EXPRESS

Daniel FREDON
Myriam MAUMY-BERTRAND
Frédéric BERTRAND

Mathématiques

Analyse

en 30 fiches

Comprendre et s'entraîner facilement

DUNOD

Daniel FREDON
Myriam MAUMY-BERTRAND
Frédéric BERTRAND

Mathématiques

Analyse

en 30 fiches

DUNOD

ISBN 978-2-10-053933-8

Avant-propos

L'organisation en crédits d'enseignement entraîne des variations entre les Universités.

Les deux premières années de licence (L1 et L2) ont cependant suffisamment de points communs pour proposer des livres utiles à tous.

Avec la collection Express, vous allez vite à l'essentiel.

Pour aller vite, il faut la taille mince et le prix léger.

Il faut aussi une organisation en fiches courtes et nombreuses pour vous permettre de ne retenir que les sujets du moment, semestre après semestre.

Il faut avoir fait des choix cohérents et organisés de ce qui est le plus couramment enseigné lors des deux premières années des licences de mathématiques, informatique, mais aussi de sciences physiques, et dans les cycles préparatoires intégrés.

Il faut un index détaillé pour effacer rapidement un malencontreux trou de mémoire.

Dans la collection Express, il y a donc l'essentiel, sauf votre propre travail. Bon courage!

Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements, seront accueillis avec plaisir.

daniel.fredon@laposte.net
mmaumy@math.u-strasbg.fr
fbertran@math.u-strasbg.fr

Table des matières

FICHE 1

Nombres réels

I Premières propriétés

- **Corps ordonné**

On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est :

– un corps pour dire qu'il est muni de deux opérations $+$ et $\times$, avec toutes les propriétés dont vous avez l'habitude ;

– un corps ordonné pour dire que la relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec $+$ et $\times$, c'est-à-dire :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \in \mathbb{R} \qquad a \leqslant b \implies a+c \leqslant b+c \ ;$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall c \geqslant 0 \qquad a \leqslant b \implies ac \leqslant bc \,.$$

- **Règles de calcul** ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k} \qquad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k \,.$$

- **Valeur absolue**

La valeur absolue d'un réel a, notée $|a|$, est définie par :

$$|a| = a \ \text{ si } \ a \geqslant 0 \qquad ; \qquad |a| = -a \ \text{ si } \ a \leqslant 0 \,.$$

- **Propriétés**

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$$|a| \geqslant 0 \quad ; \quad |a| = 0 \iff a = 0 \quad ; \quad |ab| = |a|\,|b| \ ;$$

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \quad ; \quad \big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a-b| \,.$$

- **Propriété d'Archimède**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $bk > a$.

- **Partie entière**

Étant donné un nombre réel x, il existe un plus grand entier relatif, noté $E(x)$ ou $[x]$, tel que $E(x) \leqslant x$. On l'appelle la partie entière de x.

On a donc, par définition : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$.

Attention à ne pas confondre avec la suppression de la partie décimale quand $x < 0$; par exemple $E(-4,3) = -5$.

II Intervalles

- **Définition**

Pour $a \leqslant b$, le segment, $[a,b]$ est défini par :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ a \leqslant x \leqslant b\} \, .$$

On utilise souvent la propriété :

$$c \in [a,b] \iff \exists t \in [0,1] \quad c = ta + (1-t)b \, .$$

On définit de même les autres types d'intervalles :

$]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,+\infty[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

- **Propriété caractéristique**

Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si, et seulement si :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in A \qquad a < c < b \Longrightarrow c \in A \, .$$

- **Voisinage d'un point**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Une partie V de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a si elle contient un intervalle ouvert centré sur a, soit du type $]a-\alpha, a+\alpha[$ avec $\alpha > 0$.

- **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$**

Tout intervalle $]a,b[$ non vide contient au moins un rationnel et un irrationnel.
On dit que $\mathbb{Q}$ et son complémentaire $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

III Ordre dans $\mathbb{R}$

- **Majoration, minoration**

Définitions

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que a est un majorant de A si $x \leqslant a$ pour tout x de A. Si, en plus, $a \in A$, alors a est le plus grand élément de A, noté $\max A$. Si A admet un majorant, on dit que A est majorée.
On définit de même : minorant, plus petit élément, partie minorée.

Unicité

Si une partie non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, ou un plus petit élément, il est unique. Mais il peut ne pas exister.

Surveillez votre vocabulaire : **un** majorant, **le** plus grand élément.

Cas particulier des entiers naturels

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

- **Borne supérieure, inférieure**

Définitions

La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A.
La borne inférieure de A est le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A.

Caractérisation

M est la borne supérieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad x \leqslant M$, c'est-à-dire que M est un majorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \quad M - \varepsilon < x$, c'est-à-dire que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant.

m est la borne inférieure de A si, et seulement si, on a, à la fois :

$\forall x \in A \quad m \leqslant x$, c'est-à-dire que m est un minorant ;

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \quad x < m + \varepsilon$, c'est-à-dire que $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant.

Remarque

Si A admet un plus grand élément, alors c'est la borne supérieure de A.
Si A admet un plus petit élément, alors c'est la borne inférieure de A.

Théorème d'existence

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Application

Soit E la partie de $\mathbb{R}$ définie par : $E = \left\{ \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \;;\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Montrez que E est infinie et bornée.
Déterminez, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de E.
Étudiez l'existence d'un plus petit élément, d'un plus grand élément, de E.

Solution

Notons $u_n = \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}}\cdot$ Montrons que les éléments de E sont tous distincts, ce qui prouvera que E est infinie. Raisonnons par l'absurde en supposant deux éléments égaux pour deux entiers strictement positifs n_0 et p_0 :

$$u_{n_0} = u_{p_0} \iff \frac{n_0}{p_0} = \frac{p_0}{n_0} \iff n_0 = p_0\,.$$

On a $u_n \leqslant 1$ car $n - \dfrac{1}{n} \leqslant n + \dfrac{1}{n}$ et $0 \leqslant u_n$ car $n - \dfrac{1}{n} \geqslant 0$.
E étant minorée par 0 et majorée par 1, admet une borne inférieure m et une borne supérieure M qui vérifient : $m \geqslant 0$ et $M \leqslant 1$.
Comme $u_1 = 0$, on a $m = 0$ et 0 est le plus petit élément de E.
Montrons que $M = 1$ en montrant que, pour tout $\varepsilon > 0$, $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E. Pour ceci, il faut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\begin{aligned}
1 - \varepsilon < \frac{n - \dfrac{1}{n}}{n + \dfrac{1}{n}} &\iff (1-\varepsilon)\left(n + \frac{1}{n}\right) < n - \frac{1}{n} \\
&\iff (1-\varepsilon)\,(n^2+1) < n^2 - 1 \\
&\iff \varepsilon n^2 > 2 - \varepsilon
\end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 1$, tous les éléments de E sont supérieurs à $1 - \varepsilon$.

Si $\varepsilon \leqslant 1$, il suffit de choisir $n > \sqrt{\dfrac{2-\varepsilon}{\varepsilon}}$ pour montrer que $1 - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E. On a donc bien $M = 1$.

Et comme 1 n'appartient pas à E car $n - \dfrac{1}{n} \neq n + \dfrac{1}{n}$, la partie E n'a pas de plus grand élément.

Application

Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Montrez que :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

Solution

Les parties A et B étant bornées, admettent des bornes supérieures.
x étant un élément quelconque de $A \cup B$, il appartient à A ou à B.
Il vérifie donc $x \leqslant \sup A$ ou $x \leqslant \sup B$, soit $x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
Cela prouve que l'ensemble $A \cup B$ est borné.
Il admet donc une borne supérieure telle que $\sup(A \cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$.
Supposons, à titre d'exemple, que $\sup A \geqslant \sup B$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\sup A$, il existe $x \in A$ tel que

$$\sup A - \varepsilon < x$$

c'est-à-dire qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que

$$\max(\sup A, \sup B) - \varepsilon < x$$

ce qui prouve que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Application

Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \ ; \ x^2 < 2\}$. Prouvez que A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Solution

Il faut montrer que l'ensemble des majorants rationnels de A n'a pas de plus petit élément.
Soit y un majorant rationnel de A. On a $\sqrt{2} < y$. En effet, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel, et si on avait $y < \sqrt{2}$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existerait un rationnel entre y et $\sqrt{2}$, ce qui contredirait la définition de y.
D'autre part, l'intervalle ouvert $]\sqrt{2}, y[$ contient au moins un rationnel z, qui est alors un majorant rationnel de A tel que $z < y$.
A n'admet donc pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Application

1. Si $n \in \mathbb{N}$, démontrez l'encadrement :

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n - 1 < (3+\sqrt{5})^n < (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\,.$$

2. Montrez alors que la partie entière de $(3+\sqrt{5})^n$ est un entier impair.

Solution

1. Comme $3-\sqrt{5} \approx 0{,}76$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$.
Sans calculatrice, on aboutit à la même conclusion en remarquant que $4 < 5 < 9$ entraîne $2 < \sqrt{5} < 3$.
On en déduit l'encadrement de l'énoncé :

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n - 1 < (3+\sqrt{5})^n < (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\,.$$

2. Il reste à démontrer que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
En appliquant deux fois la formule du binôme de Newton, on a :

$$(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \left[(\sqrt{5})^k + (-\sqrt{5})^k\right].$$

Dans cette somme, tous les termes correspondant à k impair sont nuls.

