Equations Différentielles du second ordre à coefficients constants.

Etape 0 : On cherche à résoudre l'équation différentielle $(\mathbf{E}) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$, où a, b et c sont des constantes réelles.

On associe à $(\mathbf{E})$ l'équation homogène $(\mathbf{H}) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

Etape 1 : On cherche les solutions générales $y_G(x)$ de $(\mathbf{H}) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

1. **Equation caractéristique.** On associe à $(\mathbf{H})$ l'équation caractéristique $(\mathbf{EC})$ suivante
$$(\mathbf{EC}) : ar^2 + br + c = 0,$$
et on note $\Delta = (b^2 - 4ac)$ son discriminant.

2. L'ensemble des solutions générales $y_G(x)$ de $(\mathbf{H})$ sont données par le tableau suivant.

Discriminant Δ	Racines de l'équation $(\mathbf{EC})$	Ensemble des solutions de $(\mathbf{H})$: $S_{(\mathbf{H})}$
$\Delta > 0$	Deux racines réelles $\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \\ r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$	$S_{(\mathbf{H})} = \{y_G(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
$\Delta = 0$	Une racine double : $r_1 = r_2 = r = \dfrac{-b}{2a}$.	$S_{(\mathbf{H})} = \{y_G(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
$\Delta < 0$	Deux racines complexes $\begin{cases} r_1 = \alpha + i\beta, \\ r_2 = \alpha - i\beta. \end{cases}$	$S_{(\mathbf{H})} = \{y_G(x) = [\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)]\, e^{\alpha x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Etape 2 : On cherche une solution particulière $y_p(x)$ de $(\mathbf{E}) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$.

1. **Principe de superposition.** Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, on cherche une solution particulière $y_{p_k}(x)$ de l'équation $(\mathbf{E_k})$ $\;ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 = f_k(x)$. Une solution particulière $y_p(x)$ de $(\mathbf{E})$ est alors donnée par
$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_n}(x).$$
2. **Utilisation du tableau.** On cherche une solution particulière $y_p(x)$ sous une certaine forme en utilisant le tableau suivant.
3. **Calcul de $y_p(x)$.** Une fois la forme de $y_p(x)$ identifiée, on calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ puis on injecte ces quantités dans l'équation $(\mathbf{E})$ ce qui permet d'identifier les paramètres définissant $y_p(x)$.

Etape 3 : Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont données par :
$$S_{(\mathbf{E})} = \{y(x) = y_G(x) + y_p(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Etape 4 : Si il y a des conditions initiales $y(x_0) = z_0$ et $y'(t_0) = s_0$, on calcule les constantes λ et μ correspondantes en injectant les conditions initiales dans la solution trouvée dans l'étape 3. On obtient alors une unique solution au problème.

Tableau : Dans ce tableau, $P(x)$ est un polynôme, ω, α, β et k sont des nombres réels. D'autre part, $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$ à déterminer, et $A, B, \ldots$ sont des constantes réelles à déterminer.

Second membre $f(x)$	Solution Particulière $y_p(x)$
$f(x) = k = cste$	$y_p(x) = A = cste$
$f(x) = P(x)$	$\begin{cases} y_p(x) = Q(x) & \text{si } c \neq 0, \\ y_p(x) = xQ(x) & \text{si } c = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ y_p(x) = x^2 Q(x) & \text{si } c = b = 0. \end{cases}$
$f(x) = \alpha e^{kx}$	$\begin{cases} y_p(x) = Ae^{kx} & \text{si } k \text{ pas racine de } (\mathbf{EC}) : k \neq r_1, k \neq r_2, \\ y_p(x) = Axe^{kx} & \text{si } k \text{ racine simple de } (\mathbf{EC}) : r_1 \neq r_2, k = r_1 \text{ ou } r_2, \\ y_p(x) = Ax^2 e^{kx} & \text{si } k \text{ racine double de } (\mathbf{EC}) : r_1 = r_2 = r = k. \end{cases}$
$f(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$	$\begin{cases} y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) & \text{si } (i\omega) \text{ pas racine de } (\mathbf{EC}), \\ y_p(x) = x\left[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right] & \text{si } (i\omega) \text{ racine de } (\mathbf{EC}). \end{cases}$
$f(x) = P(x)e^{kx}$	$\begin{cases} y_p(x) = Q(x)e^{kx} & \text{si } k \text{ pas racine de } (\mathbf{EC}) : k \neq r_1, k \neq r_2, \\ y_p(x) = xQ(x)e^{kx} & \text{si } k \text{ racine simple de } (\mathbf{EC}) : r_1 \neq r_2, k = r_1 \text{ ou } r_2, \\ y_p(x) = x^2 Q(x)e^{kx} & \text{si } k \text{ racine double de } (\mathbf{EC}) : r_1 = r_2 = r = k. \end{cases}$
$f(x) = e^{kx}\left[\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)\right]$	$\begin{cases} y_p(x) = e^{kx}\left[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right] & \text{si } (k + i\omega) \text{ pas racine de } (\mathbf{EC}), \\ y_p(x) = xe^{kx}\left[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right] & \text{si } (k + i\omega) \text{ racine de } (\mathbf{EC}). \end{cases}$