

Suites – Limite de suite réelle

Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche : (cliquez sur l'exercice pour un accès direct)

- **Exercice 1** : conjecture de la limite d'une suite définie par une formule explicite
- **Exercice 2** : conjecture de la limite d'une suite définie par récurrence (avec tableur et algorithme)
- **Exercice 3** : existence de la limite finie d'une suite (en utilisant la définition)
- **Exercice 4** : existence de la limite finie d'une suite (en utilisant la définition)
- **Exercice 5** : divergence d'une suite sans limite : étude de la suite $(-1)^n$
- **Exercice 6** : limites de référence : étude des limites des suites (\sqrt{n}) et $(\frac{1}{n})$ (en utilisant la définition)
- **Exercice 7** : comparaison des limites de deux suites
- **Exercice 8** : limite de suite par encadrement (théorème des gendarmes)
- **Exercice 9** : convergence d'une suite
- **Exercice 10** : limite d'une suite du type $u_n = f(n)$
- **Exercice 11** : limite d'une suite du type $u_n = f(v_n)$
- **Exercice 12** : limite d'une suite géométrique
- **Exercice 13** : suites adjacentes
- **Exercice 14** : comportement de deux suites dont on connaît la limite du produit
- **Exercice 15** : convergence d'une suite décroissante minorée
- **Exercice 16** : convergence d'une suite croissante majorée
- **Exercice 17** : suites arithmético-géométriques (étude complète)
- **Exercice 18** : série télescopique

Toutes les suites suivantes sont définies par leur terme général. Préciser leur premier terme et conjecturer leur limite (si elle existe) :

$$a_n = \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$c_n = 2n^2 - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$e_n = \frac{2n}{n^2 + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$b_n = 3^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$d_n = \frac{3n+7}{n-5} \quad (n > 5)$$

$$f_n = (-2)^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Correction de l'exercice 1

- 1) Soit la suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $a_n = \frac{1}{n}$

Le premier terme de la suite (a_n) est a_1 avec $a_1 = \frac{1}{1} = 1$.

D'autre part, $a_{10} = \frac{1}{10} = 0,1$, $a_{100} = \frac{1}{100} = 0,01$, $a_{1\,000} = \frac{1}{1\,000} = 0,001$, $a_{10^9} = \frac{1}{10^9} = 10^{-9} \dots$

On peut donc conjecturer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ admet 0 pour limite.

- 2) Soit la suite (b_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $b_n = 3^n$

Le premier terme de la suite (b_n) est b_0 avec $b_0 = 3^0 = 1$.

D'autre part, $b_{10} = 3^{10} = 59\,049$, $b_{50} = 3^{50} \approx 7,178\,979\,9 \times 10^{23}$, $b_{100} = 3^{100} \approx 5,153\,775\,2 \times 10^{47} \dots$

On peut donc conjecturer que la limite de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $+\infty$.

Rappel : Pour tout nombre x réel différent de 0, $x^0 = 1$

- 3) Soit la suite (c_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $c_n = 2n^2 - 1$

Le premier terme de la suite est c_0 avec $c_0 = 2 \times 0^2 - 1 = -1$.

D'autre part, $c_{100} = 2 \times 100^2 - 1 = 19\,999$, $c_{10^5} = 2 \times (10^6)^2 - 1 = 1\,999\,999\,999\,999$

On peut donc conjecturer que la limite de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $+\infty$.

- 4) Soit la suite (d_n) définie pour tout entier naturel $n > 5$ par : $d_n = \frac{3n+7}{n-5}$

Le premier terme de la suite (d_n) est d_6 avec $d_6 = \frac{3 \times 6 + 7}{6 - 5} = 25$.

D'autre part, $d_{100} = \frac{3 \times 100 + 7}{100 - 5} \approx 3,231\,579$, $d_{1\,000} = \frac{3 \times 1\,000 + 7}{1\,000 - 5} \approx 3,022\,111$

On peut donc conjecturer que la limite de la suite $(d_n)_{n \geq 6}$ est 3.

5) Soit la suite (e_n) définie pour tout entier naturel n par : $e_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$

La suite (e_n) a pour premier terme e_0 tel que $e_0 = \frac{2 \times 0}{0^2 + 1} = 0$.

D'autre part, $e_{100} = \frac{2 \times 100}{100^2 + 1} \approx 0,019\,998$, $e_{1\,000} = \frac{2 \times 1\,000}{1\,000^2 + 1} \approx 0,002\,000$

On peut donc conjecturer que la suite (e_n) tend vers 0.

6) Soit la suite (f_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $f_n = (-2)^n$

La suite (f_n) admet pour premier terme f_0 avec $f_0 = (-2)^0 = 1$.

D'autre part, pour tout entier naturel n , $f_n = (-2)^n = (-1)^n \times 2^n$. Ainsi, si n est pair, alors $f_n = 2^n$ (nombre positif) et, si n est impair, alors $f_n = -2^n$ (nombre négatif).

Comme f_n dépend de la parité de n , on peut conjecturer que la suite (f_n) n'admet pas de limite.

Rappel : Convergence ou divergence d'une suite

- ✓ Une suite qui admet une limite finie est dite **convergente**.
- ✓ Une suite non convergente est dite **divergente**. Une suite diverge lorsqu'elle n'a pas de limite finie ou une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$).

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(d_n)_{n \geq 6}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semblent convergentes.

Les suites $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semblent divergentes.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \end{cases}$$

- 1) Calculer les 6 premiers termes de la suite.
- 2) A l'aide d'un tableur, donner les valeurs approchées à 10^{-3} près des 12 premiers termes de la suite.
- 3) En déduire une conjecture de la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 4) Ecrire un algorithme, demandant à l'utilisateur de saisir la valeur du premier terme de la suite et permettant de déterminer le premier entier n pour lequel $u_n < 2,000\,000\,000\,1$.

