EPREUVE DE MATHS 1 (SM)

UMBB-FS : 09/03/2016

Exercice 1 : (5.5 pts)

I. Evaluer les formules suivantes en utilisant les tables de vérités.

1) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ 2) $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow \bar{Q})$

II. On considère les ensembles suivants :

$\boldsymbol{A} = \{ 1, 2, 5 \}$, $\boldsymbol{B} = \{ \{1, 2\}, 5 \}$, $\boldsymbol{C} = \{ \{ 1, 2, 5 \} \}$, $\boldsymbol{D} = \{\emptyset, \{1, 2\}, 5 \}$

$\boldsymbol{E} = \{ 5, 1, 2 \}$, $\boldsymbol{F} = \{ \{1, 2\}, \{5\} \}$, $\boldsymbol{G} = \{ \{1, 2\}, \{5\}, 5 \}$, $\boldsymbol{H} = \{5, \{1\}, \{2\}\}$

1) Quelles sont les égalités ou inclusions ou appartenance existant entre ces ensembles ? (citer en 5 à 6)

2) Donner le cardinal (le nombre d'éléments) de chacun de ces ensembles ?

3) Détérminer $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{G}$ et $C_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{A}}$ (le complémentaire de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$)**.**

4) Détérminer $\mathcal{P}(\boldsymbol{D})$, l'ensemble des parties de l'ensemble $\boldsymbol{D}$**.**

Exercice 2 : (3 pts)

Soit $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, l'application définie par $f\big((n, m)\big) = m.n$, $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, donner <u>un</u> antécédent de n par f.

2) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{3\})$ et $f^{-1}(\{6\})$.

3) f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Exercice 3 : (3 pts)

I. On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{S}$ par : $a\, \mathcal{S}\, b \Leftrightarrow a \leq b + 1$

Vérifier que $0\, \mathcal{S}\, 1$ et $1\, \mathcal{S}\, 0$. Donner une conclusion directe.

II. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par : $a\, \mathcal{R}\, b \Leftrightarrow a < b + 1$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4 : (3 pts)

On munit l'ensemble $G = [0, +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$\forall\, x, y \in G\,, x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1) Montrer que $*$ est commutative , associative , et que 0 est l'élément neutre.

2) Qels sont les éléments symétrisables dans G par $*$?

3) Montrer que l'application $\varphi : x \mapsto x^2$ est un homomorphisme du groupe $(G\,, *)$ vers le groupe $(\mathbb{R}\,, +)$

Exercice 5 : (5.5 pts)

I. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + U_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\,, U_n > 2$.

2) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone

3) Etudier sa convergence et donner sa limite eventuelle.

II. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1}$

2) $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right)$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+1}$

4) $\lim_{n\to+\infty} \left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right) \sin n$

5) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n\, \frac{4n-1}{2n+3}$

Corrigé de l'EPREUVE de MATHS 1 (SM)

Exercice 1 : (5.5 pts)

III. Evaluer les formules suivantes en utilisant les tables de vérités.

1) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$ 2) $(P \Leftrightarrow Q) \wedge (P \Leftrightarrow \bar{Q})$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	**(1)**	$P \Leftrightarrow Q$	$\bar{Q}$	$P \Leftrightarrow \bar{Q}$	**(2)**
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0

Conclusion : quelque soit la valeur de vérité des propositions P et Q, la propriété (1) est vraie contrairement à la propriété (2) qui est fausse.

IV. On considère les ensembles suivants :

$\boldsymbol{A} = \{1, 2, 5\}$, $\boldsymbol{B} = \{\{1, 2\}, 5\}$, $\boldsymbol{C} = \{\{1, 2, 5\}\}$, $\boldsymbol{D} = \{\emptyset, \{1, 2\}, 5\}$

$\boldsymbol{E} = \{5, 1, 2\}$, $\boldsymbol{F} = \{\{1, 2\}, \{5\}\}$, $\boldsymbol{G} = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}$, $\boldsymbol{H} = \{5, \{1\}, \{2\}\}$

1) Quelles sont les égalités ou inclusions ou appartenances existant entre ces ensembles ?(citer en 5 à 6)

- On a : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{E} \in \boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{G}$.

2) Donner le cardinal (le nombre d'éléments) de chacun de ces ensembles ?

- $Card(\boldsymbol{A}) = 3$, $Card(\boldsymbol{B}) = 2$, $Card(\boldsymbol{C}) = 1$, $Card(\boldsymbol{D}) = 3$,

$Card(\boldsymbol{E}) = 3$, $Card(\boldsymbol{F}) = 2$, $Card(\boldsymbol{G}) = 3$, $Card(\boldsymbol{H}) = 3$.

