UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MIME 22
Groupe 22.1

Année 2009/2010
LM115-Suites et Intégrales

Feuille d'exercices 4

Suites

1 Convergence de suites

Exercice 1
Ecrire l'énoncé qui traduit : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante. Cet énoncé est-il équivalent à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ?

Exercice 2
Démontrer en utilisant la définition de la convergence des suites que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$.

Exercice 3
Soit $a > 0$, étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sqrt[n]{a}$.

Exercice 4
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l > 0$. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N_0,\ u_n \geq \dfrac{l}{2}$.

Exercice 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 6
On appelle suites arithmético-géométriques, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui s'écrit :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ \text{pour } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b,\ \text{avec } a \notin \{0,1\} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

.

a) Première méthode :
   1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v_n = u_n - c$ soit géométrique.
   2. Montrer que, si $|a| < 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

b) Deuxième méthode : Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a^n u_0 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a^i b$, en déduire la limite de u_n en fonction de a.

Exercice 7
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 4$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} = u_n + 2$ et $w_n = u_n - 1$.

1. Montrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. En déduire u_n en fonction de n.
3. On pose $T_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, exprimer T_n et S_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n \to +\infty} T_n$ et $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 8
On considère la suite (u_n) définie par $u_2 = 3$ et pour $n \geq 2$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$.

1. Montrer que la suite pour tout $n \geq 2$, $u_n > 1$, en déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est bien définie.
2. On pose pour $n \geq 2$, $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$, montrer que v_n est arithémitique.
3. Calculer la limite de (u_n).
4. Posons $S_n = \sum_{k=2}^{n} v_k$, calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 9
Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx)$. Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 10
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, par $u_n = \dfrac{E(nx)}{n}$ converge vers x, en déduire que tout réel est limite de rationnels.

Exercice 11
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_*^{\mathbb{N}}$, telle que $\left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ converge vers $l \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que si $l < 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que si $l > 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
3. Montrer que si $l < 1$, $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge.

Exercice 12
Déterminer la convergence des suites suivantes :

$$(-1)^n, \quad \frac{a^n}{n!} \text{ avec a} > 0, \quad \frac{n!}{n^n}, \quad (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n, \quad (2 - \frac{1}{n})^n, \quad (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Déterminer la monotonie des suites suivantes :

$$\frac{1}{n^2 + (-1)^n}, \quad \frac{n+1}{n+2}, \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Exercice 13
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
2. Trouver une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $k \geq 2$, $(v_{kn})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge mais (v_n) ne converge pas.

Exercice 14
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

1. a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l , alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

converge vers l.

b) Montrer que la réciproque est fausse.

2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l_1 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l_2, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n+1-k}$$

converge vers $l_1 l_2$.

3. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k$$

converge vers l.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ et supposons que u_{n+1}/u_n converge vers l, supposons que $l > 0$, montrer alors que $u_n^{1/n}$ converge vers l.

2 Suites adjacentes

Exercice 15

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et on pose $v_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{1}{n.n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que e est irrationnel (par l'absurde, en considérant $e = \dfrac{a}{b}$ et $x = b!\left(e - \displaystyle\sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right)$).

Exercice 16

Considérons deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 \leq v_0,\ u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4}, \qquad v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{4}$$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$.
2. Montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge géométriquement vers 0.
3. Montrer la convergence des deux suites par deux méthodes (en utilisant 2) et sans utiliser 2)).

Exercice 17

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+$. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq b_n$ puis $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leq b_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq |b_n - a_n|/2$.
4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite notée $M(a, b)$.
5. Montrer que pout tout a, b, λ positifs,

$$M(a, b) = M(b, a), \qquad M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b).$$

Exercice 18
Considérons deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
   (on pourra utiliser $\ln(\frac{n+1}{n}) = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$ ou $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(\frac{x+1}{x})$)
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\gamma \in [1 - \ln(2), 1]$.

3 Suites Récurrentes

Exercice 19
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, croissante et tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20
Etudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \; u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Exercice 21
1. Tracer le tableau de variation de $x :\mapsto f(x) = \sqrt{6 - x}$.
2. Montrer qu'on peut définir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [-30, 6]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 22
On pose $f(x) = \sqrt{6 + x}$.
1. Montrer qu 'on peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \geq -6$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Dresser le tableau de signe de $f(x) - x$. Montrer que $[-6, 3]$ et $[3, +\infty[$ sont stables par f.
3. Si $u_0 \in [-6, 3]$, donner la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Si $u_0 \in [3, +\infty[$, donner la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 23
On appelle suite récurrente double toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \text{ où } (a, b) \in \mathbb{C}^2 \; a \neq 0, \; b \neq 0 \tag{1}$$

1. Montrer que l'ensemble des suites verfiant (1) est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 2. (Trouver un isomorphisme vers $\mathbb{C}^2$)
2. On appelle résolvante (R) l'équation $x^2 = ax + b$.
   a) Montrer que si (R) a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors l'ensemble des suites verifiant (1) est égal à
   $$\{(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} : \lambda \in \mathbb{C},\ \mu \in \mathbb{C}\}.$$
   b) Montrer que si (R) a une unique racine $r \in \mathbb{C}$, alors l'ensemble des suites vérifiant (1) est égal à
   $$\{((\lambda + \mu n)r^n)_{n\in\mathbb{N}} : \lambda \in \mathbb{C},\ \mu \in \mathbb{C}\}.$$
3. Donner l'expression et étudier la convergence des deux suites récurrentes doubles définies par

a) $u_0 = 1,\ u_1 = 1, u_{n+2} = \dfrac{3}{4}u_{n+1} - \dfrac{1}{8}u_n.$

b) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - (n+1)^2,\ (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$. (Utiliser $v_n = \dfrac{(n^4 - n^2)}{12}$).