Correction de l'exercice 2

- 1) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc les 6 premiers termes sont u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .

$$\begin{aligned} u_0 &= 4 \\ u_1 &= \frac{u_0}{2} + 1 = \frac{4}{2} + 1 = 3 \\ u_2 &= \frac{u_1}{2} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \\ u_3 &= \frac{u_2}{2} + 1 = \frac{\frac{5}{2}}{2} + 1 = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4} \\ u_4 &= \frac{u_3}{2} + 1 = \frac{\frac{9}{4}}{2} + 1 = \frac{9}{8} + 1 = \frac{17}{8} \\ u_5 &= \frac{u_4}{2} + 1 = \frac{\frac{17}{8}}{2} + 1 = \frac{17}{16} + 1 = \frac{33}{16} \end{aligned}$$

- 2) Avec un tableur, on peut déterminer la valeur des 12 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il suffit d'entrer la valeur initiale 4 dans la cellule B2, puis de saisir la formule « =B2/2+1 » dans la cellule B3, ensuite de copier cette formule et enfin de la coller dans les cellules B4, B5, B6...

A l'aide du tableur, on observe alors que les 12 premiers termes de la suite ont pour valeur approchée à 10^{-3} près :

$$\begin{array}{lll} u_0 = 4 & u_4 = 2,125 & u_8 \approx 2,008 \\ u_1 = 3 & u_5 \approx 2,063 & u_9 \approx 2,004 \\ u_2 = 2,5 & u_6 \approx 2,031 & u_{10} \approx 2,002 \\ u_3 = 2,25 & u_7 \approx 2,016 & u_{11} \approx 2,001 \end{array}$$

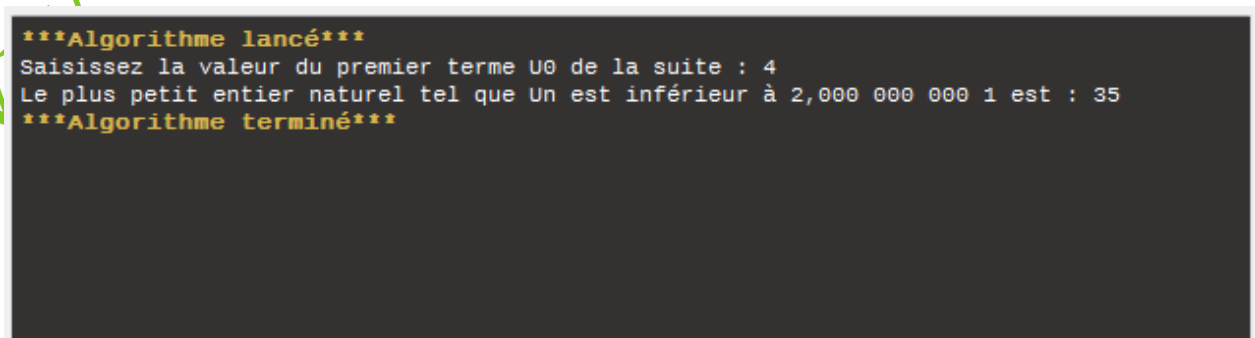
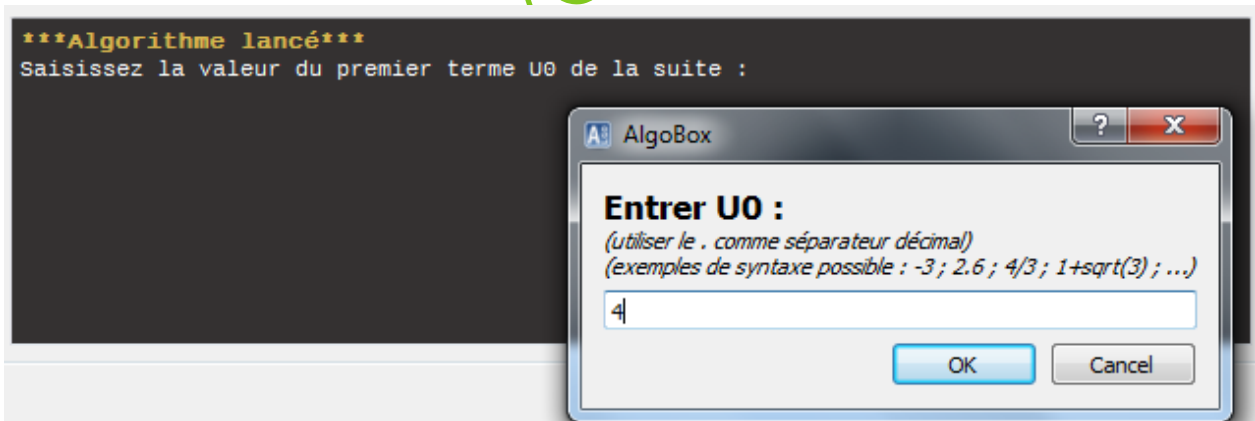
	B3	f_x	=B2/2+1
	A	B	C
1	n	U_n	
2	0	4	
3	1	3	
4	2	2,5	
5	3	2,25	
6	4	2,125	
7	5	2,0625	
8	6	2,03125	
9	7	2,015625	
10	8	2,0078125	
11	9	2,00390625	
12	10	2,001953125	
13	11	2,000976563	

- 3) D'après les résultats de la question précédente, on peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet 2 pour limite.
- 4) Ecrivons un algorithme avec le logiciel AlgoBox, demandant à l'utilisateur de saisir la valeur du premier terme de la suite et permettant de déterminer le premier entier n pour lequel $u_n < 2,000\,000\,000\,1$. L'algorithme retourne le résultat 35.

```

VARIABLES
- n EST_DU_TYPE NOMBRE
- Un EST_DU_TYPE NOMBRE
- U0 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
//On commence par demander à l'utilisateur de saisir la valeur de U0
AFFICHER "Saisissez la valeur du premier terme U0 de la suite : "
//Le programme lit la valeur de U0 :
LIRE U0
//On affiche la valeur de U0
AFFICHER U0
//On initialise n à 0 et le terme Un à U0
n PREND_LA_VALEUR 0
Un PREND_LA_VALEUR U0
//On commence à entrer dans la boucle
TANT_QUE (Un >= 2.0000000001) FAIRE
- DEBUT_TANT_QUE
- Un PREND_LA_VALEUR Un/2+1
- n PREND_LA_VALEUR n+1
- FIN_TANT_QUE
//A la sortie de la boucle, on affiche le résultat
AFFICHER "Le plus petit entier naturel tel que Un est inférieur à 2,000 000 000 1 est : "
AFFICHER n
FIN_ALGORITHME

```



Remarque : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$.

