

Chpitre II – BARYCENTRES –

1. Définition

Un barycentre est tout simplement un point d'équilibre. Il est étroitement associé à la notion de centre de gravité, ou de centre d'inertie comme on le nomme en physique.

Un point pondéré est un couple (A, a) formé d'un point A et d'un coefficient réel a .

2. Barycentre d'un système de plusieurs points pondérés

On se place par exemple dans le cas de trois points pondérés $(A, a), (B, b), (C, c)$

a/ Théorème

Si $a + b + c \neq 0$ alors il existe un unique point G vérifiant $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration

On prend un point O comme origine.

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \quad \text{s'écrit} \quad a (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA}) + b (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB}) + c (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{0}$$

puis $(a + b + c) \overrightarrow{OG} = a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC}$.

Comme $a + b + c \neq 0$, on obtient $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a + b + c} (a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC})$
ce qui définit un unique point G .

b/ Définition

G s'appelle le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b), (C, c)$

c/ Formule à retenir

Si G est le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$ alors
pour tout point O , $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a + b + c} (a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC})$

d/ Exemples

Ex1 - Soit G le barycentre de $(A, 2), (B, -3), (C, 5)$

- Pour tout point O , on obtient $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2 - 3 + 5} (2 \overrightarrow{OA} - 3 \overrightarrow{OB} + 5 \overrightarrow{OC})$

c'est-à-dire $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} - \frac{3}{4} \overrightarrow{OB} + \frac{5}{4} \overrightarrow{OC}$.

- En prenant A comme origine, on a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AA} - \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4} \overrightarrow{AC}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AG} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4} \overrightarrow{AC}$

Ex2 - On donne trois points A, B, C et G le point défini par $\overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{BC}$.

On peut exprimer G comme barycentre de A, B, C .

En effet, $\overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{BC}$ s'écrit $\overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{BG} + 3 \overrightarrow{GC}$

puis $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{GA} - 3 \overrightarrow{GB} + 3 \overrightarrow{GC}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{GA} - 3 \overrightarrow{GB} + 3 \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

On voit donc que G est le barycentre de $(A, 1)(B, -3)(C, 3)$

3. Propriété d'homogénéité

Si G est le barycentre de $(A, a)(B, b)(C, c)$ alors, pour tout réel k non nul, G est aussi le barycentre de $(A, ka)(B, kb)(C, kc)$.

➤ On ne change donc pas le barycentre en multipliant ou en divisant les coefficients par un même nombre non nul.

Démonstration

Si G est le barycentre de $(A, a)(B, b)(C, c)$

alors $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ avec $a + b + c \neq 0$.

Par suite, pour tout réel k non nul, on obtient

$$ka \overrightarrow{GA} + kb \overrightarrow{GB} + kc \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \quad \text{avec} \quad ka + kb + kc \neq 0.$$

Ceci montre que G est le barycentre de $(A, ka)(B, kb)(C, kc)$.

4. Transformation de $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC}$ dans le cas où $a + b + c \neq 0$

a/ Théorème

Dans le cas où $a + b + c \neq 0$, en notant G le barycentre de $(A, a)(B, b)(C, c)$, on a

$$a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = (a + b + c) \overrightarrow{MG} \quad \text{pour tout point } M.$$

Démonstration

En prenant M comme origine, on peut écrire

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{a + b + c} (a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC})$$

ce qui donne bien $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = (a + b + c) \overrightarrow{MG}$

b/ Exemple

On considère un triangle ABC équilatéral dont les côtés mesurent 4 cm.

On voudrait déterminer l'ensemble E des points M du plan

tels que $\| 3 \overrightarrow{MA} - 2 \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 6 \text{ cm}$

En utilisant le barycentre G du système $(A, 3)(B, -2)(C, 1)$, l'égalité

$$\| 3 \overrightarrow{MA} - 2 \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 6 \text{ cm} \quad \text{s'écrit} \quad \| (3 - 2 + 1) \overrightarrow{MG} \| = 6 \text{ cm}$$

puis $\| 2 \overrightarrow{MG} \| = 6 \text{ cm}$ ce qui revient à $GM = 3 \text{ cm}$.