3) Détérminer $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{G}$ et $C_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{A}}$ (le complémentaire de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$).

- $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{5}\}$, $\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{H} = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5, \{1\}, \{2\}\}$, $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{G} = \{1, 2\}$ et comme $\boldsymbol{A} \not\subset \boldsymbol{B}$ alors on ne peut pas parler de $C_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{A}}$, le complémentaire de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$.

4) Détérminer $\mathcal{P}(\boldsymbol{D})$, l'ensemble des partis de l'ensemble $\boldsymbol{D}$.

- $\mathcal{P}(\boldsymbol{D}) = \{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1, 2\}\}, \{5\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, 5\}, \{\{1, 2\}, 5\}, \{\emptyset, \{1, 2\}, 5\} \}$

(Rappelons que $cad(\mathcal{P}(\boldsymbol{D})) = 2^{card\ (\boldsymbol{D})} = 2^3 = 8$).

Exercice 2 : (03pts)

Soit l'application $f: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f\big((n,m)\big) = m.n$, $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, donner un antécédent de n par f.

- On cherche un couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant l'équation $f\big((a,b)\big) = n$.

On a: $f\big((a,b)\big) = n \Leftrightarrow (a.b = n) \Rightarrow (a\ et\ b$ sont des diviseurs de n). Ainsi, il suffit de prendre, par exemple, $a = 1\ et\ b = n$ alors $(1,n)$ est l'un des antécédents de n.

2) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{3\})$ et $f^{-1}(\{6\})$.

- $f^{-1}(\{1\}) = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 / f(n,m) = 1\} = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 / n.m = 1\}$
  la condition $n.m = 1$ implique que n et m sont inversibles, or le seul entier naturel inversible est 1 d'où $n = m = 1$ et par suite $f^{-1}(\{1\}) = \{(1,1)\}$.
- $f^{-1}(\{3\}) = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 / f(n,m) = 3\} = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 / n.m = 3\}$
  la condition $n.m = 3$ implique que n et m divisent 3 ,qui et premier, alors $n, m \in \{1,3\}$. Il en découle que $f^{-1}(\{3\}) = \{(1,3),\ (3,1)\}$.
- $f^{-1}(\{6\}) = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 / f(n,m) = 6\} = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 / n.m = 6\}$
  $(n.m = 6) \Rightarrow (n\ et\ m\ divisent\ 6) \Rightarrow\ n, m \in \{1,2,3,6\}$, on obtient ainsi
  $f^{-1}(\{6\}) = \{(1,6), (2,3), (3,2), (6,1)\}$

3) f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

- d'après ci-dessus :

f n'est pas injective puisque 3 admet deux antécédents différents $(1,3)$ et $(3,1)$.

f est surjective puisque chaque $n \in \mathbb{N}$ admet au moins un antécédent $(1,n)$.

Exercice 3 : (03 pts)

I. On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{S}$ par : $a\,\mathcal{S}\,b \Leftrightarrow a \leq b + 1$

Vérifier que $0\,\mathcal{S}\,1$ et $1\,\mathcal{S}\,0$. Donner une conclusion directe.

- $0 \leq 1 + 1 \Rightarrow 0\,\mathcal{S}\,1$ et $1 \leq 0 + 1 \Rightarrow 1\,\mathcal{S}\,0$. On conclut que la relation $\mathcal{S}$ n'est pas antisymétrique

II. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par : $a\,\mathcal{R}\,b \Leftrightarrow a < b + 1$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

- $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ est réflexive , antisymétrique et transitive.
- $\mathcal{R}$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}, x\,\mathcal{R}\,x$

  $\forall x \in \mathbb{Z}, x < x+1 \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,x \Rightarrow \mathcal{R}\ est\ réflexive$
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}, x\,\mathcal{R}\,y\ et\ y\,\mathcal{R}\,x \Rightarrow x = y$

  $\forall x, y \in \mathbb{Z},\ (x\,\mathcal{R}\,y\ et\ y\,\mathcal{R}\,x) \Leftrightarrow (\,x < y+1$ et $y < x+1)$

  $\Rightarrow (x \le y\ et\ y \le x) \Rightarrow (x = y) \Rightarrow \mathcal{R}$ est antisymétrique
- $\mathcal{R}$ est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{Z}, x\,\mathcal{R}\,y\ et\ y\,\mathcal{R}\,z \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,z$

  Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}\ \ tels\ que\ \ x\,\mathcal{R}\,y\ et\ y\,\mathcal{R}\,z \Leftrightarrow x < y+1\ et\ y < z+1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x \le y\ et\ y \le z \Rightarrow x \le z \Rightarrow x < z+1 \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,z \Rightarrow \mathcal{R}\ est\ transitive.$

  Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Exercice 4 : (03pts)

On munit l'ensemble $G = [0, +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$\forall\, x, y \in G, x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1) Montrer que $*$ est commutative , associative , et que 0 est l'élément neutre.

