

Lien vers e-Learning		http://elearn.univ-sba.dz	
Programme pour le module M03 divisé en 2 parties parallèles			
Calcul Intégral & annexes			Equation Différentielles & ..
Intégration dans R			Equation différentielles linéaire du 1 ^{er} ordre
Primitives ; intégrations (changement de variable)			Eq. linéaire à variables séparables ; éq. linéaire type homogène
Intégration par partie ; Intégrales indéfinies (convergence, Fonctions Gamma et Beta)			Eq linéaire à coefficients variables (facteur d'intégration)
Séries numériques			Eq diff. Lin. 2 nd ordre à coéf. constants
Séries (fonctions en escaliers dans les intégrales) ; convergence, divergence grossière.			Equation caractéristique et résolution d'éq. sans second membre ; (exples d'ordre supérieur)
Séries usuelles (critère intégral) ; critères de conv. (de D'Alembert ; de comparaison)			Equation avec second membre
Séries entières et séries de Laurent			Séries entières et solutions approchées
Définition ; convergence ; approximations.			Eq diff. par la Transformée de Laplace
Séries de Laurent ; résidu			Transformation de Laplace
Calcul de résidus ; calcul d'intégrale par les résidus.			Transformation de Laplace (suite)
Série et transformé de Fourier			Eq. diff. avec cond. Initiales.
Définitions (coefficients) ; convergence :... (suite) :			Impulsions ; Eq. diff. avec impulsions
Transformation de Fourier ; :...			Transformée de Fourier
Application au calcul intégrale			Eq diff. à deux variables (t,x)
Intégration multiple			Eq diff. à deux variables (suite)
Intégrale double ; coordonnées polaires			EDP
Intégrale triple ; coordonnées cylindriques ; coordonnées sphériques.			Modèles d'équations (ondes)
Applications			Modèles d'équations (diffusions)
			Résolution par les séries de Fourier

Séries de Fourier

Les séries de Fourier (*séries trigonométriques*) sont très utiles pour la méthode de séparation des variables dans les EDP (*équations aux dérivées partielles*). Ils ont aussi un intérêt pratique dans l'analyse des systèmes mécaniques et électriques soumis à une source externe (*second membre de l'équation différentielle*) périodique.

Comme les séries entières, elles permettent d'exprimer des fonctions assez compliquées en terme de fonctions élémentaires (*monômes pour les séries entières ; sinus et cosinus pour les séries de Fourier*).

1. INTRODUCTION

Nous allons maintenant commencer l'étude de la décomposition spectrale par des constats simples sur les fonctions circulaires.

Proposition : $\forall m, p \in \mathbb{N}$ on a

$$a) \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(px) dx = \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(px) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq p \\ \pi & \text{si } m = p \end{cases}$$

$$b) \int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(px) dx = 0$$

Ces remarques simples mais de poids peuvent être démontré en utilisant les formules trigonométriques

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \end{aligned}$$

Considérons maintenant le polynômes trigonométriques :

$$P(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

a_k et b_k étant donc des constantes réelles fixées.

La question suivante se pose : connaissant $P(x)$, comment retrouver a_k et b_k ?

D'après la Proposition précédente, on a pour tout entier $1 \leq m \leq n$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} P(x) \cos(mx) dx &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(mx) dx \\ &+ \sum_{k=1}^n a_k \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(kx) dx \\ &+ \sum_{k=1}^n b_k \int_0^{2\pi} \cos(mx) \sin(kx) dx \\ &= a_m \pi \end{aligned}$$

d'où $a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \cos(mx) dx$. On montre de même que $b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \sin(mx) dx$ et $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) dx$.

Notons que les intégrales ont un sens non seulement pour un polynôme trigonométrique $P(x)$ mais bien plus largement, pour toute fonction $F(x)$ suffisamment régulière pour qu'on puisse définir les intégrales.

Nous nous limiterons ici aux **fonctions continues par morceaux**. Pour simplifier l'exposé, nous allons étudier le cas des fonctions continues ; et nous énoncerons ensuite un prolongement au cas où la fonction n'est que continue par morceaux (*cas important dans la pratique*).