Et si $k = 2p$, le terme correspondant s'écrit : $\binom{n}{2p} 3^{n-2p}(2 \times 5^p)$.

C'est un nombre entier pair.

Par conséquent, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$, somme de nombres entiers pairs, est un entier pair, ce qui entraîne le résultat annoncé.

FICHE 2

Généralités sur les fonctions numériques

I Premières propriétés

- **Fonction numérique**

Définir une fonction numérique f sur une partie non vide E de $\mathbb{R}$, c'est indiquer comment faire correspondre au plus un réel y à tout x de E.
Le réel y est l'image de x par f et s'écrit $f(x)$. On note :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

L'ensemble des réels qui ont effectivement une image par f est l'ensemble de définition de f. Il est noté D_f, ou D s'il n'y a pas d'ambiguité.

- **Représentation graphique**

Le plan étant rapporté à un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, la représentation graphique de f est l'ensemble $\mathcal{C}_f$ des points de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ avec $x \in D_f$.

- **Parité**

– f est paire si

$$\forall x \in D_f \qquad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à (Oy).
– f est impaire si

$$\forall x \in D_f \qquad (-x) \in D_f \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x).$$

Son graphe est symétrique par rapport à O.

- **Périodicité**

f est périodique, de période $T \in \mathbb{R}_+^*$ (ou T-périodique), si

$$\forall x \in D_f \qquad (x+T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

Son graphe est invariant par les translations de vecteurs $kT\overrightarrow{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- **Sens de variation**

  – f est croissante sur un intervalle I si $I \subset D_f$ et
  $$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)\,.$$
  – f est décroissante sur I si $I \subset D_f$ et
  $$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)\,.$$
  – f est monotone sur I si elle est croissante sur I, ou décroissante sur I.
  – Avec des inégalités strictes, on définit : f strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone, sur I.

- **Extrémum**

  – f admet un maximum (resp. minimum) global en $x_0 \in D_f$ si :
  $$\forall x \in D_f \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0)).$$
  – f admet un maximum (resp. minimum) local en $x_0 \in D_f$, s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0, tel que :
  $$\forall x \in I \cap D_f \quad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(x_0))\,.$$
  Un maximum ou un minimum local est dit extrémum local en x_0.
  Un extrémum est un maximum ou un minimum.

- **Fonction lipschitzienne**

  f est une fonction lipschitzienne de rapport $k > 0$, ou k-lipschitzienne, si :
  $$\forall x \in D_f \quad \forall y \in D_f \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|\,.$$
  Lorsque $k < 1$, f est dite contractante.

II Relation d'ordre

- **Comparaison de fonctions**

  f et g étant deux fonctions, à valeurs réelles, définies sur le même ensemble de définition D, on note $f \leqslant g$ (resp. $f \geqslant g$) si :
  $$\forall x \in D \quad f(x) \leqslant g(x) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant g(x))\,.$$
  Si $f \geqslant 0$, f est dite positive.

- **Majorant, minorant**

  Si l'ensemble des images $f(D)$ est majoré, ou minoré, ou borné, on dit que f est majorée, ou minorée, ou bornée.
  Si l'image $f(A)$ de $A \subset D$ admet une borne supérieure, ou une borne inférieure, on parle de borne supérieure, de borne inférieure, de f sur A et on note :

$$\sup_{x\in A} f(x) \quad ; \inf_{x\in A} f(x).$$

- **Propriétés**

$$\inf_{x\in A} f(x) = -\sup_{x\in A}\big(-f(x)\big).$$

Si, pour tout $x \in A$, on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\sup\limits_{x\in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in A} g(x)$.

Si $A \subset B$, on a : $\sup\limits_{x\in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in B} f(x)$ et $\inf\limits_{x\in A} f(x) \geqslant \inf\limits_{x\in B} f(x)$.

III Opérations sur les fonctions

- **Valeur absolue d'une fonction**

f étant définie sur D, la fonction $|f|$ est définie sur D par $x \mapsto |f(x)|$.
On définit aussi f^+ et f^- sur D par :

$$f^+(x) = \sup\,(f(x),0)\ ;\ f^-(x) = \sup\,(-f(x),0)\,.$$

On a alors $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

- **Opérations algébriques**

Soit f et g deux fonctions numériques et λ un réel.
La fonction λf est définie sur D_f par :

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

La fonction $f+g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

La fonction $f\,g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :

$$(f\,g)(x) = f(x)\,g(x).$$

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $D_f \cap D_g \setminus \{x\,;g(x)=0\}$ par :

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\cdot$$

- **Composition**

On appelle composée de f par g la fonction définie sur $D_f \cap \overset{-1}{f}(D_g)$ par :

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Application

1. Soit f une fonction paire définie sur $[-a,a]$ avec $a > 0$.
Montrez que, si la restriction de f à $[0,a]$ est croissante, alors la restriction de f à $[-a,0]$ est décroissante.
2. Soit g une fonction impaire définie sur $[-a,a]$.
Montrez que, si la restriction de g à $[0,a]$ est croissante, alors g est croissante sur $[-a,a]$.

Solution

1. Soit x et x' tels que $-a \leqslant x < x' \leqslant 0$; alors $0 \leqslant -x' < -x \leqslant a$.
La restriction de f à $[0,a]$ étant croissante, on a :

$$f(-x') \leqslant f(-x),$$

puis, comme f est paire : $f(x) \geqslant f(x')$, ce qui démontre que la restriction de f à $[-a,0]$ est décroissante.

2. De la même manière, en partant de $-a \leqslant x < x' \leqslant 0$, on obtient :

$$g(-x') \leqslant g(-x),$$

puis, comme g est impaire : $-g(x') \leqslant -g(x)$, d'où $g(x) \leqslant g(x')$, ce qui démontre que la restriction de g à $[-a,0]$ est croissante.
Comme les deux restrictions de g à $[-a,0]$ et à $[0,a]$ sont croissantes, la fonction g est croissante sur $[-a,a]$.

FICHE 3

Limite d'une fonction

I Définitions

Soit f une fonction, à valeurs réelles, définie sur un intervalle I contenant au moins deux points.

- **Limite d'une fonction en x_0**

  Soit x_0 un point appartenant à I, ou extrémité de I. On dit que f admet une limite finie l en x_0, et on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon .$$

> Cette limite peut exister même si f n'est pas définie en x_0. Mais si f est définie en x_0 et si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

  Si une fonction admet une limite l en x_0, cette limite est unique.

- **Limite à gauche, limite à droite**

  – f admet une limite à droite l en x_0 si la restriction de f à $I \cap]x_0, +\infty[$ admet pour limite l en x_0. On note : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$.

  – f admet une limite à gauche l en x_0 si la restriction de f à $I \cap]-\infty, x_0[$ admet pour limite l en x_0. On note : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

  – Si f est définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - a, x_0 + a[$, sauf en x_0, alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l .$$

  Si f est définie en x_0, ces deux limites doivent aussi être égales à $f(x_0)$.

- **Limite infinie en x_0**

  – On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \geqslant A .$$

  On note : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

  – On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si :

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leqslant \delta \Longrightarrow f(x) \leqslant -A .$$

On note : $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

- **Limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$**

  – On dit que f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon .$$

  On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

  On définit de manière analogue $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.

  – On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant A .$$

  On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

  On définit de manière analogue $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \; \ldots$

II Propriétés des limites

Soit f une fonction définie sur I, et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I, ou extrémité de I.

- **Propriétés liées à l'ordre**

  – Si f admet une limite finie en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0.

  – Si f admet une limite finie $l > 0$ en x_0, alors il existe $a > 0$ tel que $f \geqslant a$ au voisinage de x_0.

  – Si f est positive au voisinage de x_0 et admet une limite finie l en x_0, alors $l \geqslant 0$.

  – Si $f \leqslant g$ au voisinage de x_0, et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, alors $l \leqslant m$.

  – Théorème d'encadrement (ou « des gendarmes », ou « sandwich »)

  Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0, et vérifiant $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de x_0.

  Si f et h ont la même limite l (finie ou infinie) en x_0, alors g a pour limite l en x_0.

  – Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, et vérifiant $f \leqslant g$ au voisinage de x_0.

$$\text{Si } \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty .$$

$$\text{Si } \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty, \text{ alors } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty .$$

- **Opérations algébriques**

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et admettant des limites l et m en x_0, et λ un réel.
Alors les fonctions $f + g$, λf et fg admettent respectivement pour limites en x_0 : $l + m$, λf et lm.
Si de plus $m \neq 0$, $\frac{1}{g}$ a pour limite $\frac{1}{m}\cdot$

- **Fonction composée**

– Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 avec $\lim_{x \to x_0} f(x) = u_0$ et g définie au voisinage de u_0 telle que $\lim_{u \to u_0} g(u) = v$.
Alors $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = v$.

– Image d'une suite convergente
Soit f définie sur un intervalle I et a un point de I.
f a pour limite l au point a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers l, finie ou non.

> Pour démontrer qu'une fonction f n'a pas de limite lorsque x tend vers a, il suffit de fournir un exemple de suite (x_n) qui tende vers a et telle que $\big(f(x_n)\big)$ soit divergente.

- **Cas des fonctions monotones**

Soit f une fonction monotone sur $]a,b[$. Elle admet en tout point x_0 de $]a,b[$ une limite à droite et une limite à gauche.
Lorsque f est croissante, si elle est majorée, elle admet en b une limite à gauche finie, si elle n'est pas majorée, elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers b^-.
Pour f décroissante, on a la propriété analogue au point a.

