Université Badji Mokhtar-Annaba-
Faculté des Sciences
Département de M.I

L.M.D
Module : Analyse II
Enseignant: Dr Moumeni Abdelkader

Examen de rattrapage

Durée : 1h30

Exercice1 : Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = \lambda :=$ constante.

Montrer que f est Riemann intégrable et $\int_a^b f(x)dx = \lambda(b-a)$.

Exercice2 : Soit f une fonction définie et continue sur $[-a,a]$, $a \succ 0$.

1. Montrer que si f est impaire sur $[-a,a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
2. Calculer $\int_{-5}^{5} x^4 Arc\tan x \cdot dx$

Exercice3 : Calculer

1. $\int (x^2 - x + 3)e^{2x} dx$
2. $\int \frac{dx}{(e^x + 2)^2}$

Exercice4 : Calculer

1. $\int \frac{dx}{x^3(x+1)}$.
2. $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx$.

Exercice5 : Intégrer les équations différentielles suivantes

1. $ydx - xdy = (x^2 - 1)dx$.
2. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.
3. $y'' - 2y' + 5y = 3x^2 + 1$.

Barème :
Exo1 : 3 points.
Exo2 : 4 points.
Exo3 : 4 points.
Exo4 : 4 points.
Exo5 : 6 points.

Bonne chance...!

N.B: ***Il sera tenu compte de la présentation de la copie.***

Corrigé de l'examen de rattrapage d'Analyse II / Juin 2010

Exercice (1) :-

1. Soit $\sigma := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$.

On a

$$\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = M_i = \lambda \quad \text{et} \quad \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = m_i = \lambda, \ \forall_{0 \le i \le n-1}$$

Les sommes de Darbeaux

$$\left.\begin{array}{l} S(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i) = \lambda(b-a) \\ s(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i) = \lambda(b-a) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$S(\sigma) = s(\sigma)$, c'est-à-dire f Riemann intégrable. (2pt)

2. Comme f est Rieman intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(\sigma) = s(\sigma) = \lambda(b-a).$$ (1pt)

Exercice (2) :-

1- f impaire sur $[-a,a] \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) & \forall x \in [-a,a], \ -x \in [-a,a] \\ (ii) & f(-x) = -f(x) \end{cases}$ (1pt)

f continue sur $[-a,a] \Longrightarrow f$ Rieman intégrable sur $[-a,a]$, (1pt)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

or $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx$ (1pt)

Donc $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0.$

2. L'application $x \longmapsto x^4 \operatorname{Arctan} x$ est impaire sur $[-5,5]$ (2pt)

Donc $\displaystyle\int_{-7}^{7} x^4 \operatorname{Arctan} x\,dx = 0$

Exercice (3) :-

1. $$\int (x^2-x+3)e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(x^2-x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x-1)e^{2x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-x+3)e^{2x} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-2x+4)e^{2x} + C$$

2pts

2. $$\int \frac{dx}{(e^x+2)^2} \underset{u=e^x}{=\!=} \int \frac{du}{u(u+2)^2} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{(u+2)^2} - \frac{1}{u+2}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathrm{Ln}\,|u| + \frac{2}{u+2} - \mathrm{Ln}\,|u+2|\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{2}{e^x+2} - \mathrm{Ln}\,(e^x+2)\right) + C$$

2pts

Exercice (4) :-

1. La décomposition en élément simples fournit :

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

d'où $$\int \frac{dx}{x^3(x+1)} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \mathrm{Ln}\,|x| - \mathrm{Ln}\,|x+1| + C$$ 2pts

2. $$\int \frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx$$

$$= x + \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

$$= x + \mathrm{Arctan}\,(x+1) + C$$

2pts

Exercice (4) :-

1. $y\,dx - x\,dy = (x^2-1)\,dx \Rightarrow d\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx$

$\Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{x} - x + c$

d'où

$$\boxed{y = -x^2 + cx - 1}$$

1pt

2. $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} := \frac{\frac{y}{x} - \frac{x}{y}}{2} \Rightarrow$ Equation homogène.

on pose

$$y = tx$$

$\Rightarrow t + x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2-1}{2t} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{2t\,dt}{t^2+1} = -\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}$

$\Rightarrow x = \frac{c}{t^2+1}$

et donc

$$y = tx = \frac{ct}{t^2+1}$$

1pt

on a

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{(t^2+1)^2}(t^2+1) = \frac{c^2}{t^2+1} = c.\frac{c}{t^2+1} = cx$$

$\Rightarrow$ La solution est donnée par l'équation caractéristique : $\boxed{x^2 + y^2 - cx = 0}$

1pt

3. $y'' - 2y' + 5y = 3x^2 + 1 \quad (E)$

ⓐ Solution Générale de (E) sans second membre : ie :

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Equation caractéristique $r^2 - 2r + 5 = 0 \implies \Delta = -16 < 0$

$\implies \exists\, r_1$ et r_2 tel que $r_1 = 1+2i$ et $r_2 = 1-2i$

$\implies y = e^{x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$; A et B deux constantes.

1pt

ⓑ Solution particulière de (E) :

Comme le coefficient de y est non nul et le second membre est un polynome, on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_0 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (*)$$

En portant $(*)$ dans (E) $\implies$

$$\boxed{\alpha = \frac{3}{5}} \; ; \; \boxed{\beta = \frac{12}{25}} \; ; \; \boxed{\gamma = \frac{19}{125}}$$

1pt

ⓒ La solution générale de (E) est :

$$\boxed{y = e^{x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{3}{5}x^2 + \frac{12}{25}x + \frac{19}{125}}$$

1pt