2. COEFFICIENTS DE FOURIER, SÉRIE DE FOURIER

Théorème et Définition : Soit $F(.) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique avec $T = 2\pi/\omega$. On pose $\forall k \geq 0$,

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(x) \cos(k\omega x) dx.$$

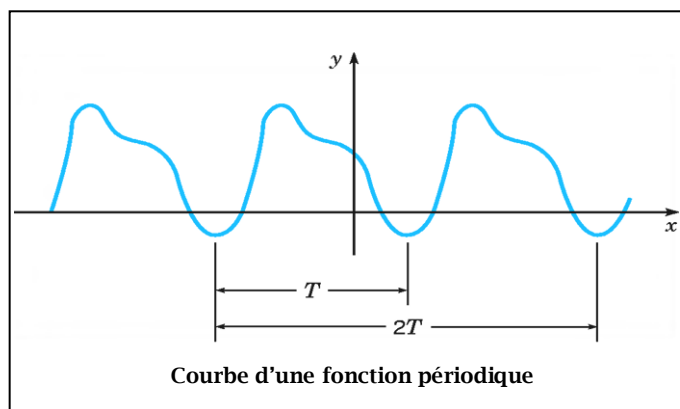
et $\forall k \geq 1$

$$b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(x) \sin(k\omega x) dx.$$

Les coefficients $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ s'appellent les coefficients de Fourier de la fonction $F(.)$.

La série de Fourier **formelle** de $F(.)$ est donnée par

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega x)$$



Remarques :

(1) Si $F(\cdot)$ est 2π -périodique alors $\omega = 1$.

(2) On a donc vu que si la fonction $F(\cdot)$ est un polynôme trigonométrique (*en sinus et cosinus*) alors $F(x)$ **coïncide avec sa série de Fourier**.

(3) Il faut bien comprendre que l'expression de la série de Fourier formelle ne préjuge en rien de sa convergence. Il s'agit seulement d'une expression formelle.

On notera
$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k \omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k \omega x) \quad \text{pour}$$
 exprimer qu'il s'agit de la série associée à $F(\cdot)$.

(4) Si $F(\cdot)$ est T -périodique et intégrable dans $[0, T]$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_0^T F(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+T} F(x) dx$$

Ceci nous permet décrire pour $T = 2\pi/\omega, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{\omega}} F(x) \cos(k \omega x) dx, \quad b_m = \frac{\omega}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha + \frac{2\pi}{\omega}} F(x) \sin(k \omega x) dx$$

Deux questions se posent :

1. La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
2. En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers $F(\cdot)$?

Les coefficients de Fourier présentent des propriétés importante dont :

Théorème : Soit F une fonction continue et 2π -périodique, $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ es coefficients de Fourier, alors

a) Si F est une fonction paire, on a $b_k = 0, \forall k \geq 1$.

b) Si F est une fonction impaire, on a $a_k = 0, \forall k \geq 0$.

c) (Lemme de Riemann-Lebesgue) : $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$

NB : ceci montre que la série de Fourier formelle de F est candidate à converger. On a le résultat suivant que nous admettrons

Théorème (Dirichlet) : Soit F une fonction continue T -périodique avec $T = 2\pi/\omega$ et dérivable à droite et à gauche en tout point de \mathbb{R} , alors la série de Fourier formelle de F converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k \omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k \omega x)$$

Avant de généraliser le résultat précédent aux fonctions continues par morceaux introduisons d'abord une définition.

Définition : Soit F une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R} , admettant en tout point des limites à droite et à gauche (F n'a que des discontinuités de première espèce). On appelle régularisée de F la fonction \bar{F} définie par

$$\bar{F}(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

où $F(x+0)$ et $F(x-0)$ sont les valeurs de la fonction F respectivement à droite et à gauche de x .

NB : évidemment si F est continue en x alors $F(x+0) = F(x-0) = F(x)$ et dans ce cas $\bar{F}(x) = F(x)$.