III Comparaison au voisinage d'un point

Soit f et g deux fonctions définies sur I, et x_0 un point, fini ou infini, appartenant à I, ou extrémité de I.

- **Définitions**

– On dit que f est dominée par g au voisinage de x_0 s'il existe $A > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant A\,|g(x)|$ pour tout x d'un voisinage J de x_0.
notation : $f = O(g)$.

Si g ne s'annule pas sur J, cela signifie que $\frac{f}{g}$ est bornée sur J.

– On dit que f est négligeable devant g, ou que g est prépondérante devant f, au voisinage de x_0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage J de x_0 tel que l'on ait $|f(x)| \leqslant \varepsilon\,|g(x)|$ pour tout x de J.
notation : $f = o(g)$.
Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

– On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0, si on a $f - g = o(g)$. Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, cela signifie :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

notation : $f \sim g$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$.
La relation $\underset{x_0}{\sim}$ est transitive. Si l'on sait que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, on en déduit que $f \underset{x_0}{\sim} h$.

- **Exemples fondamentaux**

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$(\ln x)^\alpha = o(x^\beta) \text{ et } x^\beta = o(\mathrm{e}^{\gamma x}) \text{ où } \alpha > 0\,, \beta > 0\,, \gamma > 0.$$

Au voisinage de 0, on a :

$$|\ln x|^\alpha = o(x^\beta) \text{ où } \alpha > 0 \text{ et } \beta < 0\,.$$

- **Propriétés des fonctions équivalentes**

Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$.

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Des deux théorèmes précédents, il résulte que, lorsque l'on a à chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul.
Mais attention à ne pas effectuer un tel remplacement dans une somme, ni dans une fonction composée.

- **Équivalents classiques**

$$\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \sin x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2};$$

$$\ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \tan x \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad (1 + x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x\,.$$

Application

Déterminez les limites suivantes (si elles existent) :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+3x-7}-x\right] \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+3x-7}-x\right].$$

Solution

a) Lorsque x tend vers $-\infty$, $\sqrt{x^2+3x-7}$ existe et tend vers $+\infty$, ainsi que $-x$. Comme la somme de deux fonctions qui tendent toutes les deux vers $+\infty$ tend aussi vers $+\infty$, on a donc :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+3x-7}-x\right]=+\infty\,.$$

b) Lorsque x tend vers $+\infty$, la réponse n'est pas immédiate. Multiplions, et divisons, par $\sqrt{x^2+3x-7}+x$, puis simplifions par x (avec $x>0$) :

$$\sqrt{x^2+3x-7}-x=\frac{3x-7}{\sqrt{x^2+3x-7}+x}=\frac{3-\dfrac{7}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{x^2}}+1}\cdot$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, le numérateur tend vers 3, le dénominateur tend vers 2. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+3x-7}-x\right]=\frac{3}{2}\cdot$$

Application

Montrez que la fonction f, définie pour $x\neq 0$ par $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Solution

Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $x_n=\dfrac{1}{(2n+1)\,\dfrac{\pi}{2}}$ choisi de sorte que $f(x_n)=(-1)^n$.

Lorsque n tend vers $+\infty$, la suite (x_n) tend vers 0, et la suite $\big(f(x_n)\big)$ est divergente. Donc la fonction f n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Application

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique, et qui admet une limite finie l quand x tend vers $+\infty$. Démontrez que f est constante.

Solution

Soit T une période de f (avec $T > 0$), et y un réel quelconque. Par définition de la limite l, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists A > 0 \qquad x > A \implies |f(x) - l| < \varepsilon\,.$$

Comme $\mathbb{R}$ possède la propriété d'Archimède (*cf.* fiche 1), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y + nT > A$.

On en déduit que $|f(y + nT) - l| < \varepsilon$.

Et comme $f(y + nT) = f(y)$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |f(y) - l| < \varepsilon.$$

D'où $f(y) = l$ pour tout réel y, ce qui prouve que f est constante.

Application

Déterminez, si elle existe, la limite : $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\tan^2 x}}$.

Solution

Posons $f(x) = \left(\cos x\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}} = \mathrm{e}^{A(x)}$

avec $A(x) = \dfrac{1}{\tan^2 x}\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

Par ailleurs $\ln(\cos x) = \ln(1 + \cos x - 1) \underset{0}{\sim} \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

Par conséquent $A(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$.

On a donc $\lim\limits_{x \to 0} A(x) = -\dfrac{1}{2}$, puis, la fonction exp étant continue en 0 :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \mathrm{e}^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 0{,}607\,.$$

FICHE 4

Fonctions continues

I Continuité

- **Continuité en un point**

– f est continue en x_0 si elle est définie en x_0 et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

– f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

- **Prolongement par continuité**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \notin I$.
Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par $\tilde{f}(x_0) = l$ et $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in I$, est la seule fonction continue en x_0 dont la restriction à I soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

- **Continuité sur un intervalle**

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles. Une fonction f, définie sur D, est dite continue sur D, si f est continue en tout point de D.

II Image d'un intervalle

- **Théorème des valeurs intermédiaires**

Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

- **Image d'un intervalle fermé**

Si f est continue sur un intervalle fermé I, alors $f(I)$ est un intervalle fermé.
En particulier, si une fonction f est continue sur $[a,b]$, et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a,b]$.

- **Cas d'une fonction strictement monotone**

Soit f une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle I.

f est une bijection de I sur $f(I)$, et sa bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur l'intervalle $f(I)$.
Dans un repère orthonormé, les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.

III Continuité uniforme

- **Définition**

Une fonction f est uniformément continue sur D si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall x' \in D \quad |x - x'| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon\,.$$

> Dans cette écriture logique, α dépend de ε, mais pas de x ; d'où l'origine du mot uniforme.

La continuité uniforme sur D entraîne la continuité sur D.

- **Théorème de Heine**

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

- **Cas d'une fonction lipchitzienne**

Si f est lipschizienne sur D, alors elle est uniformément continue sur D.

Application

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, et qui possède la propriété :

$$\forall x \in [0,1] \qquad \forall y \in [0,1] \qquad f(x) = f(y) = 0 \Longrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0\,.$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $h \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant h \leqslant 2^n$, on a : $f\left(\frac{h}{2^n}\right) = 0$.

2. En supposant f continue, montrez qu'alors f est la fonction nulle.

Solution

1. Notons (P_n) la propriété à démontrer, et faisons un raisonnement par récurrence sur n.

La propriété (P_0) est vraie par hypothèse. Supposons que, pour k entier naturel quelconque, (P_k) soit vraie, et démontrons qu'alors (P_{k+1}) est vraie.

Soit $h \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant h \leqslant 2^{k+1}$.

- Si h est pair, on a $h = 2p$ avec $0 \leqslant p \leqslant 2^k$ et $\frac{h}{2^{k+1}} = \frac{p}{2^k}\cdot$ On a alors par suite de (P_k) :

$$f\left(\frac{h}{2^{k+1}}\right) = f\left(\frac{p}{2^k}\right) = 0\,.$$

- Si h est impair, on a $h = 2p+1$ avec $0 \leqslant p < 2^k$.

On peut alors écrire : $\frac{h}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^k} + \frac{p+1}{2^k}\right)$.

Comme on a, par suite de (P_k), $f\left(\frac{p}{2^k}\right) = f\left(\frac{p+1}{2^k}\right) = 0$, on en déduit $f\left(\frac{h}{2^{k+1}}\right) = 0$ à cause de l'hypothèse faite sur f.

La propriété (P_n) est donc démontrée pour tout entier naturel n.

2. Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{2^n} \times E\big(a\,2^n\big)$.

On a alors $u_n \leqslant a < u_n + \frac{1}{2^n}$ puis $0 \leqslant a - u_n < \frac{1}{2^n}$; de plus $f(u_n) = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et, par continuité de f, $f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$.

Application

Un marcheur parcourt 12 km en une heure. Montrez qu'il existe au moins un intervalle de 30 min pendant lequel il parcourt exactement 6 km.

Solution

Si t est la durée (en min) depuis le départ, on a $t \in [0,60]$.
Désignons par $f(t)$ la distance parcourue (en km) pendant la durée t. On peut supposer f continue.
Notons $g(t)$ la distance parcourue (en km) en 30 min à partir de l'instant t.
g est continue et liée à f par :

$$g(t) = f(t+30) - f(t) \text{ avec } t \in [0,30].$$

On a $g(0) = f(30)$ et $g(30) = 12 - f(30)$ car $f(0) = 0$ et $f(60) = 12$.

La valeur $6 = \dfrac{g(0)+g(30)}{2}$ appartient à l'intervalle d'extrémités $g(0)$ et $g(30)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc au moins un nombre $t_0 \in [0,30]$ tel que $g(t_0) = 6$.
Pendant la demi-heure $[t_0, t_0+30]$, le marcheur parcourt exactement 6 km.

Application

Montrez que la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas uniformément continue.

Solution

Si f était uniformément continue sur $I =]0,+\infty[$, on aurait :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad \forall x' \in I \qquad |x - x'| < \eta \Longrightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x'}} \right| < \varepsilon\,.$$

On pourrait prendre en particulier $x' = 2x$ et on aurait :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x| < \eta \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2x}} < \varepsilon$$

ce qui est incompatible avec $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2x}} = +\infty$.

