1 Equations Différentielles du premier ordre à coefficients constants.

Etape 0 : On cherche à résoudre l'équation différentielle $(\mathbf{E})$: $y'(x) + ay(x) = f(x)$.

On associe à $(\mathbf{E})$ l'équation homogène $(\mathbf{H})$: $y'(x) + ay(x) = 0$.

Etape 1 : On cherche les solutions générales $y_G(x)$ de $(\mathbf{H})$: $y'(x) + ay(x) = 0$.

Elles sont données par :

$$S_{(\mathbf{H})} = \left\{ y_G(x) = \lambda e^{-ax}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Etape 2 : On cherche une solution particulière $y_p(x)$ de $(\mathbf{E})$: $y'(x) + ay(x) = f(x)$.

1. **Principe de superposition.** Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, on cherche une solution particulière $y_{p_k}(x)$ de l'équation $(\mathbf{E_k})$ $y'(x) + ay(x) = f_k(x)$. Une solution particulière $y_p(x)$ de $(\mathbf{E})$ est alors donnée par
$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_n}(x).$$
2. **Utilisation du tableau.** On cherche une solution particulière $y_p(x)$ sous une certaine forme en utilisant le tableau suivant. Dans ce tableau, $P(x)$ est un polynôme, ω, α, β et k sont des nombres réels. D'autre part, $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$, et $A, B, C\ldots$ sont des constantes réelles à déterminer.
3. **Calcul de $y_p(x)$.** Une fois la forme de $y_p(x)$ identifiée, on calcule $y_p'(x)$ puis on injecte ces quantités dans l'équation $(\mathbf{E})$ ce qui permet d'identifier les paramètres définissant $y_p(x)$.

Second membre $f(x)$	Solution Particulière $y_p(x)$	Exemple avec $(\mathbf{E})$: $y' - 2y = f(x)$, $(a = -2)$
$f(x) = k = cste$	$y_p(x) = A = cste$	Si $f(x) = 3$, on cherche $y_p(x) = A$.
$f(x) = P(x)$	$\begin{cases} y_p(x) = Q(x) & \text{si } a \neq 0 \\ y_p(x) = xQ(x) & \text{si } a = 0. \end{cases}$	Si $f(x) = x^3 + x - 1$, $(a \neq 0)$, on cherche $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
$f(x) = \alpha e^{kx}$	$\begin{cases} y_p(x) = Ae^{kx} & \text{si } k \neq -a \\ y_p(x) = Axe^{kx} & \text{si } k = -a. \end{cases}$	Si $f(x) = 5e^{2x}$, $(k = 2 = -a)$, on cherche $y_p(x) = Axe^{2x}$.
$f(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$	$y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$	Si $f(x) = 3\cos(2x)$, on cherche $y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$.
$f(x) = P(x)e^{kx}$	$\begin{cases} y_p(x) = Q(x)e^{kx} & \text{si } k \neq -a \\ y_p(x) = xQ(x)e^{kx} & \text{si } k = -a. \end{cases}$	Si $f(x) = (x^2 - 2)e^{3x}$, $(k = 3 \neq -a)$, on cherche $y_p(x) = (Ax^2+Bx+C)e^{3x}$.
$f(x) = [\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)]\, e^{kx}$	$y_p(x) = [A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]\, e^{kx}$	Si $f(x) = 2\sin(5x)e^{2x}$, on cherche $y_p(x) = [A\cos(5x) + B\sin(5x)]\, e^{2x}$.

Etape 3 : Les solutions de (**E**) sont données par :

$$S_{(\mathbf{E})} = \left\{ y(x) = y_G(x) + y_p(x) = \lambda e^{-ax} + y_p(x), \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Etape 4 : Si il y a une condition initiale $y(x_0) = z_0$, on calcule la constante λ correspondante en injectant la condition initiale dans la solution trouvée dans l'étape 3. On obtient une unique solution au problème.

2 Equations Différentielles du premier ordre à coefficients non constants.

Etape 0 : On cherche à résoudre l'équation différentielle (**E**) : $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$.

On associe à (**E**) l'équation homogène (**H**) : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$.

Etape 1 : On cherche les solutions générales $y_G(x)$ de (**H**) : $y'(x) + a(x)y(x) = 0$.

Elles sont données par :

$$S_{(\mathbf{H})} = \left\{ y_G(x) = \lambda e^{-A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

Etape 2 : On cherche une solution particulière $y_p(x)$ de (**E**) : $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$.

1. **Principe de superposition.** Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, on cherche une solution particulière $y_{p_k}(x)$ de l'équation $(\mathbf{E_k})$ $\quad y'(x) + a(x)y(x) = f_k(x)$. Une solution particulière $y_p(x)$ de (**E**) est alors donnée par
$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_n}(x).$$
2. **Méthode de la Variation de la Constante (MVC).** On cherche une solution particulière $y_p(x)$ sous la forme
$$y_p(x) = \lambda_p(x) e^{-A(x)},$$
où $A(x)$ est la fonction calculée à l'étape 1 et $\lambda_p(x)$ une fonction à déterminer.
La fonction $\lambda_p(x)$ vérifie l'équation différentielle
$$\lambda_p'(x) e^{-A(x)} = f(x),$$
soit
$$\lambda_p'(x) = f(x) e^{+A(x)}.$$
On détermine alors la fonction $\lambda_p(x)$ en intégrant cette dernière relation.

Etape 3 : Les solutions de (**E**) sont données par :

$$S_{(\mathbf{E})} = \left\{ y(x) = y_G(x) + y_p(x) = \lambda e^{-A(x)} + \lambda_p(x) e^{-A(x)}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Etape 4 : Si il y a une condition initiale $y(x_0) = z_0$, on calcule la constante λ correspondante en injectant la condition initiale dans la solution trouvée dans l'étape 3. On obtient une unique solution au problème.