UNIVERSITÉ DE ANNABA
DÉPARTEMENT DE MIAS

Année 2009-2010

Module: $\mathscr{A}$lgèbre 2
$\mathscr{D}$urée: 1h30

Sujet d'examen

Exercice 1

(I) Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, montrer que si les vecteurs u v, w sont linéairement indépendants dans $\mathbb{E}$, il en est de même pour les vecteurs $u+v$, $v+w$, $w+u$.

(II) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs:

$$(2,-1,2),\ (-1,1,-1),\ (-1,2,-1),$$

(1) Donner une base pour F et déterminer sa dimension;

(2) Compléter la base de F de façon à obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par f(x,y,z)=(x+y+z,2x+z,2x+y)

(a) Déterminer $\ker f$ (base et dimension);

(b) Montrer que f est bijective;

(c) Déduire le rang de f.

(d) Déterminer la matrice A associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$;

(e) Déduire que A est inversible;

(f) Déterminer la matrice associée à f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$g(x,y,z,t) = (x+y-z+2t, x-2y-z+2t, x+y+z+2t)$$

(1) Déterminer Img. Déterminer une base de Img ainsi que sa dimension.

(2) Déduire que g est surjective.

(3) Est-ce que l'application g peut-être bijective? pourquoi?

Exercice 4

Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{aligned} x+3y+\alpha z &= 1 \\ 2x-y+z &= 2 \\ -x+y &= 3 \end{aligned} \qquad (\mathscr{S})$$

(1) Ecrire $\mathscr{S}$ sous la forme matricielle.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le système $\mathscr{S}$ soit de Cramer. Résoudre dans ce cas $\mathscr{S}$.

$\mathscr{B}$on courage

♦$\mathscr{B}$arème: exercice 1 (5pts); exercice 2 (6.5pts); exercice 3 (4.5pts) ; exercice 4 (4pts).