

EXAMEN FINAL MATHS1 DURÉE: 2H00 (2014/2015)

Exercice 01 :

I) soit f une application de R dans R . On définit la relation R sur l'ensemble R par

$$\forall x, y \in R, xRy \iff f(x) = f(y)$$

1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

2) Quelle est la classe d'équivalence d'un nombre x tel que $f(x) = x^2 - x + 2$

II) soit ε la relation définie sur $]1, +\infty[$ par:

$$x\varepsilon y \iff \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$$

1) Montrer que ε est une relation d'ordre.

Exercice 02: soit f l'application définie comme suit

$$f:]1, +\infty[\longrightarrow]0, 1[; \text{ telle que } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

1) démontrer que f est injective.

2) démontrer que f est surjective.

3) déterminer $f^{-1}]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$.

Exercice 03 :

I) soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) donner D_f .

2) Etudier la continuité de f sur D_f .

3) Etudier la dérivabilité de f sur D_f .

4) déterminer la dérivée de la fonction f .

II) soit g la fonction définie comme suit:

$$g(x) = \frac{x}{x^2 - |x|}$$

1) la fonction g admet-elle un prolongement par continuité au point 0?

Exercice 04 :

I) Déterminer le développement limité à l'ordre donné au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{1 + \ln(1+x)}, \quad n = 3$$

$$f_2(x) = \sqrt{1+x+x^2}, \quad n = 2$$

II) soit f la fonction définie pour tout $x \in R$ par

$$f(x) = \arctan(x)$$

1) calculer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction dérivée \dot{f} .

2) En déduire le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction f .

3) calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction g définie par:

$$g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$