On a alors le résultat suivant

Théorème (Dirichlet) :

Soit F continue par morceaux, T -périodique avec $T = 2\pi/\omega$

1) n'admettant que des discontinuités de première espèce en nombre fini dans tout intervalle fini,

2) dérivable à droite et à gauche en tout point de \mathbb{R} ;

alors la série de Fourier formelle de F converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k \omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k \omega x) = \bar{F}(x)$$

Théorème (Jordan) :

Soit F une fonction continue par morceaux, T -périodique avec $T = 2\pi/\omega$

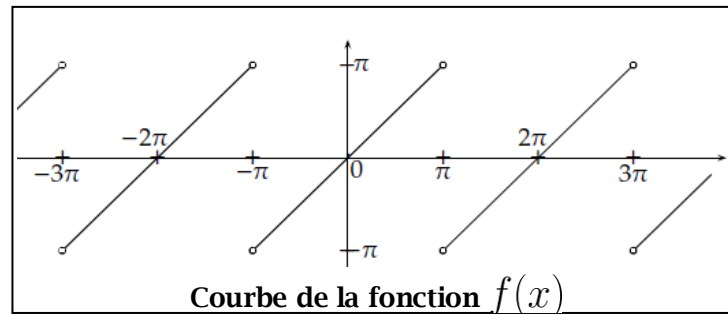
- 1) Il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ (i.e. F est bornée),
- 2) On peut partager l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ en sous-intervalles où la restriction de F soit monotone et continue;

alors la série de Fourier formelle de F converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k \omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k \omega x) = \overline{F}(x)$$

Exemples :

1) soit $f :]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$.



Calcul des coefficients : f est une fonction 2π -périodique continue sur $]-\pi, \pi]$ qui est de longueur 2π .

f est impaire donc $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$ et en intégrant par partie :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\pi \frac{(-1)^n}{n} + 0 \right] = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Donc
$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Vérification des conditions de Dirichlet:

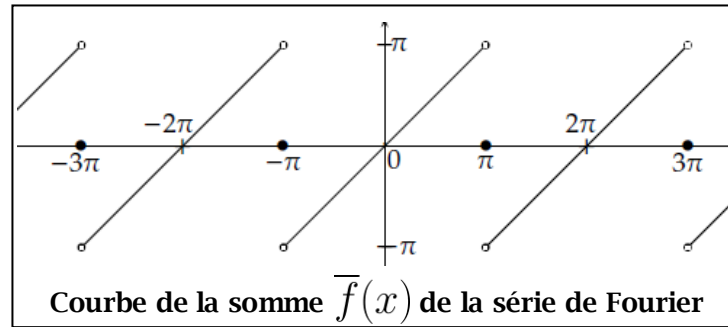
1. Les discontinuités de f sont les points de la forme $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et sont de première espèce car $f(\pi+0) = \pi$ et $f(\pi-0) = \pi$.

2. f est partout dérivable sauf aux points x_k où elle admet une dérivée à gauche

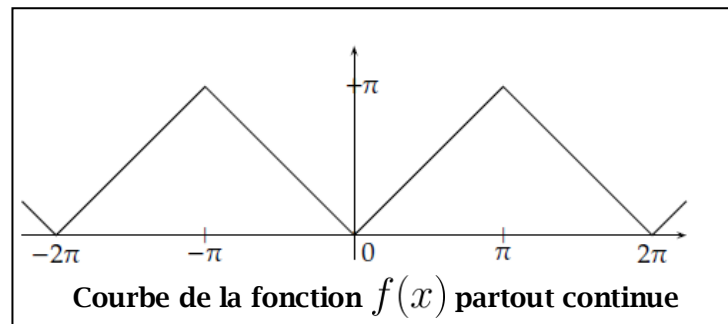
et une dérivée à droite : $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1$

f vérifie les conditions de Dirichlet, d'où

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_k = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases}.$$



2) soit $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique définie par $f(x) = |x|$.



