guide_pharmacie@yahoo.fr

Université de Batna

Faculté de Médecine

Département de Pharmacie

2005/2006

Cours de Mathématiques

1ère Année Pharmacie

Chapitre IV : Les méthodes numériques

D'après le cahier de :

I. Hadef

Created by: T. Djebaili

Chapitre 4 : Les méthodes Numériques

1/ La Courbe expérimentale et l'interpolation graphique

En generale, les résultats d'une expérience présente sous la forme d'un tableau dit de correspondance

exp: Soit les résultats expérimentaux suivantes :

t (min).	1	5	10	20	30	40.
C (t) (mg/l)	24,5	10,3	8,5	7,45	7,50	4,25

c (t) est concentration d'un produit variable en fonction du temps (t), on donne la representation graphique

La courbe obtenue est dit : La courbe expérimentale.

On a les 2 questions suivantes :

* Quelle est la concentration au temps $t = 7$ min ?

graphiquement entre 8 et 9 mg/l

* A quel instant la concentration est elle de 15 mg/l ?

graphiquement entre 3 et 4 min

Dans les 2 cas on utilise l'interpolation graphique car on ne connait pas l'experience analytique de C en fonction de t.

2/ Calcul approché de derrivées

Nous verrons comment faire un calcul approché de la derrivée de f sans connaitre analytiquement la fonction de f.

Definition : Si f est mesurée expérimentalement en 2 point a et a+h. la derivée premiere f'(a) est estimée par :

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

car $\begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$.

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interpolation linéaire

Definition: Si f est une fonction expérimentalement en 2 point a et $a+h$, avec h est petit on suppose qu'entre a et $a+h$ la variation est lineaire pour $a < x < a+h$

$f(x)$ est estimée par :

$$f(x) \simeq f(a) + (x - a) f'(a)$$

et $f'(a) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

$$\Rightarrow f(x) \simeq f(a) + (x-a) \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Suite de l'exp 1 :

On estime $C(7)$ par interpolation lineaire

$a < 7 < a+h$.

$$C(t) = C(a) + (t - a) \frac{C(a+h) - C(a)}{h}$$

$5 < 7 < 10 \quad h = 5, \quad t = 7.$

donc $C(7) \simeq 9,58$ mg/l.

3/ Calcul approché d'intégrale :

le but est donner une valeur approché de l'intégrale d'une fonction continue définie entre a et b, $\int_a^b f(X)\,dx$

dans les cas :

1/ Soit f résulte de mesure expérimentale sur quelques points

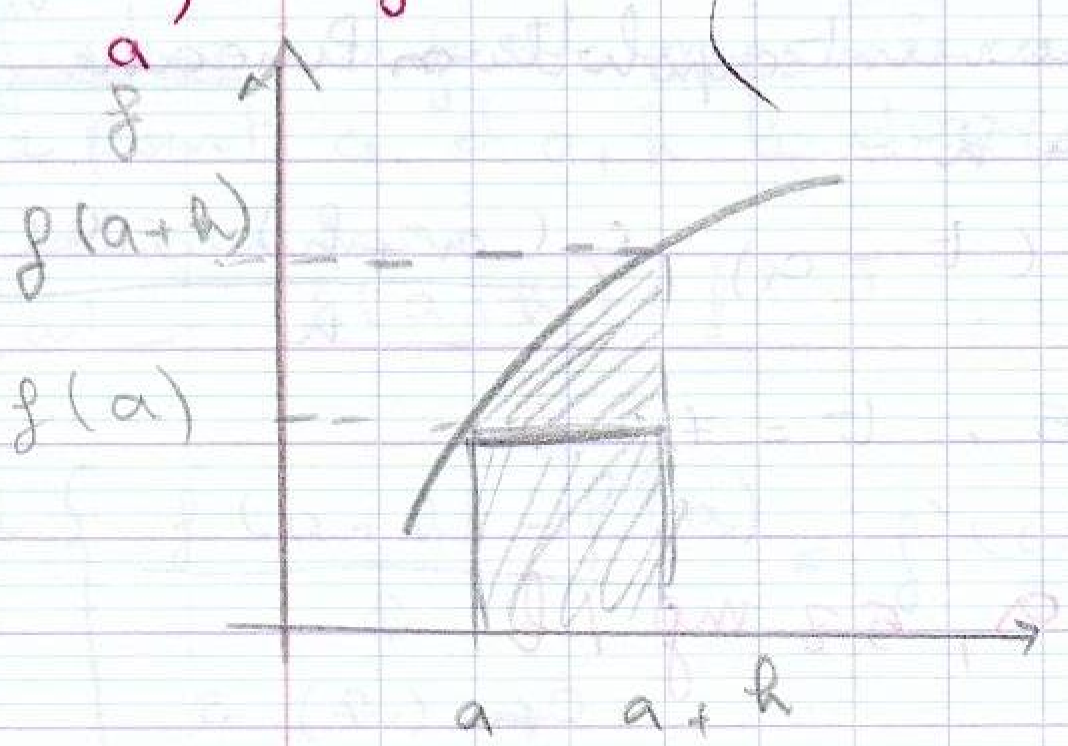
2/ le calcul de la primitive F de f est impossible