- 1) Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N > 0$, $u_n \in]-0,1 ; 0,1[$.
- 2) En déduire que la limite de la suite est 0.

Correction de l'exercice 3

- 1) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$.

Déterminons un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N > 0$, $u_n \in]-0,1 ; 0,1[$.

- D'une part, on remarque que $u_{10} = \frac{1}{10} = 0,1$ et $u_{11} = \frac{1}{11} \approx 0,0909 < 0,1$. Ainsi, en prenant $N = 11$, pour tout $n \geq 11$, on a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{11}$, en vertu de la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_*^+ . Autrement dit, $u_n \leq \frac{1}{11}$, c'est-à-dire $u_n < 0,1$.
- D'autre part, pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n} > 0$, c'est-à-dire $u_n > 0$. Il s'ensuit que $u_n > -0,1$.

Donc, pour tout $n \geq 11$, on a $u_n < 0,1$ et $u_n > -0,1$, c'est-à-dire $u_n \in]-0,1 ; 0,1[$.

- 2) Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Rappel : Limite finie d'une suite (définition)

Soit (u_n) une suite réelle et l un réel. La suite (u_n) a pour limite l si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N . Dans ce cas, on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

Considérons un intervalle ouvert contenant 0. On peut alors écrire cet intervalle sous la forme $] \alpha ; \beta [$ avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.

- Soit N' un entier naturel tel que $N' > \frac{1}{\beta}$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}_*^+ , $\frac{1}{N'} < \frac{1}{\beta}$, c'est-à-dire $\frac{1}{N'} < \beta$. Pour tout $n \geq N'$, on a alors $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N'} < \beta$, c'est-à-dire $u_n < \beta$.
- En outre, on a $u_n > 0$ et $\alpha < 0$ donc $\alpha < u_n$.

En conclusion, $\alpha < u_n < \beta$. Autrement dit, pour tout $n \geq N'$ tel que $N' > \frac{1}{\beta}$, $u_n \in]\alpha ; \beta[$. On vient donc de montrer que, pour tout intervalle ouvert $] \alpha ; \beta [$ contenant 0, il existe un entier N' tel que, pour tout $n \geq N'$, $u_n \in] \alpha ; \beta [$. Tout intervalle ouvert contenant 0 contient donc tous les termes u_n de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à partir d'un certain rang ; par définition, cela signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

www.sos-devoirs-corriges.com

En utilisant la définition de la limite d'une suite, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$.

Correction de l'exercice 4

L'énoncé laisse entendre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie puisqu'il y est fait mention de « convergence ». Calculons quelques termes de la suite pour émettre une conjecture sur le comportement de cette suite.

$$u_0 = \frac{2 \times 0 + 3}{0 + 1} = 3$$

$$u_{100} = \frac{2 \times 100 + 3}{100 + 1} = \frac{203}{101} \approx 2,0099$$

$$u_{10} = \frac{2 \times 10 + 3}{10 + 1} = \frac{23}{11} \approx 2,09$$

Il semble donc que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.

Montrons que tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. C'est-à-dire montrons que tout intervalle ouvert (centré en 2) $]2 - \alpha ; 2 + \alpha[$ (avec α réel strictement positif) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

$$u_n \in]2 - \alpha ; 2 + \alpha[\Leftrightarrow 2 - \alpha < u_n < 2 + \alpha \Leftrightarrow -\alpha < u_n - 2 < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \frac{2n+3}{n+1} - 2 < \alpha$$

$$\Leftrightarrow -\alpha < \frac{2n+3-2(n+1)}{n+1} < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \frac{1}{n+1} < \alpha$$

D'une part, $-\alpha < \frac{1}{n+1}$ est une proposition vraie pour tout entier naturel n car $n \geq 0$ et $-\alpha < 0$.

D'autre part, $\frac{1}{n+1} < \alpha \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\alpha}$ (car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}_*^+) $\Leftrightarrow n > \frac{1}{\alpha} - 1$

Il suffit donc de prendre un entier naturel N tel que $N > \frac{1}{\alpha} - 1$ et $n \geq N$ pour que $u_n \in]2 - \alpha ; 2 + \alpha[$.

Autrement dit, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2.

Exemples :

- Si $\alpha = 0,1$, alors il suffit de prendre un entier naturel N tel que $N > \frac{1}{0,1} - 1$ (par exemple $N = 10$) et, pour tout entier naturel $n \geq 10$, $u_n \in]1,9 ; 2,1[$.
- Si $\alpha = 0,001$, alors il suffit de prendre un entier naturel N tel que $N > \frac{1}{0,001} - 1$ (par exemple $N = 1\,000$) et, pour tout entier naturel $n \geq 1\,000$, $u_n \in]1,999 ; 2,001[$.

Justifier que la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Correction de l'exercice 5

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$. Montrons qu'elle n'a pas de limite, c'est-à-dire montrons :

- 1) qu'elle n'a pas de limite finie 2) qu'elle ne tend pas vers $-\infty$ 3) qu'elle ne tend pas vers $+\infty$

Rappel : Limite infinie d'une suite (définition)

Soit (u_n) une suite réelle et A un réel.

- La suite (u_n) tend vers $-\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert $] -\infty ; A[$ contient aussi tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N .
- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert $]A ; +\infty[$ contient aussi tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N .

- 1) Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite finie.

