام : $\forall n \in N$, $U_n=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

1. عين قيمتي العددين الحقيقيين a,b بحيث يكون : $\forall n \in N$, $U_n=\frac{a}{2n+1}+\frac{b}{2n+3}$
2. استنتج صيغة بسيطة للمجموع : $S_n=U_0+U_1+\dots+U_n$
3. بين طبيعة السلسلة التي حدها العام U_n و أحسب مجموعها إن وجد.

تمرين 6: ادرس تقارب السلاسل ذات الحد العام التالية :

1) $U_n=\frac{n}{2n+1}$ ، 2) * $U_n=\frac{2^n-1}{2^n}$ ، 3) $U_n=\left(\frac{n}{n^2+1}\right)^n$ ،

4) * $U_n=\frac{n^2}{n!}$ ، 5) $U_n=\frac{n^2(n+1)}{n!}$.

جامعة العقيد الحاج الأخضر
كلية العلوم الاقتصادية و التجــارية
وعلوم التسيير

مقياس الرياضيات
سنة أولى LMD

امتحــان السداسي الأول
2013/2012

<u>تمرين 1:</u> (8 نقاط)

عين القيم الحرجة للتابع و بين نوع كل منها حيث :

$$Z = x^3 + y^3 - 3xy$$

<u>تمرين 2:</u> (6 نقاط)

1. احسب التكامل التالي : $I = \int_0^1 xe^x dx$.

2. حل المعادلة التفاضلية : $y' + x^2 y = 0$.

<u>تمرين 3:</u> (6 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة بحدها العام :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ، \ U_n = \frac{6}{(2n+1)(2n+3)}$$

1. عين قيمتي العددين الحقيقيين a,b بحيث يكون :

$$\forall n \in N \ , U_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}$$

2. استنتج صيغة بسيطة للمجموع :

$$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$$

ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

3. عين طبيعة السلسلة ذات الحدود الموجبة :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}.$$

مـــــــــــوفــــقين

تصحيح امتحـــان السداسي الأول
2013/2012

تمرين 1: النقاط الحرجة هي التي تحقق :

$$\begin{cases}\frac{\partial Z}{\partial X} = 3x^2 - 3y = 0 \quad (0.5) \\ \frac{\partial Z}{\partial Y} = 3y^2 - 3x = 0 \quad (0.5)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x^4 - x = 0\end{cases} \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x(x^3 - 1) = 0\end{cases} \quad (0.25) \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (0.5) \quad \vee \quad x = 1 \quad (0.5) \\ y = 0 \quad (0.5) \quad \vee \quad y = 1 \quad (0.5)\end{cases}$$

النقاط الحرجة هي : (0.25) (0,0)، (0.25) (1,1) .

و لدينا : $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = -3 \quad (0.5)$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = -3 \quad (0.5)$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 6x \quad (0.5)$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 6 \quad (0.5)$$

من أجل النقطة (0,0) لدينا :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(0,0).\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(0,0) - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}(0,0).\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}(0,0) = -9 < 0 \quad (0.5)$$

و منه النقطة (0,0) تعين نقطة سرج . (0.5)

من أجل النقطة (1,1) لدينا :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(1,1).\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}(1,1) - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}.(1,1)\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}(1,1) = 27 > 0 \quad (0.5)$$

و منه النقطة (1,1) تعين نقطة حدية صغرى . (0.5)

تمرين 2:

1) نكامل بالتجزئة، بوضع :

$$u = x \quad \Rightarrow du = dx \quad (0.5)$$
$$dv = e^x dx \quad \Rightarrow v = e^x \quad (0.5)$$
$$I = [u.v]_0^1 - \int_0^1 v du \quad (0.5)$$
$$\Rightarrow \quad I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \quad (0.5)$$
$$= 1 \quad (1)$$

(2 $$y' + x^2 y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + x^2 dx = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \ln|y| + \frac{1}{3}x^3 = \ln|c| \quad (1)$$
$$\Rightarrow y = ce^{-\frac{x^3}{3}} \quad (1)$$

تمرين 3:

(1 $$U_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3} = \frac{(2a+2b)n + 3a + b}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{6}{(2n+1)(2n+3)} \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ 3a + b = 6\end{cases} \quad (0.5) \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -3\end{cases} \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{3}{2n+1} + \frac{-3}{2n+3} \quad (0.5)$$

(2

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$
$$= \left(\frac{3}{1}-\frac{3}{3}\right) + \left(\frac{3}{3}-\frac{3}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{2n+1}-\frac{3}{2n+3}\right) \quad (0.5)$$

$$\Longrightarrow S_n = 3 - \frac{3}{2n+3} \quad (1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(3-\frac{3}{2n+3}\right) = 3 \quad (0.5)$$

(3

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\frac{n^3}{n!}} = \frac{(n+1)^3}{n!(n+1)}.\frac{n!}{n^3} = \frac{(n+1)^2}{n^3} \quad (1)$$

نطبق قاعدة دالمبير لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1 \quad (0.5)$$

و منه حسب دالمبير فإن السلسلة متقاربة. (0.5)