* **méthode de rectangles :**

Définition

La fonction f est mesurée expérimentalement en deux points a et a + h.

$I = \int_a^{a+h} f(t)\,dt$ estimé par $I^a \simeq h\,f(a)$



En générale :

Soient $(n+1)$ point $(a = x_0, x_1, \dots x_n)$.

défini par : $\begin{cases} x_i = a + ih \,/\, h = \dfrac{b-a}{n} \\ i = \overline{0, n} \end{cases}$

La fonction f est mesurées en ces $(n+1)$ points.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,h$$

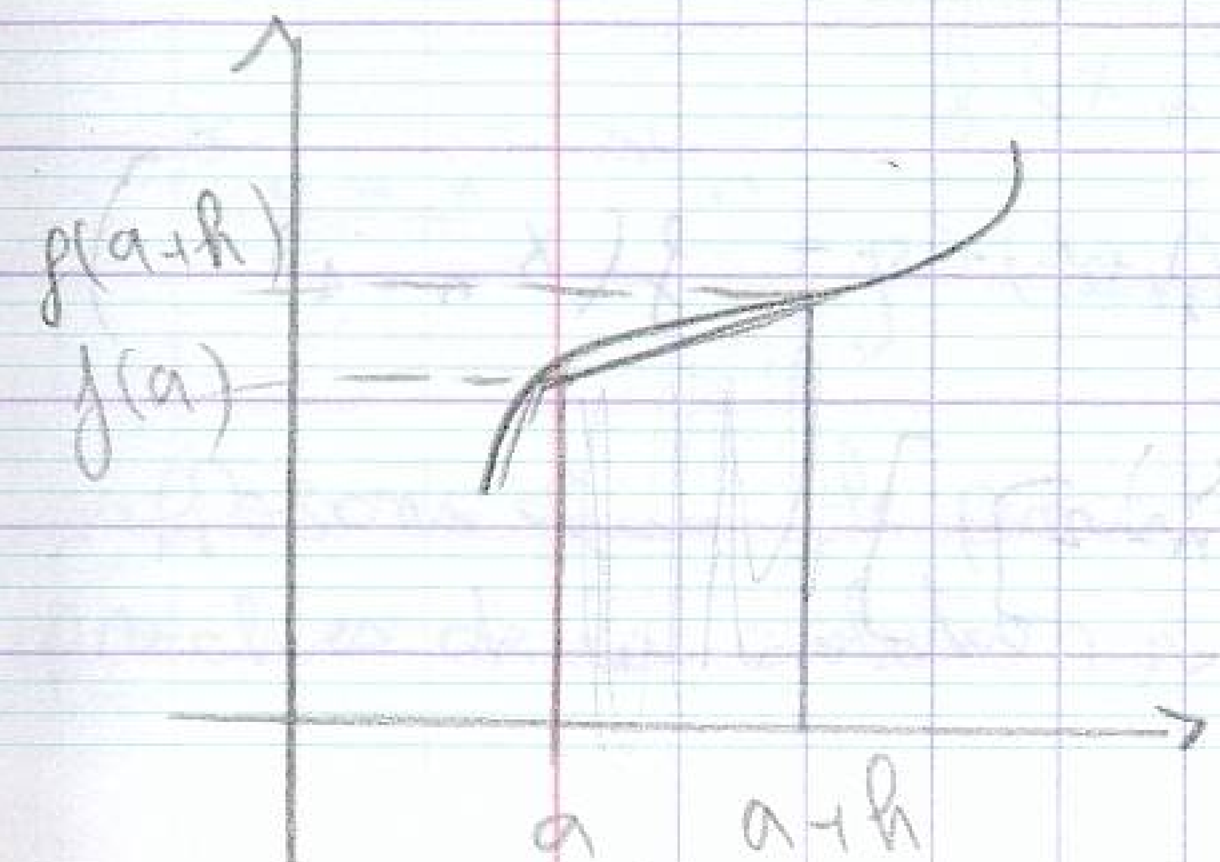
$$\simeq h f(a) + h f(x_1) + \dots + h f(x_{n-1}).$$