Si n est pair, alors $u_n = 1$ et, si n est impair, alors $u_n = -1$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite alternée prenant successivement les valeurs -1 et 1 .

Considérons un intervalle ouvert d'amplitude inférieure strictement à 2. Cet intervalle ne peut donc contenir à la fois -1 et 1 . Autrement dit, cet intervalle ne peut donc pas contenir tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Il en résulte, par définition, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut avoir une limite finie. La suite diverge.

- 2) Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $-\infty$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers $-\infty$ car l'intervalle $] -\infty ; -1[$ ne contient pas les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de valeur 1 , c'est-à-dire ne contient pas tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

- 3) Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas tendre vers $+\infty$ car l'intervalle $]1 ; +\infty[$ ne contient pas les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de valeur -1 , c'est-à-dire ne contient pas tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

En conclusion, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$, n'admettant pas de limite finie et ne tendant ni vers $-\infty$ ni vers $+\infty$, n'a pas de limite.

Démontrer les limites de référence suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Correction de l'exercice 6

1) Démontrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Soit A un réel strictement positif. Montrons que l'intervalle ouvert $]A ; +\infty[$ contient tous les termes \sqrt{n} à partir d'un certain rang N .

Comme $A > 0$, $\sqrt{n} > A \Leftrightarrow (\sqrt{n})^2 > A^2$ (car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur \mathbb{R}^+), c'est-à-dire $n > A^2$.

Posons alors par exemple $N = E(A^2) + 1$. Ainsi, à partir du rang N , on a $\sqrt{n} \in]A ; +\infty[$. Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Rappel : Partie entière d'un réel

Soit x un réel. On appelle partie entière de x , notée $E(x)$, le nombre entier n tel que $n \leq x < n + 1$.

Exemples :

- $E(-3,2) = -4$ car $-4 \leq -3,2 < -4 + 1$
- $E(\pi) = 3$ car $3 \leq \pi < 3 + 1$

2) Démontrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Montrons que tout intervalle ouvert contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. C'est-à-dire montrons que tout intervalle ouvert (centré en 0) $] -\alpha ; \alpha[$ (avec α réel strictement positif) contient tous les termes $\frac{1}{n}$ de la suite à partir d'un certain rang N .

• D'une part, comme $\alpha > 0$ et comme $n \geq 0$, $-\alpha < \frac{1}{n}$

• D'autre part, $0 < \frac{1}{n} < \alpha \Leftrightarrow n > \frac{1}{\alpha} > 0$ (car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}_*^+ et car $\alpha > 0$)

Posons alors par exemple $N = E\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 1$. Ainsi, à partir du rang N , on a $\frac{1}{n} \in] -\alpha ; \alpha[$. Il en résulte, par définition, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement définies par récurrence par :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{7} + 1 \end{cases}$$

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n}{7} + 1 \end{cases}$$

- 1) Comparer u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont des limites finies respectives l et l' , que peut-on dire de l et l' ?
- 3) Ecrire un algorithme permettant de conjecturer la limite de chacune des suites.

Correction de l'exercice 7

- 1) Comparons u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'une part, $u_0 = 2$ et $v_0 = -1$. Donc $u_0 > v_0$. D'autre part, $u_1 = \frac{2u_0}{7} + 1 = \frac{11}{7}$ et $v_1 = \frac{2v_0}{7} + 1 = \frac{5}{7}$. Donc $u_1 > v_1$. On peut donc conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n$. Vérifions cette conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Rappel : Principe du raisonnement par récurrence

Soit \wp une proposition définie sur un intervalle I de \mathbb{N} . Soit $n_0 \in I$.

Si :

- 1) la proposition \wp est **initialisée** à un certain rang n_0 , c'est-à-dire si $\wp(n_0)$ est vraie au rang n_0
- 2) la proposition \wp est **héréditaire** à partir du rang n_0 , c'est-à-dire si, pour tout $n \in I$ tel que $n \geq n_0$, on a l'implication $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$

Alors :

- 3) La proposition est vraie à partir de tout rang plus grand que n_0 .

Une **proposition** est un énoncé, soit vrai, soit faux.

Soit \wp la proposition définie sur \mathbb{N} par : $\wp(n) : u_n > v_n$.

Vérifions tout d'abord que la proposition est initialisée.

On a montré que $u_0 > v_0$ donc $\wp(0)$ est vraie. Par conséquent, la proposition \wp est initialisée au rang 0.

- Montrons désormais que la proposition est héréditaire.

Supposons que $\wp(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire supposons que $u_n > v_n$ (hypothèse de récurrence), et montrons alors que $\wp(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que $u_{n+1} > v_{n+1}$. Pour ce faire, étudions le signe de $u_{n+1} - v_{n+1}$.

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n}{7} + 1 - \left(\frac{2v_n}{7} + 1\right) = \frac{2u_n}{7} + 1 - \frac{2v_n}{7} - 1 = \frac{2}{7}(u_n - v_n)$$

Or, par hypothèse, $u_n > v_n$, c'est-à-dire, $u_n - v_n > 0$. D'autre part, $\frac{2}{7} > 0$. Donc $u_{n+1} - v_{n+1} > 0$. On a donc bien $u_{n+1} > v_{n+1}$, c'est-à-dire $\wp(n+1)$ vraie.

On vient donc de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\wp(n)$ est vraie au rang n , alors $\wp(n+1)$ est vraie au rang $n+1$. Autrement dit, la proposition \wp est héréditaire.

- Finalement, on vient d'établir que $\wp(0)$ est vraie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$. Autrement dit, on vient de montrer que la proposition est initialisée au rang 0 et est héréditaire donc, en vertu du principe du raisonnement par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier naturel n . On a donc $u_n > v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Comparons l et l' .

D'après 1), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > v_n$.

Si, de plus, on a $\lim u_n = l$ ($l \in \mathbb{R}$) d'une part et $\lim v_n = l'$ ($l' \in \mathbb{R}$) d'autre part, alors $l \geq l'$.