On voit ainsi que l'ensemble E est le cercle de centre G et de rayon 3 cm .

5. Cas particulier d'un barycentre de deux points pondérés

a/ Formules

On considère le barycentre G d'un système $(A, a)(B, b)$ avec $a + b \neq 0$.

- G est l'unique point tel que

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

- Pour tout point O pris comme origine, on a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a+b} (a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB})$$

- Pour tout point M , on a

$$a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a+b) \overrightarrow{MG}$$

- En prenant A comme origine, on obtient $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{a+b} (a \overrightarrow{AA} + b \overrightarrow{AB})$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$$

Cette dernière égalité montre que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AG} sont colinéaires et par conséquent A, B, G sont alignés.

On retient ce résultat sous la forme d'un théorème.

b/ Théorème

Si G est le barycentre de $(A, a)(B, b)$ avec $a + b \neq 0$

alors $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$ et par suite A, B, G sont alignés.

c/ Exemples

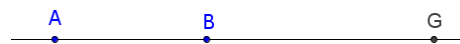
- Avec $a = 2$ et $b = 3$, $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$



- Avec $a = 5$ et $b = -2$, $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$



- Avec $a = -3$ et $b = 5$, $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{2} \overrightarrow{AB}$



6. Propriété d'associativité

a/ Explication dans le cas de trois points pondérés

On considère un système de trois points pondérés : $(A, a) (B, b) (C, c)$

On suppose $a + b + c \neq 0$ et $a + b \neq 0$.

On peut donc envisager le barycentre G de $(A, a) (B, b) (C, c)$
et le barycentre H de $(A, a) (B, b)$.

- Le point G est défini par

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o} \quad \boxed{\text{égalité 1}}$$

- Pour le point H , on a $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{a+b} (a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB})$ c'est-à-dire

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = (a + b) \overrightarrow{GH} \quad \boxed{\text{égalité 2}}$$

Avec les égalités 1 et 2 on obtient $(a + b) \overrightarrow{GH} + c \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{o}$.

Cette dernière égalité signifie que G est le barycentre de $(H, a + b) (C, c)$.

Conclusion :

Si G est le barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$
et si H est le barycentre de $(A, a), (B, b)$
alors G est le barycentre de $(H, a + b) (C, c)$.

b/ Principe général

On ne change pas le barycentre G d'un système de points pondérés ,
lorsqu'on remplace plusieurs points pondérés par leur barycentre H
affecté de la somme de leurs coefficients .

c/ Exemple

On considère un triangle ABC .

On note G le barycentre de $(A, 3)(B, 1)(C, -2)$

H le barycentre de $(A, 3)(B, 1)$

K le barycentre de $(A, 3)(C, -2)$

L le barycentre de $(B, 1)(C, -2)$

- D'après la propriété d'associativité, on peut dire que

G est le barycentre de $(H, 4)(C, -2)$

G est le barycentre de $(K, 1)(B, 1)$

G est le barycentre de $(L, -1)(A, 3)$

- On en déduit que C, H, G sont alignés
que B, K, G sont alignés
que A, L, G sont alignés

Par conséquent G est à l'intersection des droites (CH) , (BK) , (AL) .

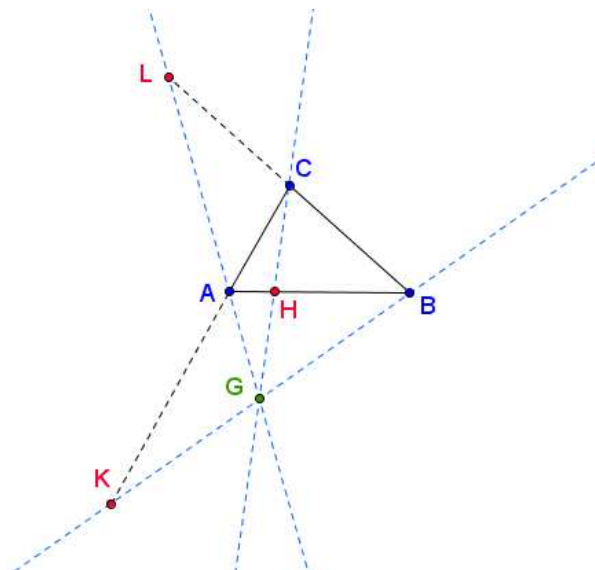
- Pour réaliser une figure, on commence par préciser les positions de H, K, L à l'aide de relations vectorielles :

