Université Badji Mokhtar-Annaba-
Faculté des Sciences
Département de M.I

L.M.D
Module : Analyse II
Enseignant: Dr Moumeni Abdelkader

Examen 2010

Durée : 1h30

Exercice1 : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et g une fonction intégrable sur $[a,b]$ supposée positive.

1. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.
2. Retrouver la formule de la moyenne.

Exercice2 : Calculer

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\tan^2 x)dx$.
2. $\int x.Arc\sin x.dx$.

Exercice3 : Calculer

1. $\int \frac{dx}{\cos x}$.
2. $\int \frac{dx}{shx}$.

Exercice4 : Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)(x+2)} \; ; \; g(x) = \frac{x^5 - x^2 + x + 1}{(x^2 - x)(x^2 + x + 1)}.$$

1. Décomposer $f(x)$ et $g(x)$ en éléments simples.
2. Calculer le plus simplement possible $\int f(x)dx$; $\int f(x^2)dx$; $\int g(x)dx$.

Exercice5 : Intégrer les équations différentielles suivantes

1. $y - 2xy' = 1$.
2. $y'\cos x + y\sin x = x$.
3. $y'' - 4y = x^2 + 1$.

Barème :

Exo1 : 3 points.
Exo2 : 4 points.
Exo3 : 4 points.
Exo4 : 6 points.
Exo5 : 5 points.

Bonne chance... !

☎ **N.B:** ***Il sera tenu compte de la présentation de la copie.***

Le corrigé de l'examen d'analyse II

Par

Dr. A. Moumeni

Exercice (1) :-

1- f continue sur $[a,b] \Longrightarrow$ f bornée et atteint ses bornes m et M sur $[a,b]$, donc

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$ (0,5)

$$\Longrightarrow \quad m\,g(x) \leq f(x)\,g(x) \leq M\,g(x) \quad (\text{car } g \geq 0)$$

$$\Longrightarrow \quad m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M$$ (0,5)

Comme f est continue, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire :

$$\exists c \in]a,b[\text{ tel que } f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$ (1)

d'où

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

2- on pose $g(x) = 1$ dans la dernière formule

$$\exists c \in]a,b[\text{ tel que } f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$ (1)

Exercice (2) :- "Intégration par partie"

1.- Posons $v(x) = x$ et $du(x) = (1+\tan^2 x)\,dx$, alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\tan^2 x)\,dx = x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \Big[\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2pts

2. Posons $v(x) = \operatorname{Arcsin} x$ et $du(x) = x\,dx$, alors

$$\int x \operatorname{Arcsin} x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arcsin} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arcsin} x - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{4}\left(-\operatorname{Arcsin} x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

2pts

Exercice (3) :-

1.- Posons $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, alors

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int\frac{dt}{1-t^2} = \int\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt$$

$$= \ln\frac{|1+t|}{|1-t|} + C = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C.$$

2pts

2- Posons $\operatorname{th}\frac{x}{2} = t \Rightarrow \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$ et $dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}$, alors

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{2\,dt}{1-t^2} = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|$$

$$= \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2pts