FICHE 5 Fonctions dérivables

I Définitions

- **Dérivée en un point**

  Soit f une fonction définie sur D et $x_0 \in D$ tel que f soit définie au voisinage de x_0. On appelle dérivée de f au point x_0 le nombre (lorsqu'il existe) :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) .$$

  On dit alors que f est dérivable en x_0.

  Si $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, f est dite dérivable à droite en x_0, et cette limite est appelée dérivée à droite de f en x_0, et notée $f'_d(x_0)$.

  On définit de même la dérivée à gauche en x_0, notée $f'_g(x_0)$.

  f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f admet en x_0 une dérivée à droite et une dérivée à gauche égales.

- **Fonction dérivée**

  f est dite dérivable sur une réunion D d'intervalles ouverts, si elle dérivable en tout point de D.

  La fonction dérivée de f est définie sur D par : $x \mapsto f'(x)$.

- **Dérivées successives**

  Soit f dérivable sur D. Si f' est dérivable sur D, on note sa fonction dérivée f'' ou $f^{(2)}$. On l'appelle dérivée seconde de f.

  Pour n entier, on définit par récurrence la dérivée n-ième, ou dérivée d'ordre n, de f en posant $f^{(0)} = f$, puis $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, lorsque $f^{(n-1)}$ est dérivable sur D.

  f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur D si $f^{(n)}$ existe sur D, et est continue sur D.

  f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D, ou indéfiniment dérivable, si f admet des dérivées de tous ordres sur D.

- **Interprétation graphique**

  f dérivable en x_0 signifie que le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente de pente $f'(x_0)$.

Son équation est :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en x_0, mais le graphe de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à Oy.

- **Dérivabilité et continuité**

Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0.

Attention, la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue, et non dérivable, en 0, car elle admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite différentes.

II Opérations sur les fonctions dérivables

- **Opérations algébriques**

Si f et g sont dérivables en x_0, il en est de même de $f + g$, de fg, et de $\dfrac{f}{g}$ si $g(x_0) \neq 0$; et on a :

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.
\end{aligned}$$

- **Fonction composée**

Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0, et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)\,.$$

- **Dérivée d'une fonction réciproque**

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. On suppose que f est dérivable en $f(x_0)$ et que $f'(x_0) \neq 0$.
Alors, la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

- **Formule de Leibniz**

  Si f et g admettent des dérivées d'ordre n en x_0, alors il en est de même de fg ; et on a :

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0)\, g^{(n-k)}(x_0)\,.$$

III Variations d'une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- **Théorème**

  Si, pour tout $x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.
  Si, pour tout $x \in I, f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.
  Si, pour tout $x \in I, f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
  Ce dernier résultat est encore valable si f' s'annule en des point isolés, c'est-à-dire tels que leur ensemble ne contienne pas d'intervalle.

- **Condition nécessaire d'extrémum local**

  Si f admet un extrémum local en x_0 et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

- **Condition suffisante d'extrémum local**

  f, f' et f'' étant continues sur $]a,b[$, si en $x_0 \in]a,b[$, on a $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \neq 0$, la fonction f présente un extrémum local en x_0.
  C'est un maximum si $f''(x_0) < 0$, un minimum si $f''(x_0) > 0$.

Application

Étudiez la dérivabilité et calculez la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \text{ pour } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

Solution

Pour $x \neq 0$, la fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} \cdot$

Étudions la dérivabilité en 0.

Le quotient $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 (*cf.* fiche 3).

La fonction f n'est donc pas dérivable en 0.

Comme $0 < |f(x)| \leqslant |x|$, la fonction f est continue en 0. On a donc ici un exemple de fonction qui est continue en un point et non dérivable en ce point.

Application

Le produit de deux fonctions peut-il être dérivable en x_0 si l'une au moins des fonctions n'est pas dérivable en x_0 ?

Solution

Pour prouver que la réponse est oui, il suffit de fournir un exemple, comme les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1 \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1\,.$$

Ces fonctions ne sont pas continues en 0, donc non dérivables en 0. Leur produit est la fonction constante égale à 1, donc dérivable en 0 et aussi sur $\mathbb{R}$.

Application

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} x^n$ où $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrez que la dérivée k-ième de f_n s'écrit :

$$f_n^{(k)}(x) = P_k(x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

où P_k est une fonction polynôme à expliciter.
Si $k \leqslant n$, calculez $P_k(0)$.

Solution

f_n est le produit de deux fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc indéfiniment dérivable. Sa dérivée k-ième s'obtient à l'aide de la formule de Leibniz :

$$f_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x^n)^{(i)} (\mathrm{e}^{-x})^{(k-i)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (x^n)^{(i)}\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Si $k \leqslant n$ $\quad f_n^{(k)}(x) = \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i}\right]\mathrm{e}^{-x}.$

Si $k > n$ $\quad f_n^{(k)}(x) = \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i}\right]\mathrm{e}^{-x}$

car $(x^n)^{(i)} = 0$ pour $i > n$.

On obtient donc bien la forme annoncée, avec :

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i} \text{ pour } k \leqslant n$$

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i} \text{ pour } k > n.$$

Si $k < n$, pour tout i de 0 à k, on a $n - i \geqslant 1$. Par conséquent, $P_k(0) = 0$.
Si $k = n$, on peut écrire :

$$P_n(x) = n! + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \frac{n!}{(n-i)!} x^{n-i}$$

et on en déduit que $P_n(0) = n!$.

Application

Un tracteur partant d'un point A situé sur une route rectiligne doit atteindre un point B situé dans un champ. On connait les distances $AC = l$ et $CB = d$.
On sait que le tracteur va deux fois moins vite dans le champ que sur la route.
Il quitte la route en un point D de $[AC]$ à préciser. Les trajets successifs de A à D et de D à B sont supposés rectilignes.
Déterminez le point D pour que le temps total soit minimal. Discutez suivant l et d.

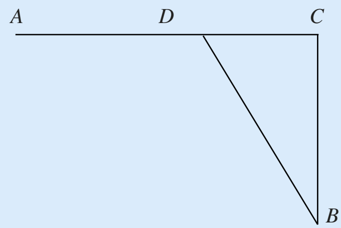


Figure 5.1

Solution

Soit $DC = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant l$. On a alors $AD = l - x$ et $DB = \sqrt{x^2 + d^2}$.
Si v désigne la vitesse du tracteur dans le champ, sa vitesse sur la route est $2v$; et le temps total mis par le tracteur pour atteindre B est :

$$t(x) = \frac{l - x}{2v} + \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v}.$$

On cherche l'abscisse x_0 du minimum de la fonction t sur $[0,l]$. On a :

$$t'(x) = -\frac{1}{2v} + \frac{x}{v\sqrt{x^2 + d^2}}$$

puis : $t'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow 2x \geqslant \sqrt{x^2 + d^2} \Longleftrightarrow x \geqslant \dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

- Si $d > \sqrt{3}\,l$, alors $l'(x) < 0$ sur $[0,l]$. La fonction t est strictement décroissante sur $[0,l]$ et atteint son minimum en $x_0 = l$, c'est-à-dire que le tracteur quitte la route en A.

- Si $0 \leqslant d \leqslant \sqrt{3}\,l$, alors :

$$t'(x) < 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < \frac{d}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad t'(x) > 0 \quad \text{pour} \quad \frac{d}{\sqrt{3}} < x < l.$$

La fonction t passe donc par un minimum en $x_0 = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$.

FICHE 6

Compléments sur les fonctions dérivables

I Théorème de Rolle et des accroissements finis

- **Théorème de Rolle**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Autre énoncé

Si f est dérivable sur un intervalle I, entre deux valeurs de I qui annulent f, il existe au moins une valeur de I qui annule f'.

- **Égalité des accroissements finis**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(c)\,.$$

Cette égalité et le théorème de Rolle, valables pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ne se généralisent pas au cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$.

- **Inégalité des accroissements finis**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors :

$$m\,(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M\,(b-a)\,.$$

En particulier, si $|f'| \leqslant M$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$.

- **Limite de la dérivée**

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et si f' a une limite finie l en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = l$.

Attention, il s'agit d'une condition suffisante de dérivabilité, mais elle n'est pas nécessaire. Il peut arriver que $f'_d(a)$ existe sans que f' ait une limite en a.

II Convexité

- **Partie convexe, fonction convexe**

  Une partie du plan est dite convexe si, dès qu'elle contient deux points A et B, elle contient tout le segment $[AB]$.
  Une fonction f, définie sur un intervalle I, est convexe sur I si la partie du plan située au-dessus de la courbe est convexe ; c'est-à-dire si tout arc de sa courbe représentative est situé au-dessous de la corde correspondante.
  Cette définition se traduit par :

$$\forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad \forall t \in [0,1], \quad f[tx_1 + (1-t)\,x_2] \leqslant tf(x_1) + (1-t)\,f(x_2).$$

  Si $-f$ est convexe, f est dite concave.

- **Inégalité de convexité**

  f étant convexe sur un intervalle I, si $x_1, \ldots, x_n$ appartiennent à I, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

- **Propriété des sécantes**

  Soit f une fonction convexe sur I, et x_0 un point fixé dans I. Notons $M\big(x, f(x)\big)$ et $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ des points du graphe de f.
  La fonction φ définie sur I par :

$$\varphi(x) = \text{pente } (M_0M) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  est croissante.