* Methode de trapeze

Definition : La fonction f est mesurée expérimentalement ~~est~~ 2 points a, $a+h$:

$I = \int_a^{a+h} f(t)\,dt$ est estimé par

$$I \simeq \frac{h}{2}\left[f(a) + f(a+h)\right].$$



* méthode de Simpson :

Définition : la fonction f est mesurée en 3 points régulièrement repartis.

$a - h$, a, $a + h$

$$I = \int_{a-h}^{a+h} f(t)\, dt = \frac{h}{3} [f(a-h) + 4f(a) + f(a+h)]$$

En générale, pour $(n+1)$ points régulièrement repartis : $[a = x_0, x_1, \ldots, a_n = b]$.
le nbre des points est impair

$$x_i = a + ih \quad \begin{cases} n = 2p \\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\simeq \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=0}^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2i}) \right]$$

$$\simeq \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 4 \left(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) \right) + 2 \left[f(x_2) + \cdots f(x_{n-2}) \right] \right]$$

4/ Resolution d'equation (Methode de Newten Raphson)

le but de la methode de Newton - Raphson est de trouver la valeur d'une solution r d'une equation telles que $f(r) = 0$.
equation qui ne peut être resolue par une methode analytique. La fonction f doit être continue, monotone et derivable sur l'intervalle étudier.
soit x_0 un point de départ. la tengente en x_0 a pour pente $f'(x_0)$ on determine l'abscisse x_1 de l'intéraction entre la tengente et l'axe des abscisses : $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

supposons que le point obtenu x_n soit trés proches de la solution r alors $f(x_n) \simeq 0$ d'où

$$\begin{cases} |x_{n-1} - x_n| \to 0 \\ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \end{cases}$$

- si $f'(x_n) = 0$ la méthode ne fonction pas
- de plus de départ est choisi proche a la solution.
- plus on s'assure la convergence vers la solution

Algorithme de Newton - Rapson.

Rechercher $f(r) = 0$.

1/ Se fixer ε (précision recherche sur l'approximation de r).

2/ mettre l'équation sous la forme $f(x) = 0$.

3/ calculer $f'(x)$.

4/ choisir un point de depart x_0.

5/ calculer $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

6/ Comparer $|x_1 - x_0| < \varepsilon$

- si $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ fin de procedure $r = h$.
- si $|x_1 - x_0| > \varepsilon$. x_1 devient un nouveau point de depart on calcule $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f(x_1)}$ ..

$|x_2 - x_1| < \varepsilon$ . . . . —

$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$