Vérification des conditions de Jordan:

1. on a $|f(x)| \leq \pi$.

2. f restreinte à $[-\pi, 0]$ est décroissante et à $[0, \pi]$ est croissante.

f vérifie les conditions de Jordan, donc développable en série de Fourier

Calcul des coefficients : f est paire alors $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$ et en intégrant :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx$$

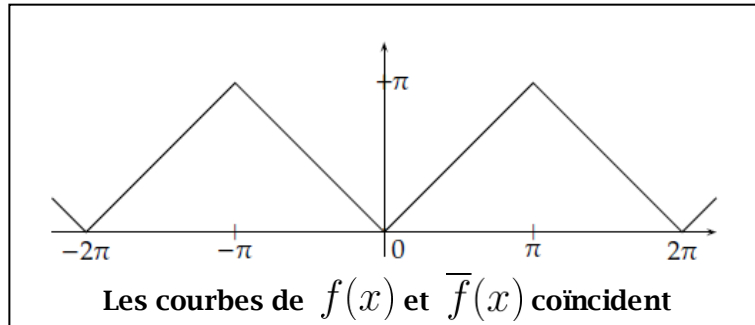
$$= \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[0 + \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} & \text{si } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{(2k+1)^2} = f(x).$$



Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ se traduit par $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et par conséquent

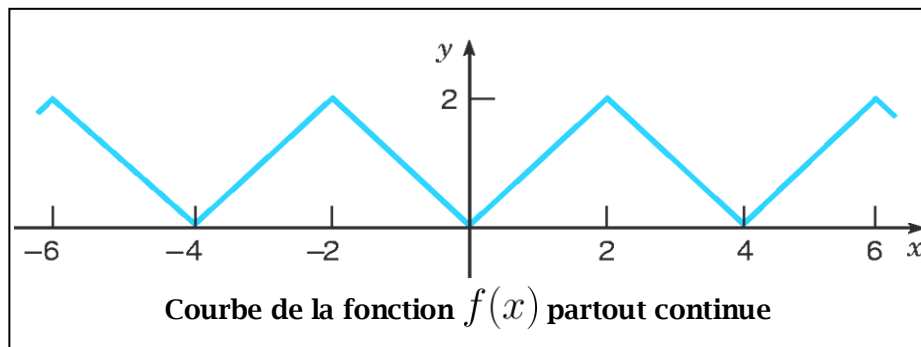
$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exos :

1) soit f une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x+4) = f(x).$$

f est une fonction continue et périodique de période $T = 4$ et $\omega = 2\pi/T = 2\pi/4 = \pi/2$.



Calcul des coefficients : f est paire donc $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$ et en intégrant :

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_{-2}^2 |x| dx = \frac{\pi/2}{\pi} \int_{-2}^2 |x| dx = 2 \times \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 2 \times \frac{1}{2} \frac{2^2}{2} = 2$$

$$a_n = \frac{\pi/2}{\pi} \int_{-2}^0 (-x) \cos\left(n \frac{\pi}{2} x\right) dx + \frac{\pi/2}{\pi} \int_0^2 x \cos\left(n \frac{\pi}{2} x\right) dx$$

En intégrant par partie

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\pi/2}{\pi} \left[(-x) \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right)}{n\pi/2} \Big|_{-2}^0 + \int_{-2}^0 \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right)}{n\pi/2} dx \right] \\ &\quad + \frac{\pi/2}{\pi} \left[x \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right)}{n\pi/2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right)}{n\pi/2} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{n\pi} x \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \Big|_{-2}^0 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{n\pi} x \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \Big|_0^2 + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos\left(\frac{n\pi}{2} x\right) \Big|_0^2 \right] \\ a_n &= \frac{1}{2} \left[0 - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 (1 - (-1)^n) \right] + \frac{1}{2} \left[0 + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 ((-1)^n - 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 ((-1)^n - 1) \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 ((-1)^n - 1) \right] \\ &= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ & k \in \mathbb{N} \\ \frac{-8}{(n\pi)^2} & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où la série de Fourier associée à f :

$$f(x) \sim 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left((2k+1) \pi x/2\right)}{n^2}$$

Vérification des conditions de Jordan:

1. on a $|f(x)| \leq 2$.

