

Exo 1 (5 pts) :

1) étudier la nature des séries suivantes :

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi + \frac{1}{n}\right), \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \quad d) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^n}{n!}$$

2) développer en série entière en précisant le domaine de convergence.

$$a) f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad b) g(x) = \ln(1+x).$$

en déduire la somme de la série

$$3) \text{ déterminer le domaine de convergence de la série : } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} x^{2n+1}.$$

Solution Exo 1 :

1) la nature des séries :

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) : \text{ on a } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) = 1. \text{ la série diverge (grossièrement) } \underline{(0,25 \text{ pts})}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n} : \text{ c'est une } \underline{\text{série alternée}}. \text{ On a } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{e^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \text{ est}$$

convergente (*série géométrique de raison* $q = \frac{1}{e} < 1$) donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$ est absolument convergente. (0,5 pts)

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \text{ est équivalente à } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ qui}$$

$$\text{converge (série de Riemann avec coefficient } \alpha = \frac{3}{2} > 1) \text{ donc } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

converge d'après le critère d'équivalence. (0,5 pts)

$$d) \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{n^n}{n!} : \text{ on a } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e > 1$$

donc la série diverge *d'après le critère de D'Alembert*. (0,5 pts)

2) développement en série entière

$$a) f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'. \text{ pour } |x| < 1 \text{ on a } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ d'où pour } |x| < 1 :$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \underline{(0,75 \text{ pts})}$$

b) $f(x) = \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$. pour $|t| < 1$ on a $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ on déduit que

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \text{ d'où pour } |x| < 1 :$$

$$f(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \textbf{(0,75 pts)}$$

3) domaine de convergence :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} x^{2n}. \quad \text{Posons } X = x^2 \text{ et } a_n = \frac{(-2)^n}{n+1} :$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-4)^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{(-4)^n} \right| = 4 \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4 ;$$

Le rayon de convergence R de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} X^n$ est : $R = 1/4$. **(0,5 pts)**

La série *converge* pour $X \in D(0, 1/4)$ i.e. $|X| < 1/4$ soit $|x| < 1/\sqrt{4} = 1/2$.

Le **domaine de convergence** de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} x^{2n+1}$ est $D = (-1/2, +1/2)$. **(0,5 pts)**

Etudions la convergence aux bornes de l'intervalle $D = (-1/2, +1/2)$:

Pour $x = -1/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^2)^n (-1)^{2n+1}}{(n+1) 2^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) 2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)} \text{ qui}$$

converge d'après le critère de Leibnitz ($\frac{1}{(n+1)}$ est décroissante et tend vers 0). Donc

$x = -1/2 \in D$.

Pour $x = +1/2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^2)^n}{(n+1) 2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} \text{ qui converge aussi d'après le}$$

critère de Leibnitz. Donc $x = +1/2 \in D$.

Le **domaine de convergence** de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n+1} x^{2n+1}$ est $D = [-1/2, +1/2]$. **(0,75 pts)**

Exo 2 (5 pts) :

soit $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = |x|.$$

1.) Donner sa série de Fourier associée \tilde{f} et tracer sa courbe.

2.) déduire les sommes des séries $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Solution Exo 1 :

1.) **Calcul des coefficients :** f est paire alors $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$ **(0,25 pts)**

et en intégrant :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi \text{ **(0,25 pts)**}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[0 + \frac{\cos(nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \\ a_n &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} & \text{si } n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ **(0,5 pts)**} \end{aligned}$$

d'où la série de Fourier associée à f :

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{(2k+1)^2} = f(x). \text{ **(1 pts)**}$$

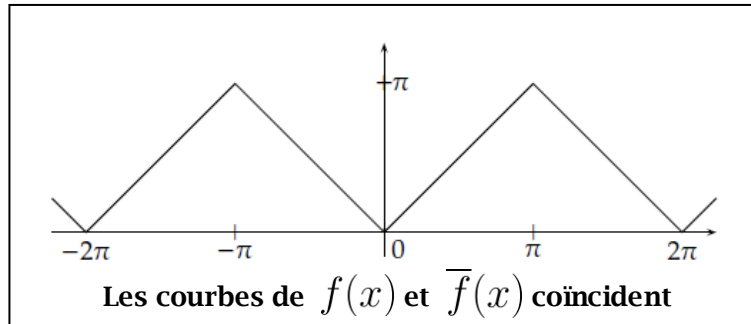
Vérification des conditions de Jordan:

1. on a $|f(x)| \leq \pi$.

2. f restreinte à $[-\pi, 0]$ est décroissante et à $[0, \pi]$ est croissante.

f vérifie les conditions de Jordan, donc développable en série de Fourier d'où

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{(2k+1)^2} = f(x) \text{ **(0,75 pts)**}$$

Courbe de la somme de la série : (0,75 pts)**2.) Somme de séries données :**

Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ se traduit par $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et par conséquent

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(0,5 pts)

L'égalité de Parseval donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} &= \frac{\pi^4}{96} \end{aligned}$$

(0,5 pts)

Remarque 3.3.4 En écrivant $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

On déduit alors : $\frac{15S}{16} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

(0,5 pts)