Université Badji Mokhtar-Annaba-
Faculté des Sciences
Département de M.I.

L.M.D : 2010-2012
Module : Analyse II
Enseignant: Pr.Moumeni Abdelkader

Durée :1h30 **30 /06/2012**

EXAMEN

Exercice1 : Soit f une fonction définie et continue sur $[-a,a]$, $a \succ 0$.

1. Montrer que si f est impaire sur $[-a,a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
2. Calculer $\int_{-5}^{5} x^4 \, Arc\tan x \cdot dx$

Exercice2 : Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = \lambda :=$ constante.

Montrer que f est Riemann intégrable et $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lambda(b-a)$.

Exercice3 : Calculer par deux méthodes différentes l'intégrale suivante : $\int xe^{x^2} dx$; $x > 0$

Exercice4 : Calculer :

i. $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

ii. $I_2 = \int \frac{dx}{1+x^3}$

Exercice5 : Intégrer les équations différentielles suivantes :

i. $(\cos x)y' + (\sin x)y = x$

ii. $4y'' - 4y' + y = 0$.

iii. $y'' - y' + y = 0$

Barème : **Exo1 : 3** points.
Exo2 : 2 points.
Exo3 : 3 points.
Exo4 : 5 points.
Exo5 : 6 points.

Bonne chance... !

☎ **N.B: Il sera tenu compte de la présentation de la copie.**

EX(1) :-

1. $f \in C^0[-a,a] \Rightarrow f$ Riemann intégrable sur $[-a,a]$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
$$= -\int_{a}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

2pt

2. $x \longmapsto x^4 \operatorname{Arctan} x$ est impaire sur $[-5,5]$

$$\Rightarrow \int_{-5}^{5} x^4 \operatorname{Arctan} x\,dx = 0$$

1pt

EX(2) :- Soit le sommes de Darboux

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i\,(x_{i+1} - x_i) = \lambda(b-a)$$

1pt

$$s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i\,(x_{i+1} - x_i) = \lambda(b-a)$$

où $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$ et $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$; σ une subdivision de $[a,b]$

1pt

on a ;

$S(\sigma) = s(\sigma) \Rightarrow f$ Riemann intégrable sur $[a,b]$

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = S(\sigma) = s(\sigma) = \lambda(b-a).$$

1pt

EX(3) :- Méthode 1 :

$$\int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \left[e^{x^2} \right]' dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

1,5 pts

P = 1/4

Méthode 2 : on pose $x = \sqrt{t} \Rightarrow \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

(1,5 pt)

EX(4) :-

i- on pose $u = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{u} \Rightarrow$

$I_1 = \int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = \left[\ln u - \ln(u+1)\right]_1^e = 1 + \ln\frac{2}{1+e}$ (2 pts)

ii- on a $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2-x}{x^2-x+1}$ (1 pt) $\Rightarrow$

$I_2 = \int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int\frac{2-x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} dx$; on pose $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t$

$\int \frac{2-x}{x^2-x+1} dx = \int\frac{\sqrt{3}-t}{1+t^2} dt = \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C$

$= \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + C$

$\Rightarrow$

$I_2 = \frac{1}{3}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$ (2 pts)

EX(5) :

i. $(\cos x)\,y' + (\sin x)\,y = x$ (E)

(a) Solution générale de l'équation homogène :

$(\cos x)\,y' + (\sin x)\,y = 0$ (H)

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{\sin x}{\cos x} dx$

$\Rightarrow \boxed{y = C.\cos x}$

(1 pt)

(b) Solution particulière de (E) :

$P = \frac{2}{4}$

Méthode de la variation de la constante :

on pose : $y(x) = C(x).\cos x$

$(E) \Rightarrow C'(x)\cos^2 x - C(x)\sin x.\cos x + C(x)\sin x.\cos x = x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow C'(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$

$\Rightarrow C(x) = \displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

$= x\tan x - \displaystyle\int \tan x\,dx$ (Par parties)

$= x\tan x + \ln|\cos x| + C$

$\Rightarrow$ $\cancel{y_0(x) = (x\tan x + \ln|\cos x|)}$ solution particulier de (E) (1pt)

$\boxed{y_0(x) = (x\tan x + \ln|\cos x|)\cos x = x\sin x + \cos x.\ln|\cos x|}$

$\Rightarrow$ $\cancel{y(x)} =$

$\boxed{y(x) = x\sin x + \cos x.\ln|\cos x| + c.\cos x}$ (1pt)

↳ solution générale de (E).

ii- $4y'' - 4y' + y = 0$

Eq. Caractéristique : $4r^2 - 4r + 1 = 0$ (0,5 pt)

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$\Rightarrow \exists r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{y = (Ax + B)e^{\frac{1}{2}x}}$. (1 pt)

(iii) $y'' - y' + y = 0$

Eq. caractéristique : $r^2 - r + 1 = 0$ (0,5 pt)

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$\Rightarrow \exists$ deux racine complexes ~~conjuguées~~ conjuguées

$r_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{y = \left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}}$ (1 pt)

Fin