2. f restreinte à $[-2, 0]$ est décroissante et à $[0, 2]$ est croissante.

f vérifie les conditions de Jordan, donc

$$1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left((2k+1) \pi x/2\right)}{n^2} = f(x)$$

3. FORME COMPLEXE DE LA SÉRIE DE FOURIER

D'après les relations d'Euler :

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

la série (1) devient :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{in\omega x} \frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-in\omega x} \frac{a_n + ib_n}{2} \right]$$

En posant :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \quad c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \text{la série devient :}$$

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{in\omega x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \end{aligned}$$

Cette dernière expression est appelée forme complexe d'une série trigonométrique. Les coefficients sont alors donnés par la relation :

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) e^{-in\omega x} dx = \frac{\omega}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi/\omega} f(x) e^{-in\omega x}; n \in \mathbb{Z}.$$

4. FORME COMPLEXE DE LA SÉRIE DE FOURIER

Théorème (Égalité de Parseval) :

Soit F une fonction, T -périodique avec $T = 2\pi/\omega$, développable en série de Fourier , alors on a pour α réel quelconque

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{\omega}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi/\omega} f^2(x) dx = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

Remarques :

1)

Si f est de période 2π , on a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

2)

$$f \text{ fonction paire} \implies f^2 \text{ fonction paire} \implies \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx$$

$$f \text{ fonction impaire} \implies f^2 \text{ fonction paire} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx$$

5. APPLICATIONS

1)

f étant une fonction 2π -périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

Trouvez la série de Fourier associée à f . Déduire les sommes de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

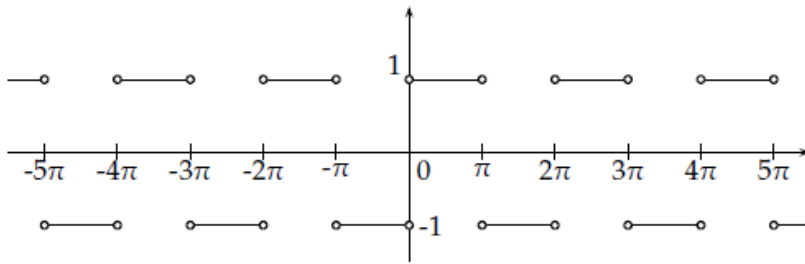


FIG. 3.8 – graphe de la fonction $f(x)$

f étant une fonction impaire $\implies a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a : } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \implies \begin{cases} b_{2n} = 0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)} & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La série de Fourier associée est :

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou si } x = \pi \end{cases}$$

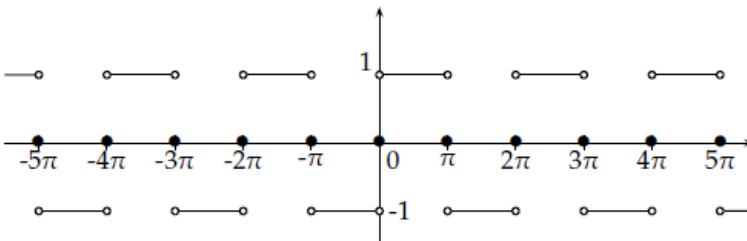


FIG. 3.9 – graphe de la fonction $S(x)$

Pour $x = \pi/2$ on a $S(\pi/2) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

on déduit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Appliquons l'égalité de Parseval :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$$

on déduit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2)

f étant une fonction 2π -périodique telle que :

$$f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in]-\pi, \pi]$$

Trouvez la série de Fourier associée à f . Déduire les sommes de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

f est une fonction paire, continue partout. Elle admet en chaque point une dérivée à droite et une dérivée à gauche donc elle est développable en série de Fourier.