- **Fonctions convexes dérivables**

  Soit f une fonction dérivable sur I. La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante.
  Si f est deux fois dérivable sur I, cela correspond à f'' positive sur I.
  Le graphe de toute fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Application

Soit $a_0,a_1,\ldots,a_n$ des réels tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$.
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.
Montrez que l'équation $f(x) = 0$ a, au moins, une solution dans $]0,1[$.

Solution

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

C'est une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, et telle que $g(0) = g(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc au moins un réel $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0 = f(c)$.

Application

Prouvez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Solution

La fonction ln étant strictement croissante, il est équivalent de démontrer :

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

soit

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

L'égalité des accroissements finis, appliquée à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et $\frac{1}{n}$ montre qu'il existe $c \in]0,\frac{1}{n}[$ tel que

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 1 = \frac{1}{n}\frac{1}{1+c}.$$

Comme $\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < \frac{1}{n}\frac{1}{1+c} < \frac{1}{n}$ on obtient les inégalités annoncées.

Application

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour } x \neq 0 \quad ; \quad f(0) = 0.$$

Montrez que f est dérivable en 0, et que, pourtant, la limite $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ n'existe pas.

Solution

On a $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

car $0 \leqslant \left|x \cos\dfrac{1}{x}\right| \leqslant |x|$ permet d'appliquer le théorème d'encadrement.

Si $x \neq 0$, f est dérivable en x, et on a :

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Quand x tend vers 0, $2x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0, et $\sin\dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite (*cf.* fiche 3) ; donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Application

Démontrez l'encadrement :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

Solution

La fonction $\sin x$ est concave dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Son graphe est au dessous de sa tangente à l'origine, d'équation $y = x$, et au dessus de la sécante joignant les points $(0,0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$, d'équation $y = \dfrac{2}{\pi} x$.

L'encadrement annoncé en résulte.

FICHE 7

Logarithmes et exponentielles

I Fonction logarithme népérien

- **Définition et graphe**

Elle est définie pour $x > 0$ par :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0\,; \\ \forall x > 0 \qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}\cdot \end{cases}$$

Elle est strictement croissante.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty;\ \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est notée e (e $\approx 2{,}718$).

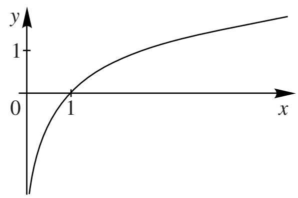


Figure 7.1

- **Propriétés algébriques**

$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln\ (a^r) = r \ln a \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b\,.$$

- **Convexité**

La fonction ln est concave sur $]0,+\infty[$, ce qui entraîne :

$$\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leqslant x\,.$$

La dérivée en $x = 1$ étant égale à 1, on a aussi : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

II Fonction exponentielle

- **Définition et graphe**

C'est la fonction réciproque de la fonction ln. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, strictement croissante.
Elle est notée exp, ou $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x\,;\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0\,;\ \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\,.$$

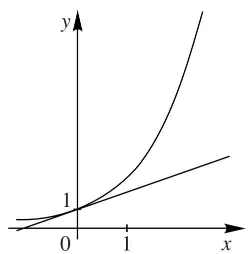


Figure 7.2

- **Propriétés algébriques**

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b \quad ; \quad \mathrm{e}^{ra} = (\mathrm{e}^a)^r \quad ; \quad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a} \quad ; \quad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}\cdot$$

- **Convexité**

La fonction $\mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, ce qui entraîne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x.$$

La dérivée en $x = 0$ étant égale à 1, on a aussi : $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

III Logarithme et exponentielle de base a

- **Logarithme de base** a

La fonction logarithme de base a ($a > 0\,;\, a \neq 1$), est la fonction définie par :

$$\forall x > 0 \qquad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}\cdot$$

Sa dérivée est : $(\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln a} \times \dfrac{1}{x}\cdot$

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction ln.
Si $a = 10$, $\log_a$ est le logarithme décimal. On le note log.

- **Exponentielle de base** a

La fonction exponentielle de base a ($a > 0$), est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \exp_a(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}.$$

Pour $a \neq 1$, c'est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$.

$$y = a^x \iff \ln y = x \ln a \iff x = \log_a(y)\,.$$

Sa dérivée est : $(a^x)' = \ln a \times a^x$.

Remarquez bien qu'ici, la variable est en exposant.

Ses propriétés algébriques sont les mêmes que celles de la fonction exp.

IV Fonctions puissances et comparaisons

- **Fonctions puissances**

La fonction $x \mapsto x^r$, pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$, est déjà connue.

On la généralise, pour $x > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, en posant :

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Les propriétés connues pour les exposants rationnels sont prolongées ; en particulier $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Remarquez bien qu'ici l'exposant est constant.

Pour $a < 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est strictement décroissante de $+\infty$ à 0.
Pour $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est strictement croissante de 0 à $+\infty$. Dans ce cas, on peut prolonger la fonction par continuité en 0. La fonction prolongée est dérivable en 0, si $a > 1$.

- **Comparaison des fonctions logarithmes et puissances**

Pour $b > 0$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} x^b \ln x = 0\,.$$

- **Comparaison des fonctions puissances et exponentielles**

Pour $a > 1$ et b quelconque, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty\,.$$

- **Comparaison des fonctions logarithmes et exponentielles**

Pour $a > 1$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{a^x} = 0\,.$$

Application

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation **(E)** :

$$2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0.$$

Solution

L'équation **(E)** est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. En regroupant les termes du type 2^a et les termes du type 3^b, on on obtient :

$$\textbf{(E)} \iff 2^{2x}(2^{-1} + 2) = 3^x(3^2 - 1) \iff \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{16}{5}\cdot$$

L'équation **(E)** a donc une seule solution dans $\mathbb{R}$: $x = \dfrac{\ln 16 - \ln 5}{\ln 4 - \ln 3} \approx 4{,}04.$

Application

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation **(I)** :

$$e^{2x} - e^{x+2} - e^{2-x} + 1 < 0.$$

Solution

L'inéquation **(I)** est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. En posant $X = e^x$, elle s'écrit :

$$X^2 - e^2 X - e^2 \frac{1}{X} + 1 < 0.$$

Comme $X > 0$, elle est équivalente à :

$$X^3 - e^2 X^2 + X - e^2 < 0 \quad \text{soit :} \quad (X - e^2)(X^2 + 1) < 0.$$

Comme on a toujours $X^2 + 1 > 0$, l'inéquation **(I)** est équivalente à :

$$e^x < e^2 \iff x < 2.$$

Application

Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

Solution

Posons $f(x)=\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

La fonction f est définie, et strictement positive, pour $x>1$. On peut donc considérer :

$$\ln f(x)=x\ln x\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right).$$

Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}=\frac{\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\ln x}=1+\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}=0$, on en déduit :

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x\ln x}\quad\text{puis}\quad\ln f(x)\underset{+\infty}{\sim}1.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln f(x)=1$ et, par conséquent, grâce à la continuité de la fonction exponentielle : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathrm{e}$.

Application

En introduisant la fonction f_n définie par $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{-kx}$,

trouvez la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^k}$.

Solution

L'expression $\sum_{k=0}^{n} e^{-kx}$ est une somme de $n+1$ termes d'une suite géométrique de raison e^{-x}. En supposant $x \neq 0$, on a donc :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} = \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}.$$

En dérivant, par rapport à x, le premier membre, on obtient :

$$f_n'(x) = -\sum_{k=1}^{n} k e^{-kx} \quad \text{ce qui montre que} \quad u_n = -f_n'(1).$$

En dérivant, par rapport à x, le second membre de l'égalité, on obtient :

$$f_n'(x) = \frac{(n+1)\, e^{-(n+1)\,x}(1 - e^{-x}) - (1 - e^{-(n+1)\,x})\, e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-(n+1)e^{-(n+1)}(1 - e^{-1}) + (1 - e^{-(n+1)})\, e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2}.$$

En utilisant le théorème sur la croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2} = \frac{e}{(e-1)^2} \approx 0{,}92\,.$$

FICHE 8 Fonctions circulaires et réciproques

I Fonctions circulaires

- **Fonctions sinus et cosinus**

Elles sont définies dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$. Elles sont 2π-périodiques.
La fonction sin est impaire ; la fonction cos est paire.
Dérivées : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\sin x)' = \cos x \quad ; \quad (\cos x)' = -\sin x$.

- **Fonctions tangente et cotangente**

Elle sont définies par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (quand les dénominateurs ne sont pas nuls).
Elles sont impaires et π-périodiques.
Dérivées : $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad ; \quad (\cot x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

II Fonctions circulaires réciproques

- **Fonction arc sinus**

C'est la réciproque de la restriction à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de la fonction sinus.

La fonction arcsin est impaire.

Dérivée : $\forall x \in]-1,1[\qquad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

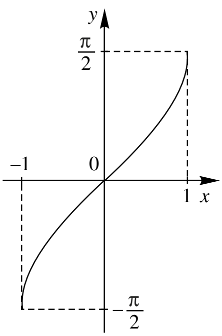


Figure 8.1

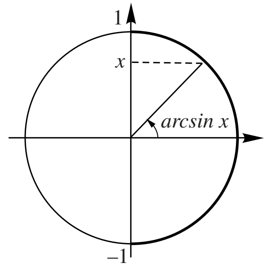


Figure 8.2

- **Fonction arc cosinus**

C'est la réciproque de la restriction à $[0,\pi]$ de la fonction cosinus.

