UNIVERSITE BADJI MOKHTAR
DEPARTEMENT DE M.I

ALGEBRE 2

2ème EXAMEN **SEMESTER 2** **2011/2012**

Date: Mai 2012 **Time: 10.00-11.30**
(reading time)

Exercice1 (5pts) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right)$$

1. Déterminer une base de $K\,\mathrm{erf}$.

2. f est-elle injective ? Surjective ? Pourquoi ?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\, f$. Déduire le rang de f.

4. Montrer que $f \circ f = f$.

5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = K\,\mathrm{erf} \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 2. (5pts) On considère dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.

2. Déduire pour tout entier $n > 3$ la valeur de A^n.

A tout nombre réel x on associe la matrice.

$$M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \tag{*}$$

où I désigne la matrice identité

3. Calculer $M(0)$.

4. En utilisant la formule $(*)$ Montrer que

$$M(x).M(y) = M(x+y) \qquad (**)$$

5. En remplaçant y par $-x$ dans $(**)$, déduire la matrice inverse de $M(x)$.

Exercice 3. (6pts) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y,z) = (x-y+z, 2x+y, -x-z)$$

1. Trouver la matrice A associée à f par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que la partie $B' = \left\{e_1' = (1,-1,0)\,,\; e_1' = (0,-1,1)\,,\; e_1' = (0,1,0)\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Trouver la matrice de passage P de la base canonique B à la base B'.

4. Trouver la matrice de passage Q de la base canonique B' à la base B. Vérifier que $P = Q^{-1}$

5. Déduire la matrice B associée à f par rapport à la base B'.

Exercice 4. (4pts) Soit donné le système linéaire suivant:

$$(S) : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

1. Ecrire la forme matricielle $AX = b$.

2. Montrer que le système (S) admet une solution unique.

3. Résoudre ce système par la méthode de Cramer.