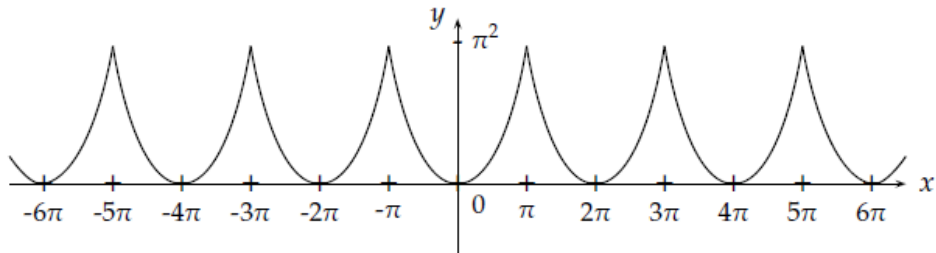


FIG. 3.13 – graphe de la fonction $f(x)$ et celui de $S(x)$

f : paire $\implies b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, et l'on a :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t^2 \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{t^2 \sin nt}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2t \sin nt}{n} dt \right) \\
&= \frac{-4}{\pi} \int_0^\pi t \sin nt \, dt = \frac{-4}{\pi} \left(\left[\frac{t \cos nt}{-n} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nt}{n} dt \right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

Comme f est continue sur \mathbb{R} ; on a donc $f(x) = S(x)$ et donc :

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le graphe de f et celui de S sont identiques.

Pour $x = 0$, on a $f(0) = S(0) = 0$ ce qui donne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

3)

f étant une fonction de période 2, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

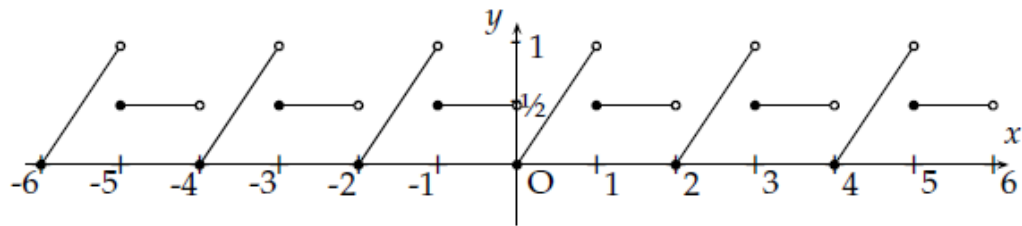


FIG. 3.14 – graphe de la fonction $f(x)$

f n'est ni paire ni impaire et ne présente des discontinuités que pour les points d'abscisses un nombre entier positif ou négatif. f admet alors un développement de Fourier.

On a $p = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \iff \omega = \pi$.

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_{\pi/\omega}^{\pi/\omega + p} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 t \, dt + \int_1^2 \frac{1}{2} \, dt = 1$$

$$a_n = \int_0^1 t \cos n\pi t \, dt + \int_1^2 \frac{\cos n\pi t}{2} \, dt = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \int_0^1 t \sin n\pi t \, dt + \int_1^2 \frac{\sin n\pi t}{2} \, dt = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{2n\pi}$$

La série de Fourier associée à f est donc :

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

En prenant les demis sommes aux points de discontinuité on a pour $x \in [0, 2[$:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

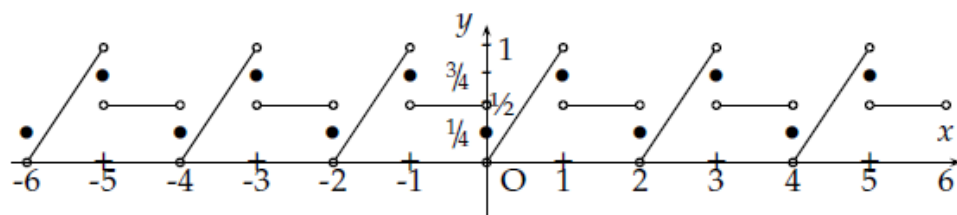


FIG. 3.15 – graphe de la fonction $S(x)$