

ALGÈBRE 2

Durée: 1h30

Sujet d'examen (Rattrapage)

Exercice I (6pts)

(I) Soit \mathbb{V} le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(\frac{1}{2}, -1, \frac{-1}{2})$, $(-2, 2, 1)$, $(-5, 4, 2)$.

Donner une base pour \mathbb{V} et déterminer sa dimension.

(II) Soient \mathbb{E} et \mathbb{F} deux espaces vectoriels de dimensions finies telles que $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{F}$. Soit f une application linéaire de \mathbb{E} dans \mathbb{F} .

Montrer que f est bijective si et seulement si elle est surjective.

Exercice II (8pts)

Soit l'application linéaire f définie de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 par:

$$f(x, y, z) = (x, 3x + 2y - z, 2y - z).$$

- (a) Montrer que f est linéaire;
- (b) Déterminer $\ker f$ (base et dimension);
- (c) Est-ce que f est injective? surjective? Justifier votre réponse;
- (d) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 ;
- (e) Déterminer la matrice de f^2 dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice III (6pts)

Soit le système linéaire:

$$y - z = 1,$$

$$(\mathcal{S}) \quad -3x + 4y - 3z = 3,$$

$$-x + y = -2$$

- (i) Ecrire le système (\mathcal{S}) sous la forme matricielle $AX = Y$;
- (ii) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} ;
- (iii) Dédire que le système (\mathcal{S}) est de Cramer puis résoudre (\mathcal{S}) .

Bon courage

Corrigé de l'examen (Rattrapage)

Exercice 1

(I) 4 pts (II) 2 pts

(I) $V = \left\{ u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$

(0,5)

où $v_1 = \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} \right)$, $v_2 = (-2, 2, 1)$, $v_3 = (-5, 4, 2)$.

Étudiant l'indépendance linéaire des vecteurs v_1, v_2 et v_3

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\lambda_1 \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2} \right) + \lambda_2 (-2, 2, 1) + \lambda_3 (-5, 4, 2) = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda_1 - 2 \lambda_2 - 5 \lambda_3 = 0 \rightarrow (1) \\ -\lambda_1 + 2 \lambda_2 + 4 \lambda_3 = 0 \rightarrow (2) \\ -\frac{1}{2} \lambda_1 + \lambda_2 + 2 \lambda_3 = 0 \rightarrow (3) \end{cases}$

(0,5)

$(1) + (3) \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_2 - 3 \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2 \lambda_2 + 4 \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow (2) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -3 \lambda_3 \\ -\lambda_1 + 6 \lambda_3 + 4 \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -3 \lambda_3 \\ \lambda_1 = -2 \lambda_3 \end{cases}$

(0,5)

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

(0,5)

donc (v_1, v_2, v_3) est liée

Si on prend $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = +3$, $\lambda_1 = 2$

$\Rightarrow v_3 = 2v_1 + 3v_2$

D'où $V = \left\{ u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 (2v_1 + 3v_2) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 2

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x, 3x + 2y - z, 2y - z)$$

$$1) \forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) \quad (0,5)$$

$$f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

$$= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, 3(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2),$$

$$2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2))$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$(b) \text{Ker } f = \{ u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \} \quad (0,5)$$

$$= \{ (x, y, z) / (x, 3x + 2y - z, 2y - z) = (0, 0, 0) \}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ker } f = \{ (0, y, 2y) / y \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ y(0, 1, 2) / y \in \mathbb{R} \} \quad (0,5)$$

(5) $\Rightarrow \{ u_1 = (0, 1, 2) \neq (0, 0, 0) \}$ engendre $\text{Ker } f \Rightarrow (u_1)$ est une base pour $\text{Ker } f$

$$(0,5) \dim \text{Ker } f = 1$$

c) $\text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc $\text{Ker } f$ n'est pas injective (0,5)

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

$$\Rightarrow \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f = 3 - 1 = 2 \quad (0,5)$$

$$\dim \text{Im } f \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \text{Im } f \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow f \text{ n'est pas surjective} \quad (0,5)$$

- ou bien comme $\dim E = \dim F = 3$ f n'est pas injective
alors f n'est pas surjective.

$$(d) f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 3, 0) \quad (0,25)$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (0, 2, 2) \quad (0,25)$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, -1, -1) \quad (0,25)$$

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(surligné)}$$

(e) la matrice de $f^2 = f \circ f$ est A^2 (0,25)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{1}$$

Exercice 3

i) $AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (0,5)

ii) $\det A = -1 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1(-3) - 1(-3+4)$
 $= 3 - 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ (0,5)

A est inversible (0,5)

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t M$ (0,5)

$M = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (1)

${}^t M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (0,5)

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (1)

ii) A est inversible \Rightarrow (S) est de Cramer (0,5)

La solution est donnée par :

$AX = Y \Rightarrow X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$

$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ (1)