$$H = \text{barycentre de } (A, 3)(B, 1) \text{ donc } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3+1} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$$

$$K = \text{barycentre de } (A, 3)(C, -2) \text{ donc } \overrightarrow{AK} = \frac{-2}{3-2} \overrightarrow{AC} = -2 \overrightarrow{AC}.$$

$$L = \text{barycentre de } (B, 1)(C, -2) \text{ donc } \overrightarrow{BL} = \frac{-2}{1-2} \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{BC}$$

Puis, on construit G à l'intersection des droites (CH) , (AK) , (BL) .



7. Isobarycentre

a/ Définition

Le barycentre G de points pondérés $(A, 1), (B, 1), (C, 1) \dots$ ayant tous le même coefficient 1, s'appelle l'isobarycentre des points A, B, C, \dots

b/ Remarque

G est aussi le barycentre de $(A, k), (B, k), (C, k), \dots$ avec k non nul.

c/ Isobarycentre de deux points A et B

L'isobarycentre G de deux points A et B est le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$.

Il est défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$. G est le milieu du segment $[AB]$.

d/ Isobarycentre de trois points A, B, C non alignés

L'isobarycentre G de trois points A, B, C est le barycentre de $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$.
Si l'on note K le milieu de $[AB]$ c'est à dire le barycentre de $(A, 1), (B, 1)$,
la propriété d'associativité permet de dire que G est le barycentre de $(K, 2), (C, 1)$.

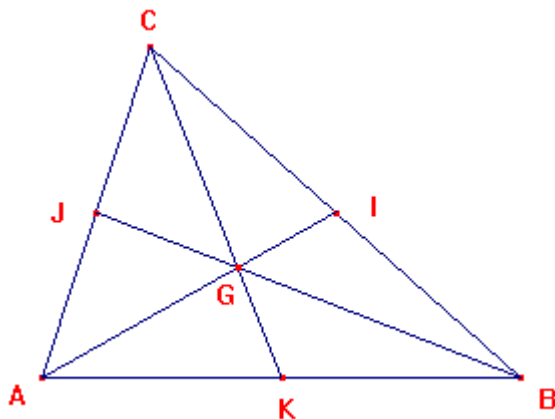
On en déduit que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CK}$ et que G appartient à la médiane (CK)

du triangle ABC .

Par des explications analogues, en notant I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AC]$,
on montrerait que G vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BJ}$
et que G appartient aux médianes (AI) et (BJ) .

En définitive, G est à l'intersection des trois médianes.

G est le centre de gravité du triangle ABC .



8. Coordonnées d'un barycentre

On se place dans un repère $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.

Si G est le barycentre d'un système $(A, a)(B, b)(C, c)$ avec $a + b + c \neq 0$ alors, en prenant l'origine O du repère, on peut écrire

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{a + b + c} \left(a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC} \right)$$

En passant aux coordonnées, on obtient tout de suite

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{a x_A + b x_B + c x_C}{a + b + c} \\ y_G &= \frac{a y_A + b y_B + c y_C}{a + b + c} \end{aligned}$$

Exemple :

Avec $A(5; 3) B(-1; 2) C(3; 1)$,

le barycentre G de $(A, 3)(B, 2)(C, 2)$ a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{3 \times 5 + 2 \times (-1) + 2 \times 3}{7} = \boxed{\frac{19}{7}}$$

$$y_G = \frac{3 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1}{7} = \boxed{\frac{15}{7}}$$