Remarque importante : On ne peut surtout pas conclure que $l > l'$. En effet, en prenant par exemple $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = 0$, on a $u_n > v_n$ pour tout $n > 0$, mais $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

3) Ecrivons un algorithme permettant de conjecturer la limite de chacune des suites.

Autrement dit, écrivons un algorithme permettant de calculer u_{rang} et v_{rang} (avec $rang$ supposé assez grand) en demandant à l'utilisateur de renseigner le $rang$ de son choix (dans l'exemple ci-après, l'utilisateur cherche à calculer u_{100} et v_{100} , c'est pourquoi il saisit 100).

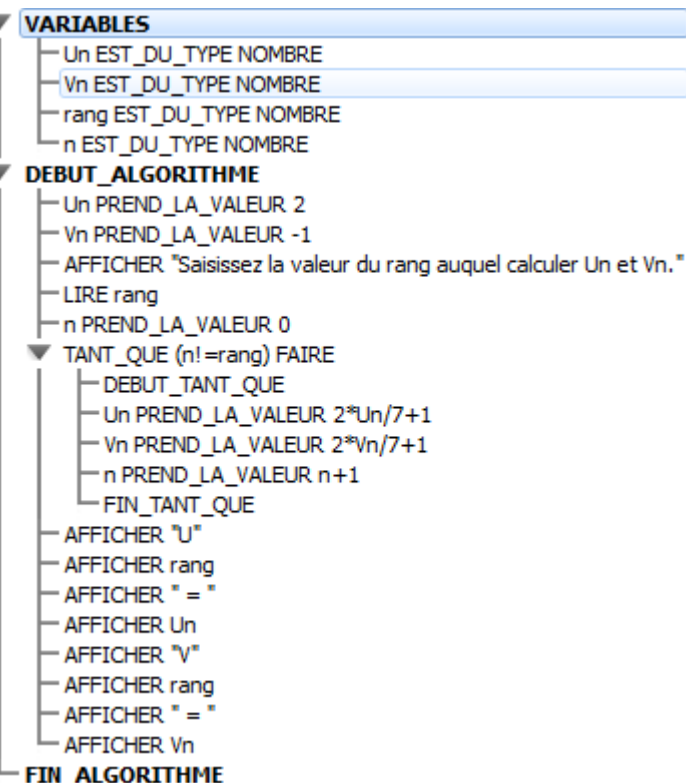
Rappel : Comparaison des limites de deux suites

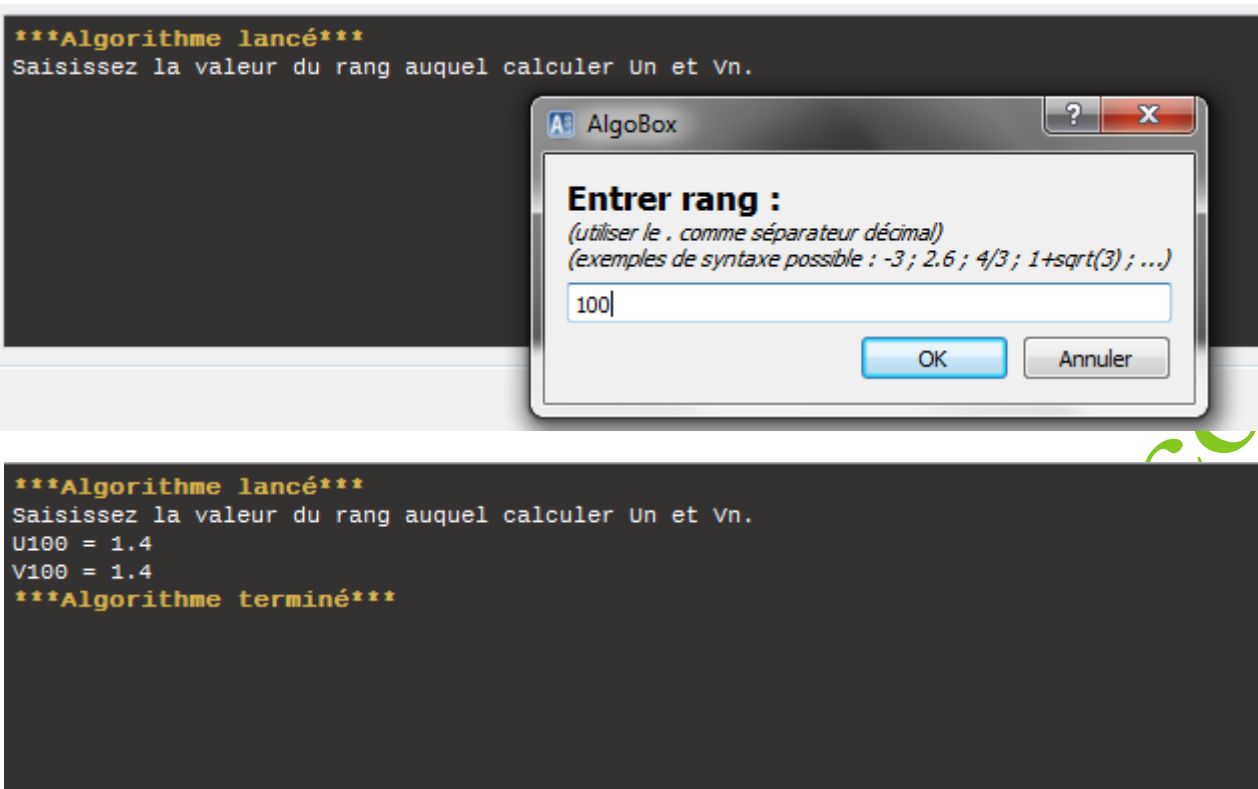
Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n) et soit N un entier naturel.

Si, pour tout $n \geq N$,

- $u_n \leq v_n$ (ou $u_n < v_n$)
- (u_n) admet une limite finie l
- (v_n) admet une limite finie l'

Alors $l \leq l'$.





En utilisant cet algorithme, on peut donc conjecturer que les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 1,4 (valeur sans doute arrondie).

Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{2 \cos n + 3}{n + 1}$

Correction de l'exercice 8

Rappel : Théorème des gendarmes (auss appelé théorème d'encadrement)

Soient (a_n) , (b_n) et (u_n) trois suites de nombres réels et soit l un réel.

Si, pour tout entier n supérieur à un certain entier N ,

- $a_n \leq u_n \leq b_n$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$

Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1$.

La fonction $x \mapsto 2x$ étant croissante sur \mathbb{R} donc sur $[-1; 1]$, on a alors $-2 \leq 2 \cos n \leq 2$.

La fonction $x \mapsto x + 3$ étant croissante sur \mathbb{R} donc sur $[-2; 2]$, on a alors $1 \leq 2 \cos n + 3 \leq 5$.

- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 > 0$.
- Ainsi, il résulte que : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{2 \cos n + 3}{n+1} \leq \frac{5}{n+1}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{5}{n+1}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n+1} = 0$ Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Démontrer à l'aide de deux méthodes différentes que la suite converge vers 0.

Correction de l'exercice 9

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- 1^{ère} méthode : utilisation de la définition

Montrons que tout intervalle ouvert contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. C'est-à-dire montrons que tout intervalle ouvert (centré en 0) $] -\alpha ; \alpha[$ (avec α réel strictement positif) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

$$u_n \in] -\alpha ; \alpha[\Leftrightarrow -\alpha < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \alpha$$

D'une part, $-\alpha < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ est une proposition vraie pour tout entier naturel n car $\sqrt{2n+1} > 0$ et $-\alpha < 0$.

D'autre part, $0 < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \alpha \Leftrightarrow \sqrt{2n+1} > \frac{1}{\alpha} > 0$ (car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est décroissante sur \mathbb{R}_*^+)

$$\Leftrightarrow \sqrt{2n+1}^2 > \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \quad (\text{car la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow 2n+1 > \frac{1}{\alpha^2} \Leftrightarrow 2n > \frac{1}{\alpha^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \Leftrightarrow n > \frac{1-\alpha^2}{2\alpha^2}$$

Il suffit donc de prendre un entier naturel N tel que $N > \frac{1-\alpha^2}{2\alpha^2}$ et $n \geq N$ pour que $u_n \in] -\alpha ; \alpha[$.

Autrement dit, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

- 2^{ème} méthode : utilisation des opérations sur les limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \stackrel{=}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \stackrel{=}{=} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \stackrel{=}{=} \lim_{N' \rightarrow +\infty} \frac{1}{N'} = 0$$

Etudier la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement définies par :

$$u_n = \frac{2n^2 - 7n + 2}{3n^2 + n}$$

$$v_n = n^2 - \sqrt{n}$$

Correction de l'exercice 10

Rappel : Limite d'une suite du type $u_n = f(n)$

Soient f une fonction définie sur un intervalle $] \alpha ; +\infty[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = l$.

1) Etudions la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}; 0\}$ et, en particulier sur $]0; +\infty[$, par $x \mapsto \frac{2x^2 - 7x + 2}{3x^2 + x}$. Or, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 7x + 2}{3x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{3} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers $\frac{2}{3}$.

2) Etudions la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de la forme $v_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $x \mapsto x^2 - \sqrt{x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $x^2 - \sqrt{x} = x\sqrt{x} \times \sqrt{x} - \sqrt{x} = \sqrt{x}(x\sqrt{x} - 1)$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; d'où, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} = +\infty$. Par somme, il vient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x} - 1) = +\infty$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge donc vers $+\infty$.

Etudier la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5}{n}\right)$.

Correction de l'exercice 11

Rappel : Limite d'une suite du type $u_n = f(v_n)$

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et (v_n) une suite telle que $v_n \in I$. Les lettres a et b désignent soit un réel, soit $-\infty$ soit $+\infty$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = b$.

Etudions la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{5}{n}\right)$.

Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par $v_n = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{n}$.

Alors $u_n = f(v_n)$ où f est la fonction trigonométrique définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin x$.

D'une part, $v_n = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{n}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$ donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\pi}{6}$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
car la fonction f est continue en $\frac{\pi}{6}$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = \frac{1}{2}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc vers $\frac{1}{2}$.

Préciser la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Correction de l'exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^n} = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 2 - \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$$

On reconnaît entre parenthèses la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2^1}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Rappel : Somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors la somme S des termes consécutifs de cette suite est donnée par la formule : $S = \text{premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1 - q}$

Autrement dit, avec $n \geq p \geq n_0$ où n_0 désigne le rang à partir duquel la suite (u_n) est définie :

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

On a par conséquent :

$$u_n = 2 - \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = 2 - \frac{1}{2^1} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Rappel : Limite de la suite géométrique $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Soit q un réel.

• Si $-1 < q < 1$	alors	la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
• Si $q = 1$	alors	la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
• Si $q > 1$	alors	la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
• Si $q \leq -1$	alors	la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et	n'a pas de limite

Or, $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Ainsi, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} (n \in \mathbb{N})$$

$$\begin{cases} v_0 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases} (n \in \mathbb{N})$$

- 1) Démontrer que la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
- 2) Quelle est la limite de la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- 3) Démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- 4) En déduire qu'elles sont convergentes.
- 5) Démontrer que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$ est constante. Qu'en déduire pour les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Correction de l'exercice 13

- 1) Démontrons que la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 9v_n - 4u_n - 8v_n}{12} = \frac{1}{12}(v_n - u_n)$$

La suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $v_0 - u_0 = 12 - 1 = 11$.

- 2) Précisons la limite de la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a vu que $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$. Or, $-1 < \frac{1}{12} < 1$; par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. Cette suite converge vers 0.