- ($*$ est commutative)$\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y \in G, x * y = y * x$

  $\forall\, x, y \in G, x * y = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y^2+x^2} = y * x$ (c.q.f.d)
- ($*$ est associative) $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$

  $\forall\, x, y, z \in G$,

  $(x * y) * z = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right) * z = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (I)$

  $x * (y * z) = x * \left(\sqrt{y^2+z^2}\right) = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (II)$

  $(I) = (II) \Rightarrow$ ($*$ est associative)
- (0 est l'élément neutre pour $*$)$\Leftrightarrow \forall\, x \in G, x * 0 = x$.

  $\forall\, x \in G,\ \ x * 0 = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = |x| = x\ , car\ x \ge 0$.

  Comme $*$ est commutative , $0 * x = x * 0 = x$ et finalement 0 est en effet

L'élémént neutre .

2) Soit $x \in G$, supposons que x admette un symétrique y

$$x * y = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Ce qui prouve que seul 0 est symétrisable par $*$ dans G.

3) Montrer que l'application $\varphi: x \mapsto x^2$ est un homomorphisme du groupe $(G, *)$ vers le groupe $(\mathbb{R}, +)$.

- φ est un homomorphisme $\Leftrightarrow \big(\forall x, y \in G, \varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)\big)$.

Soient $x, y \in G$, on a :

$$\varphi(x * y) = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2 = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ (c.q.f.d).}$$

<u>Exercice 5 :</u> (5.5 pts)

I. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + U_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 2$.

- par reccurence : on a $U_0 = 4 > 2$, supposons que $U_n > 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $U_{n+1} > 2$.

$$U_{n+1} > 2 \Leftrightarrow 3 - \frac{4}{2 + U_n} > 2 \Leftrightarrow -\frac{4}{2 + U_n} > -1 \Leftrightarrow \frac{4}{2 + U_n} < 1$$
$$\Leftrightarrow 2 + U_n > 4 \Leftrightarrow U_n > 2$$

Comme $U_n > 2$ par hypothèse de récurrence alors $U_n > 2 \Rightarrow U_{n+1} > 2$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 2$

2) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite monotone .

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} - U_n = 3 - \frac{4}{2 + U_n} - U_n = \frac{-U_n{}^2 + U_n + 2}{2 + U_n} = \frac{(2 - U_n)(U_n + 1)}{2 + U_n}$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 2$, alors $\frac{(U_n + 1)}{2 + U_n} > 0$ *et* $(2 - U_n) < 0$ donc $U_{n+1} - U_n < 0$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante

3) Etudier sa convergence et donner sa limite eventuelle.

- On a montré que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 2, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. U_{n+1} tend vers ℓ et $f(U_n)$ tend vers $f(\ell)$.

Donc : $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = 3 - \frac{4}{2+\ell} \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 2)(\ell + 1) = 0$
$\Rightarrow (\ell = 2 \ ou \ \ell = -1)$. Comme $U_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut $\ell \geq 2$;
on a donc $\ell \neq -1$ et $\ell = 2$.

II. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+1}\right)\frac{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1-(2n+1)}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{\frac{3n+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3n+1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2n+1}{n^2}}\right)} = +\infty$$

2) $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{n}\right) = \sin(\pi) = 0.$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(2\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 0.$

4) $\lim_{n\to+\infty} \left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right)\sin n$

Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow (\sin n)_n$ *est une suite bornée*
Et on a $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right) = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right)(\sin n) = 0$

Ou par le théorème d'encadrement :
Comme $e^{-4n} + \frac{1}{n} \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin n \leq 1$ alors
$-\left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right) \leq \left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right)(\sin n) \leq \left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right)$

Et comme $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right) = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-4n} + \frac{1}{n}\right)\sin n = 0$

5) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{4n-1}{2n+3}$

- Notons $U_n = (-1)^n \frac{4n-1}{2n+3}$. cette suite ne converge pas puisque la sous- suite (U_{2n}) tend vers 2 : $(U_{2n} = (-1)^{2n} \frac{8n-1}{4n+3} = \frac{8n-1}{4n+3} \longrightarrow \frac{8}{4} = 2)$.

Tandisque la sous-suite U_{2n+1} tend vers -2 : $(U_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \frac{8n+3}{4n+5} = \frac{8n+3}{4n+5} \longrightarrow -\frac{8}{4} = -2.$

Conclusion la suite (U_n) n'a pas de limite et diverge.