Dérivée : $\forall x \in]-1,1[\qquad (\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

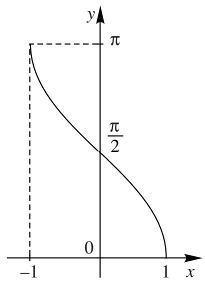


Figure 8.3

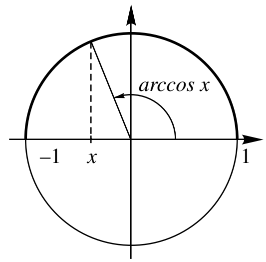


Figure 8.4

- **Fonction arc tangente**

C'est la réciproque de la restriction à $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction tangente.

La fonction arctan est impaire.

Dérivée : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

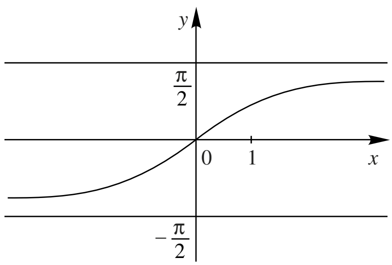


Figure 8.5

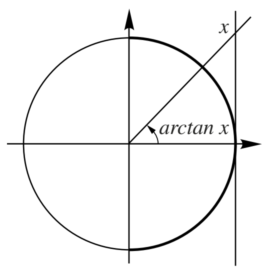


Figure 8.6

- **Propriétés**

$\forall x \in [-1,1] \qquad \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

$f(x) = \arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$; $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$.

$\forall x \in [-1,1] \qquad \arccos x + \arccos(-x) = \pi$.

Application

Déterminez les valeurs exactes des éventuelles racines de l'équation :

$$\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}\cdot$$

Solution

Étudions d'abord l'existence des racines de l'équation. Pour ceci, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \arctan 2x + \arctan x.$$

Elle est continue, strictement croissante de $-\pi$ à π lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Toute équation du type $f(x) = c$ avec $c \in]-\pi, \pi[$ admet donc une solution unique, ce qui est le cas pour $c = \frac{\pi}{4}\cdot$

Comme $f(0) = 0$, on sait aussi que la racine est positive d'après le sens de variation de f.

Si x est la solution cherchée, on a $\tan\left[f(x)\right] = \tan\frac{\pi}{4} = 1$. Or :

$$\tan\left[f(x)\right] = \frac{2x + x}{1 - 2x^2} = \frac{3x}{1 - 2x^2}\cdot$$

x est donc solution de l'équation $2x^2 + 3x - 1 = 0$.
Cette équation a deux racines :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \approx 0{,}28 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \approx -1{,}78.$$

Comme x_2 ne convient pas, la racine est donc x_1.

Application

Déterminez les valeurs exactes des éventuelles racines des équations :

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin x \qquad \textbf{(1)}.$$

$$\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{4} = \arccos x \qquad \textbf{(2)}.$$

$$\arccos\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{4} = \arcsin x \qquad \textbf{(3)}.$$

Solution

• La fonction arcsin, de $[-1,1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, est continue et strictement croissante.

Comme $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\approx 1{,}32\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, l'équation **(1)** admet une solution, et une seule.

Comme $\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{4}\approx 2{,}55\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, l'équation **(3)** n'a pas de solution.

La fonction arccos, de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$, est continue et strictement croissante.

Comme $\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{4}\approx 2{,}55\in[0,\pi]$, l'équation **(2)** admet une solution, et une seule.

• L'équation **(1)** implique :

$$\sin\left[\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\right]=\sin(\arcsin x)=x.$$

On développe le premier membre, en sachant que :

$$\sin(\arccos\theta)=\sqrt{\sin^2(\arccos\theta)}=\sqrt{1-\cos^2(\arccos\theta)}=\sqrt{1-\theta^2},$$

et on obtient ainsi :

$$x=\frac{4}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\times\frac{5}{13}=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{63}{65}.$$

• L'équation **(2)** implique :

$$\cos\left[\arccos\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{4}\right]=\cos(\arccos x)=x.$$

On développe le premier membre, ce qui donne :

$$x=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{12}-\sqrt{\frac{8}{9}\times\frac{15}{16}}=\frac{1-2\sqrt{30}}{12}.$$

Maple trouve une solution dans les trois cas, alors que l'équation **(3)** n'a pas de solution !

FICHE 9

Fonctions hyperboliques et réciproques

I Fonctions hyperboliques

- **Définitions**

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \; ; \; \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; ; \; \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \cdot$$

ch est paire ; sh et th sont impaires.

- **Propriétés algébriques**

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad ; \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad ; \quad 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \cdot$$

- **Dérivées**

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \; ; \; (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \; ; \; (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x .$$

- **Graphes**

Le graphe de ch est situé au-dessus de celui de sh.
Le graphe de th est situé entre les deux asymptotes $y = -1$ et $y = 1$:

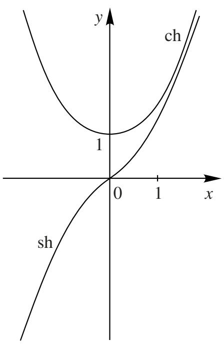


Figure 9.1

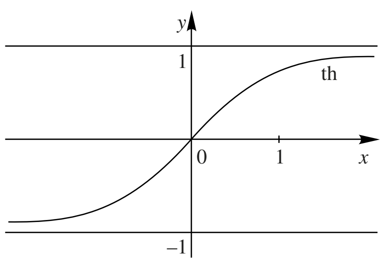


Figure 9.2

II Fonctions hyperboliques réciproques

- **Fonction argument sinus hyperbolique**

C'est la fonction réciproque de la fonction sh. La fonction argsh est impaire.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

- **Fonction argument cosinus hyperbolique**

C'est la fonction réciproque de la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction ch.

$$\forall x \in]1,+\infty[\qquad (\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

- **Argument tangente hyperbolique**

C'est la fonction réciproque de la fonction th. La fonction argth est impaire.

$$\forall x \in]-1,1[\qquad (\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

- **Expressions logarithmiques**

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

$$\forall x \in [1,+\infty[\qquad \operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Application

Soit $\theta \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$; montrez que :

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(k\theta) = \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{n\theta}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Solution

$$S = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{k\theta} + e^{-k\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n} e^{k\theta} + \sum_{k=0}^{n} e^{-k\theta}\right].$$

On a la somme de deux progressions géométriques de raisons e^{θ} et $e^{-\theta}$ différentes de 1 car $\theta \neq 0$.
D'où :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left[\frac{1 - e^{(n+1)\theta}}{1 - e^{\theta}} + \frac{1 - e^{-(n+1)\theta}}{1 - e^{-\theta}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{-(n+1)\frac{\theta}{2}} - e^{(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{-\frac{\theta}{2}} - e^{\frac{\theta}{2}}} + \frac{e^{-(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{-\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{(n+1)\frac{\theta}{2}} - e^{-(n+1)\frac{\theta}{2}}}{e^{\frac{\theta}{2}} - e^{-\frac{\theta}{2}}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{n\frac{\theta}{2}} \times \frac{\operatorname{sh}\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)} + e^{-n\frac{\theta}{2}} \times \frac{\operatorname{sh}\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{\operatorname{sh}\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \frac{e^{n\frac{\theta}{2}} + e^{-n\frac{\theta}{2}}}{2} = \frac{\operatorname{sh}\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \operatorname{ch}\left(n\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Application

Simplifiez l'écriture des expressions :

$$f(x) = \operatorname{argch}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}x}{2}}\ ;\ g(x) = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})\ ;\ h(x) = \operatorname{argth}\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Solution

• On a $\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch}x}{2}} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{2}} = \operatorname{ch}\dfrac{x}{2}$ car $\operatorname{ch} u > 0$ pour tout u.

En revenant à la définition, vous pouvez vérifier que : $1 + \operatorname{ch}(2a) = 2\operatorname{ch}^2(a)$.

Donc $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

• Posons $t = \operatorname{argsh} x$, d'où $x = \operatorname{sh} t$. On a alors :

$$2x\sqrt{1+x^2} = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \operatorname{sh} 2t.$$

En revenant à la définition, vous pouvez vérifier que : $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$.

D'où : $g(x) = 2t = 2 \operatorname{argsh} x$.

• $h(x)$ existe si, et seulement si : $-1 < \dfrac{x^2-1}{x^2+1} < 1$.

En multipliant par $x^2+1 > 0$, ces inégalités sont équivalentes à :

$$-x^2-1 < x^2-1 \quad \text{et} \quad x^2-1 < x^2+1,$$

c'est-à-dire à $x \neq 0$.

En utilisant l'écriture logarithmique de argth, on a :

$$h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}{1-\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2) = \ln|x|.$$

FICHE 10

Suites numériques

I Généralités

Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

- **Suite bornée**

Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel A tel que, pour tout n, $u_n \leqslant A$. On dit que A est un majorant de la suite.
Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel B tel que, pour tout n, $B \leqslant u_n$. On dit que B est un minorant de la suite.
Une suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire s'il existe M tel que $|u_n| \leqslant M$ pour tout n.

- **Suite convergente**

La suite (u_n) est convergente vers $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon .$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.
Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.

La suppression d'un nombre *fini* de termes ne modifie pas la nature de la suite, ni sa limite éventuelle.

Toute suite convergente est bornée. Une suite non bornée ne peut donc pas être convergente.