- 3) Démontrons que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Rappel : Suites adjacentes (définition)

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si :

- l'une de ces suites est croissante
- l'autre de ces suites est décroissante
- la suite $(u_n - v_n)$ (ou la suite $(v_n - u_n)$) converge vers 0

Tout d'abord, montrons que l'une de ces suites est croissante et que l'autre est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} = \frac{2v_n - 2u_n}{3} = \frac{2}{3}(v_n - u_n)$$

Or, d'après 1), la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $11 > 0$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n > 0$. Par conséquent, $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n > 0$, $v_{n+1} - v_n < 0$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Désormais, montrons que la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Il se trouve que ce résultat a déjà été établi à la question précédente puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

De ces 3 résultats, il vient que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

4) Justifions que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

Rappel : Convergence de suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.

Alors ces deux suites sont convergentes et ont la même limite l ($l \in \mathbb{R}$).

D'après la question précédente, ces suites sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite l ($l \in \mathbb{R}$).

5) Démontrons que la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $t_n = 3u_n + 8v_n$ est constante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3\left(\frac{u_n + 2v_n}{3}\right) + 8\left(\frac{u_n + 3v_n}{4}\right) = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = t_n$$

Donc la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Dès lors, il résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 = 3\underbrace{u_0}_1 + 8\underbrace{v_0}_{12} = 99$.

Déduisons de ce résultat la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme toute suite constante converge, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $t_0 = 99$.

Comme, par ailleurs, les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers une même limite l , on peut écrire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + 8 \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ c'est-à-dire $99 = 3l + 8l$. Il résulte de cette équation que $l = \frac{99}{11} = 9$.

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent donc vers 9.

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0 ; 1]$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même comportement.

Correction de l'exercice 14

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n ,

- $u_n \in [0 ; 1]$, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 1$
- $v_n \in [0 ; 1]$, c'est-à-dire $0 \leq v_n \leq 1$

Remarque importante :

On ne peut écrire ni $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 1$ ni $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq 1$, tant que l'existence de la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas été prouvée.

1) Etudions le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$0 \leq v_n \leq 1 \Leftrightarrow \underbrace{0 \times u_n \leq v_n \times u_n \leq 1 \times u_n}_{\text{car } 0 \leq u_n}$, c'est-à-dire $0 \leq u_n v_n \leq u_n$. Comme $u_n \leq 1$, il vient finalement que : $0 \leq u_n v_n \leq u_n \leq 1$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc encadrée par les suites $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(1)_{n \in \mathbb{N}}$. Or, d'après l'énoncé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites qui convergent vers 1. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

2) Etudions le comportement de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow \underbrace{0 \times v_n \leq u_n \times v_n \leq 1 \times v_n}_{\text{car } 0 \leq v_n}$, c'est-à-dire $0 \leq u_n v_n \leq v_n$. Comme $v_n \leq 1$, il vient finalement que : $0 \leq u_n v_n \leq v_n \leq 1$.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc encadrée par les suites $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(1)_{n \in \mathbb{N}}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$, donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites qui convergent vers 1. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

On vient d'établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$: les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même comportement.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$$

- 1) Prouver que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n .
- 2) Etudier la monotonie de la suite.
- 3) Justifier la convergence de la suite.
- 4) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis la démontrer.
- 5) En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction de l'exercice 15

- 1) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Soit \wp la proposition définie sur \mathbb{N} par : $\wp(n) : u_n > 0$.

- Vérifions tout d'abord que la proposition est initialisée.

$u_0 = 1$ et $1 > 0$ donc $u_0 > 0$. $\wp(0)$ est donc vraie. Par conséquent, la proposition \wp est initialisée au rang 0.

- Montrons désormais que la proposition est héréditaire.

Supposons que $\wp(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire supposons que $u_n > 0$ (hypothèse de récurrence), et montrons alors que $\wp(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que $u_{n+1} > 0$.

Par hypothèse, $u_n > 0$ donc $u_n^2 + 1 > 0^2 + 1$ (car la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est croissante sur \mathbb{R}^+), c'est-à-dire $u_n^2 + 1 > 1$.

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur \mathbb{R}^+ (donc sur $[1; +\infty[$), on a $\sqrt{u_n^2 + 1} > \sqrt{1}$, c'est-à-dire $\sqrt{u_n^2 + 1} > 1$.

Du fait de la décroissance et de la positivité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_*^+ (donc sur $[1; +\infty[$), il vient que $0 < \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} < \frac{1}{1}$, c'est-à-dire $0 < \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} < 1$.

Enfin, par hypothèse, $u_n > 0$. D'où $0 \times u_n < \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \times u_n < 1 \times u_n$. C'est-à-dire $0 < u_{n+1} < u_n$.

On vient donc de montrer que, pour un entier naturel n fixé, si $\wp(n)$ est vraie au rang n , alors $\wp(n+1)$ est vraie au rang $n+1$. Autrement dit, la proposition \wp est héréditaire.

- On vient d'établir que $\wp(0)$ est vraie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp(n) \Rightarrow \wp(n+1)$. Autrement dit, on vient de montrer que la proposition est initialisée au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe du

raisonnement par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier naturel n . On a donc $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) D'après ce qui précède, $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3) Justifions la convergence de la suite.

D'après la première question, $u_n > 0$. Autrement dit, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. De plus, d'après la question précédente, elle est décroissante. Il en résulte que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Rappel : Convergence des suites monotones

- ✓ Toute suite croissante et majorée est convergente.
- ✓ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

4) Conjeturons une expression de u_n en fonction de n .

Pour cela, calculons les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- $u_0 = 1$
- $u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $u_3 = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(= \frac{1}{2} \right)$

On remarque que $u_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}}$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+1}}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2+1}}$ et $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3+1}}$. On peut donc conjecturer que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Désignons par \wp' la proposition définie sur \mathbb{N} telle que $\wp'(n) : u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

- Vérifions tout d'abord que cette proposition est initialisée.

On vient de montrer que $u_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}}$ donc $\wp'(0)$ est vraie. La proposition \wp' est initialisée au rang 0.

- Montrons désormais que la proposition est héréditaire.