- **Limites infinies**

On dit que la suite (u_n) diverge
vers $+\infty$ si : $\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \geqslant A$
vers $-\infty$ si : $\forall A > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leqslant -A$.

- **Limites connues**

Pour $k > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k^n}{n!} = 0 \; ; \; \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{k^n} = 0 \; ; \; \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0 .$$

II Opérations sur les suites

- **Opérations algébriques**

  Si (u_n) et (v_n) convergent vers l et et l', alors les suites $(u_n + v_n)$, $(\lambda\, u_n)$ et $(u_n\, v_n)$ convergent respectivement vers $l + l'$, $l\, l$ et $l\, l'$.

  Si $l' \neq 0$, et si $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

  Si (u_n) tend vers 0 et si (v_n) est bornée, alors la suite $(u_n\, v_n)$ tend vers 0.

- **Relation d'ordre**

  Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes telles que l'on ait $u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant n_0$, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Attention, pas de théorème analogue pour les inégalités strictes.

- **Théorème d'encadrement**

  Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$ et si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l, alors la suite (x_n) est convergente vers l.

III Suites monotones

- **Définitions**

  La suite (u_n) est croissante si $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout n ;
  décroissante si $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n ;
  stationnaire si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

- **Convergence**

  Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.
  Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.
  Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$.

- **Suites adjacentes**

  Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

  $$(u_n) \text{ est croissante ; } (v_n) \text{ est décroissante ; } \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0\,.$$

  Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Si (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors elles convergent vers l_1 et l_2. Il reste à montrer que $l_1 = l_2$ pour qu'elles soient adjacentes.

IV Suites extraites

- **Définition et propriétés**

  – La suite (v_n) est dite extraite de la suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.
  On dit aussi que (v_n) est une sous-suite de (u_n).
  – Si (u_n) converge vers l, toute sous-suite converge aussi vers l.

> Si une suite extraite de (u_n) diverge, ou si deux suites extraites ont des limites différentes, alors (u_n) diverge.
>
> Si des suites extraites de (u_n) convergent toutes vers la même limite l, on peut conclure que (u_n) converge vers l si tout u_n est un terme d'une des suites extraites étudiées.
> Par exemple, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers l, alors (u_n) converge vers l.

- **Théorème de Bolzano-Weierstrass**

  De toute suite de réels bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

V Suites de Cauchy

- **Définition**

  Une suite (u_n) est de Cauchy si, pour tout ε positif, il existe un entier naturel n_0 pour lequel, quels que soient les entiers p et q supérieurs ou égaux à n_0, on ait $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

> Attention, p et q ne sont pas liés.

- **Propriété**

  Une suite de réels, ou de complexes, converge si, et seulement si, elle est de Cauchy.

Application

Étudiez la convergence, et la limite éventuelle, de la suite définie par :
$u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ où a et b sont des réels donnés strictement positifs.

Solution

Supposons $a \geqslant b$. Dans la somme $a^n + b^n$, nous allons mettre a^n en facteur, qui est le terme dominant si $a > b$.

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\ln(a^n + b^n) = \frac{1}{n}\ln\left[a^n\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)\right] = \ln a + \frac{1}{n}\ln\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$$

Comme $a \geqslant b$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right] = 0$. On en déduit :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln a$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Application

Soit (u_n) une suite de réels qui converge vers l. Pour $n \geqslant 1$, on pose :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

Montrez que (v_n) est convergente, et converge vers l.

Solution

Comme (u_n) converge vers l, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour $n \geqslant n_0$, on peut écrire $v_n - l$ sous la forme :

$$v_n - l = \frac{(u_1 - l) + \cdots + (u_{n_0} - l) + \cdots + (u_n - l)}{n}.$$

D'où $$|v_n - l| \leqslant \frac{|u_1 - l| + \cdots + |u_{n_0} - l|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - l| + \cdots + |u_n - l|}{n}$$
$$\leqslant \frac{A}{n} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

où $A = |u_1 - l| + \cdots + |u_{n_0} - l|$.

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{A}{n} = 0$, il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$, on ait $\frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.
En définitive, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe n_1 tel que, pour $n \geqslant n_1$, on ait $|v_n - l| < \varepsilon$.
La suite (v_n) est donc convergente vers l.

Application

Soit (u_n) une suite de réels telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) soient convergentes. Démontrez que la suite (u_n) est convergente.

Solution

Notons l_1, l_2 et l_3 les limites respectives des suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}).
Nous savons que, si une suite (v_n) est convergente vers v, alors toute suite extraite de cette suite converge et admet v comme limite.
La suite (u_{6n}) est extraite à la fois des suites (u_{2n}) et (u_{3n}). Elle est donc convergente vers l_1 et vers l_3. D'après l'unicité de la limite d'une suite convergente, on a donc $l_1 = l_3$.
La suite (u_{6n+3}) est extraite à la fois des suites (u_{2n+1}) et (u_{3n}). Elle est donc convergente vers l_2 et vers l_3. D'après l'unicité de la limite d'une suite convergente, on a donc $l_2 = l_3$.
On a donc $l_1 = l_2$, c'est-à-dire que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite.
Comme tout réel u_n est une valeur de l'une de ces deux suites, la suite (u_n) est convergente.

Application

Soit u_0 et v_0 deux nombres réels tels que $0 < u_0 < v_0$.
On définit les suites (u_n) et (v_n) par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad ; \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Démontrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Solution

Tout d'abord, il est facile de montrer, par récurrence, que les nombres u_n et v_n sont positifs. On peut donc écrire :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geqslant 0$$

ce qui montre que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n.
Pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geqslant 0\,.$$

La suite (u_n) est donc croissante.
Pour tout entier n, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0\,.$$

La suite (v_n) est donc décroissante.
De ce qui précède, il résulte que :

– la suite (u_n), croissante et majorée par v_0, converge vers l_1 ;
– la suite (v_n), décroissante et minorée par u_0, converge vers l_2.

La suite $\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)$ converge donc vers $\dfrac{l_1 + l_2}{2}$ alors que la suite (v_{n+1})converge vers l_2. Par conséquent $l_2 = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$ soit $l_1 = l_2$, ce qui assure que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

FICHE 11

Suites particulières

I Suites arithmétiques et géométriques

- **Suites arithmétiques**

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Terme général : $u_n = u_0 + nr$.

Somme des n premiers termes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n\,\frac{u_0 + u_{n-1}}{2} = nu_0 + r\,\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Suites géométriques**

Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = q\,u_n.$$

Terme général : $u_n = u_0\,q^n$.

Somme des n premiers termes : $$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \begin{cases} = u_0\,\dfrac{1-q^n}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ = n\,u_0 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

II Suites récurrentes

- **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2**

– Une telle suite est déterminée par une relation du type :

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \ \text{ et } \ c \neq 0$$

et la connaissance des deux premiers termes u_0 et u_1.
L'ensemble des suites réelles qui vérifient la relation (1) est un espace vectoriel de dimension 2.
On en cherche une base par la résolution de l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (E).$$

– Cas a, b, c complexes
Si $\Delta \neq 0$, (E) a deux racines distinctes r_1 et r_2. Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = K_1\, r_1^n + K_2\, r_2^n$$

où K_1 et K_2 sont des constantes que l'on exprime ensuite en fonction de u_0 et u_1.

Si $\Delta = 0$, (E) a une racine double $r_0 = -\dfrac{b}{2a}\cdot$ Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = (K_1 + K_2 n) r_0^n.$$

– Cas a, b, c réels
Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, la forme des solutions n'est pas modifiée.
Si $\Delta < 0$, (E) a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ que l'on écrit sous forme trigonométrique $r_1 = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r_2 = \rho\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
Toute suite vérifiant (1) est alors du type :

$$u_n = \rho^n (K_1 \cos n\theta + K_2 \sin n\theta).$$

- **Suites récurrentes** $u_{n+1} = f(u_n)$

– Pour étudier une telle suite, on détermine d'abord un intervalle I contenant toutes les valeurs de la suite.

– Limite éventuelle
Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l) = l$.

– Cas f croissante
Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone.
La comparaison de u_0 et de u_1 permet de savoir si elle est croissante ou décroissante.

– Cas f décroissante
Si f est décroissante sur I, alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire.

Cherchez à étudier si elles sont adjacentes ou non.

Application

Soit (u_n) la suite de réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{et} \quad u_0 = u_1 = 1.$$

Calculez u_n, puis $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Solution

Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, à coefficients constants.
L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ a deux racines réelles distinctes

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Toute suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$$

est donc de la forme $u_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n$.
Les conditions initiales permettent de calculer K_1 et K_2 :

$$\begin{cases} u_0 = 1 = K_1 + K_2 \\ u_1 = 1 = K_1 r_1 + K_2 r_2 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 = \dfrac{1 - r_1}{r_2 - r_1} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \\[2ex] K_2 = \dfrac{r_2 - 1}{r_2 - r_1} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

La suite (u_n) est donc définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Comme $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \approx |-0{,}6| < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0$.

Comme $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6 > 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = +\infty$.

On obtient donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Application

Déterminez la suite (u_n) de réels définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \qquad \mathbf{(1)}$$

et les conditions initiales : $u_0 = 1$ et $u_1 = 0{,}5$.