Supposons que $\wp'(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire supposons que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (hypothèse de récurrence), et montrons alors que $\wp'(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire montrons que $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \stackrel[\text{hypothèse}]{\text{par}}= \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1+n+1}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

On vient donc de montrer que, pour un entier naturel n fixé, si $\wp'(n)$ est vraie au rang n , alors $\wp'(n+1)$ est vraie au rang $n+1$. Autrement dit, la proposition \wp' est héréditaire.

- On vient d'établir que $\wp'(0)$ est vraie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\wp'(n) \Rightarrow \wp'(n+1)$. Autrement dit, on vient de montrer que la proposition est initialisée au rang 0 et est héréditaire donc, d'après le principe du raisonnement par récurrence, la proposition est vraie pour tout entier naturel n . On a donc $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{N} = +\infty$ et $\lim_{N' \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{N'}} = 0$. Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est convergente.

Correction de l'exercice 16

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, c'est-à-dire montrons tout d'abord que la suite est croissante, puis qu'elle est majorée.

1) Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite croissante.

2) Pour tout entier naturel k tel que $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} k \geq k-1 > 0 &\stackrel{\text{car } k > 0}{\Rightarrow} k^2 \geq k(k-1) > 0 && \stackrel{\text{car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_*^+}{\Rightarrow} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \Rightarrow \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \\ \Rightarrow 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \Rightarrow \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{k - (k-1)}{k(k-1)} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \left(\frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ainsi, comme $n > 0$, $2 - \frac{1}{n} < 2$, c'est-à-dire $u_n \leq 2$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 2.

3) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc elle converge vers un réel l tel que $l \leq 2$.

Remarque :

On peut montrer que $l = \frac{\pi^2}{6}$.

On appelle **séries de Riemann** les suites définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \quad (\text{avec } \alpha \in \mathbb{N})$$

Etudier le comportement des suites arithmético-géométriques définies par
$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases} \quad (u_0 \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$$

Remarque : Les suites arithmético-géométriques sont également appelées suites récurrentes linéaires d'ordre 1.

Correction de l'exercice 17

Tout d'abord, commençons par traiter les quelques cas particuliers.

1) Si $a = 0$,

Alors $u_{n+1} = b$ (pour tout entier naturel $n \geq 1$). La suite (u_n) est donc stationnaire à partir du rang 1 et $u_n = b$ pour tout entier naturel n non nul. La suite (u_n) admet donc b pour limite.

2) Si $a = 1$ et $b = 0$,

Alors $u_{n+1} = u_n$. La suite (u_n) est constante et $u_n = u_0$. La suite (u_n) admet donc u_0 pour limite.

3) Si $a = 1$ et $b \neq 0$,

Alors $u_{n+1} = u_n + b$. La suite (u_n) est donc arithmétique de raison b et de premier terme u_0 . On a alors, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + bn$. La suite (u_n) diverge donc vers $-\infty$ si $b < 0$ ou vers $+\infty$ si $b > 0$.

4) Si $a \neq 1$ et $b = 0$,

Alors $u_{n+1} = au_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison a et de premier terme u_0 . On a alors, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times a^n$.

Dans ce cas,

- Si $a > 1$, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si $u_0 < 0$ ou vers $+\infty$ si $u_0 > 0$.
- Si $a \leq -1$, la suite (u_n) diverge et n'a pas de limite.
- Si $a \in]-1; 1[$, la suite (u_n) converge vers 0.

Désormais, abordons le(s) cas où $a \neq 1$.

L'idée de la démarche consiste à trouver une suite géométrique (g_n) de raison a , obtenue par la différence des suites (u_n) et (v_n) , respectivement définies par $u_{n+1} = au_n + b$ et $v_{n+1} = av_n + b$.

En effet, $g_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = au_n + b - (av_n + b) = au_n + b - av_n - b = a(u_n - v_n) = ag_n$.

En considérant par exemple que la suite (v_n) est une suite constante telle que $v_n = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), on obtient $v_{n+1} = v_n \Leftrightarrow \lambda = a\lambda + b$.

Comme $a \neq 1$, il résulte que $\lambda = \frac{b}{1-a}$. La suite (g_n) définie par $g_n = u_n - v_n$, c'est-à-dire par $g_n = u_n - \lambda$, est alors une suite géométrique de raison a et de premier terme $g_0 = u_0 - \lambda$.

On en déduit alors que, pour tout entier naturel n , $g_n = g_0 \times a^n = (u_0 - \lambda)a^n$.

Dès lors, il vient de $g_n = u_n - v_n$ que $u_n = g_n + v_n$, c'est-à-dire $u_n = (u_0 - \lambda)a^n + \lambda$.

Ainsi, plusieurs cas sont à distinguer.

5) Si $u_0 = \lambda$,

Alors $u_n = \lambda$. La suite (u_n) est constante et converge donc vers $\lambda = \frac{b}{1-a}$.

6) Si $u_0 \neq \lambda$ et $a > 1$,

Alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si $u_0 - \lambda < 0$, c'est-à-dire si $u_0 < \lambda$, ou diverge vers $+\infty$ si $u_0 - \lambda > 0$, c'est-à-dire si $u_0 > \lambda$.

7) Si $u_0 \neq \lambda$ et $a \leq -1$,

Alors la suite (u_n) diverge et n'a pas de limite.

8) Si $u_0 \neq \lambda$ et $a \in]-1 ; 1[$,

Alors la suite converge vers $\lambda = \frac{b}{1-a}$.

Etudier la limite de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

Correction de l'exercice 18

Remarquons tout d'abord que, pour tout entier naturel n non nul :

$$1) \frac{1}{1 \times 2} = \frac{2-1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$2) \frac{1}{2 \times 3} = \frac{3-2}{6} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$3) \frac{1}{3 \times 4} = \frac{4-3}{12} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

4) ...

$$5) \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

On appelle **série télescopique** la somme des termes d'une suite qui s'annulent de proche en proche.

La série télescopique correspondante à une suite (u_n) est donc la somme de la forme suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$$