Solution

Il s'agit d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire du second ordre. L'équation caractéristique :

$$r^2 + r + 1 = 0$$

a pour solutions :

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \quad ; \qquad r_2 = \overline{r_1}.$$

Toute suite vérifiant la condition **(1)** est donc du type :

$$u_n = K_1 \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + K_2 \sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right),$$

K_1 et K_2 étant des constantes à déterminer par les conditions initiales. Ici :
$u_0 = 1 = K_1$

$$u_1 = 0{,}5 = K_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + K_2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}K_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}K_2$$

d'où : $K_1 = 1$ et $K_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot$ On obtient donc la suite solution :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right).$$

Application

Étudiez la convergence de la suite définie par $u_0 = 0{,}5$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n^2 + 0{,}1875.$$

Solution

Il s'agit d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f(x) = x^2 + 0{,}1875.$$

Comme tous les u_n sont positifs, il suffit d'étudier les variations de f sur $[0,+\infty[$.
Dans ce cas, on a $f'(x) = 2x \geqslant 0$, d'où f croissante sur $[0,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$0{,}1875$ ↗	$+\infty$

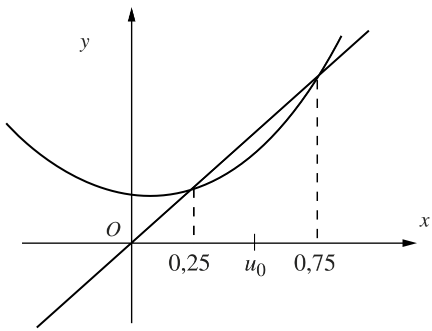


Figure 11.1

La fonction f étant croissante, la suite (u_n) est monotone.
On a $u_1 = 0{,}4375$ soit $u_1 < u_0$. La suite (u_n) est donc décroissante.
Comme (u_n) est minorée, par exemple par $0{,}1875$, (u_n) est convergente.
Soit l sa limite. La fonction f étant continue, l vérifie l'équation :

$$l = f(l) \iff l^2 - l + 0{,}1875 = 0 \iff l = 0{,}25 \text{ ou } l = 0{,}75.$$

La suite (u_n) est décroissante à partir de $u_0 = 0{,}5$. Il est donc impossible que la limite soit $0{,}75$.
Donc $l = 0{,}25$.

Application

Étudiez la convergence de la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$$

Solution

• Il s'agit d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

À partir de $u_0 = 0$, on vérifie aisément par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Il suffit donc d'étudier les variations de f sur $[0,1]$.

On a toujours $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} < 0$. La fonction f est donc décroissante sur $[0,1]$.

Dans ce cas, on considère les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui sont monotones et de sens contraire car f décroissante entraîne $f \circ f$ croissante.

• On a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 0{,}5$. La suite (u_{2n}) est donc croissante et (u_{2n+1}) décroissante.
(u_{2n}) étant majorée par 1 converge vers l_1.
(u_{2n+1}) étant minorée par 0 converge vers l_2.

• Comme $u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n})$ et $f \circ f$ continue, l_1 vérifie :

$$l_1 = (f \circ f)(l_1) = \frac{1+l_1}{2+l_1} \iff l_1^2 + l_1 - 1 = 0$$

$$\iff l_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62 \quad \text{ou} \quad l_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62.$$

Comme on a $l_1 \geqslant 0$, on en déduit que $l_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

• Pour la suite (u_{2n+1}) on passe aussi d'un terme au suivant en appliquant $f \circ f$. La limite l_2 vérifie aussi $l_2 = (f \circ f)(l_2)$ avec $l_2 \geqslant 0$, ce qui donne $l_2 = l_1$.

• Les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) étant convergentes avec la même limite, la suite (u_n) est convergente et a pour limite :

$$l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

FICHE 12

Intégrales définies

I Intégrale d'une fonction en escalier

- **Subdivision**

On appelle subdivision σ de $[a,b]$, la donnée d'un nombre fini de points $x_0,\ldots,x_n$ tels que $x_0 = a$, $x_n = b$, et $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a,b]$.
Le pas d'une subdivision $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est le nombre :

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)\,.$$

- **Fonction en escalier**

Une fonction f, définie sur $[a,b]$, est une fonction en escalier sur $[a,b]$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que f soit constante, et égale à l_i, sur chaque intervalle ouvert $]x_i,x_{i+1}[$.

- **Intégrale d'une fonction en escalier**

On appelle intégrale de la fonction en escalier f, le nombre :

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} l_i(x_{i+1} - x_i) \quad \text{noté aussi} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Remarquez que le nombre $I(f)$ est en fait une somme d'aires de rectangles et qu'il ne dépend pas de la valeur de f aux points x_i de la subdivision.

II Intégrale d'une fonction continue par morceaux

- **Fonction continue par morceaux**

Une fonction f, définie sur $[a,b]$, est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ telle que :
– f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i,x_{i+1}[$;
– f admet en tout point de la subdivision une limite à gauche et une limite à droite finies.

- **Approximation par une fonction en escalier**

  Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$.
  Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe φ et ψ, fonctions en escalier sur $[a,b]$, telles que :
  $$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \psi - \varphi \leqslant \varepsilon .$$

- **Intégrale d'une fonction continue par morceaux**

  Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Il existe un réel unique I tel que, pour toutes fonctions en escalier φ et ψ vérifiant $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, on ait :
  $$I(\varphi) \leqslant I \leqslant I(\psi) .$$
  Ce nombre I s'appelle l'intégrale de f sur $[a,b]$, et se note $I(f)$, ou $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

  Ce nombre dépend de f, de a, de b, mais pas de la variable d'intégration, notée ici x, qui est une variable muette, ce qui signifie qu'on peut la noter par toute lettre non retenue pour un autre usage.

  Pour $a < b$, on pose $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$

- **Interprétation géométrique**

  $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire du domaine du plan situé entre le graphe de f et l'axe des abscisses, comptée
  – positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des abscisses,
  – négativement pour la partie située en dessous.

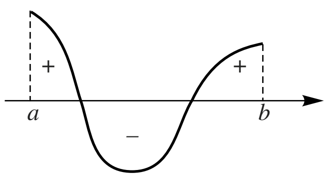


Figure 12.1

III Propriétés d'une intégrale

f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux sur les intervalles considérés. Les nombres λ, μ, a, b et c sont réels.

- **Linéarité**
  $$\int_a^b \big[\lambda f(x) + \mu g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

- **Relation de Chasles**
  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

- **Relation d'ordre**

 – Si $a < b$, et si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

 – Si f est continue et positive sur $[a,b]$, on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) = 0\,.$$

- **Majoration de l'intégrale**

 – Valeur absolue :

$$\text{Si } a < b \qquad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

 – Si, pour tout $x \in [a,b]$ (avec $a < b$), on a $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\,.$$

 Le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

 – Inégalité de la moyenne :

$$\text{Si } a < b \qquad \left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \times \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

 En particulier :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

- **Sommes de Riemann**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Plus généralement, si $(x_0,\ldots,x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$ dont le pas tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et c_i un point quelconque de $[x_i,x_{i+1}]$ (le plus souvent x_i ou x_{i+1}), on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\,f(c_i) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Application

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et on considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k$.

1. Déterminez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\, \mathrm{d}x$.

2. Déduisez-en $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. Sur $[0,1]$, on a $0 \leqslant \dfrac{x^{2n}}{1+x} \leqslant x^{2n}$. On en déduit :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{2n}\, \mathrm{d}x .$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^{2n}\, \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\, \mathrm{d}x = 0$.

2. Comme $\displaystyle\int_0^x f_n(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \int_0^x t^k\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ on observe que $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, \mathrm{d}t$.

D'autre part, $f_n(x)$ est la somme des $2n$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-x$. Si $x \neq -1$, on a donc :

$$f_n(x) = \frac{1-(-x)^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{x^{2n}}{1+x}.$$

Par conséquent :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t}\, \mathrm{d}t .$$

Vous savez déjà que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, \mathrm{d}t = \big[\ln(1+t)\big]_0^1 = \ln 2$, et nous venons de voir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t}\, \mathrm{d}t = 0$. La suite (u_n) est donc convergente, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Application

1. Montrez que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ est croissante sur $[\,\mathrm{e},+\infty[$.

2. Déterminez un équivalent, quand n tend vers l'infini, de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\ln k}$.

Solution

1. La fonction f est définie et dérivable sur $]\,0,1\,[\,\cup\,]\,1,+\infty[$, et $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.

Sur $]\mathrm{e},+\infty[$, on a $f'(x) > 0$, et f est donc croissante.

2. Pour $k \geqslant 3$, la monotonie de f entraîne :

$$\forall x \in [k,k+1] \qquad f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k+1)\,,$$

d'où en intégrant : $f(k) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k+1)\,,$

ou encore, pour $k \geqslant 4$: $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Par addition, on en déduit pour $n \geqslant 3$:

$$\int_n^{2n} \frac{x}{\ln x}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int_{n+1}^{2n+1} \frac{x}{\ln x}\,\mathrm{d}x\,.$$

> Ne sachant pas calculer les deux intégrales, soyons optimiste en espérant conclure à partir d'un encadrement élargi.

Les inégalités précédentes entraînent :

$$\frac{1}{\ln(2n)} \int_n^{2n} x\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)} \int_{n+1}^{2n+1} x\,\mathrm{d}x$$

soit

$$\frac{3n^2}{2\ln(2n)} \leqslant u_n \leqslant \frac{3n^2+2n}{2\ln(n+1)}\,.$$

Lorsque n tend vers l'infini, on a : $\dfrac{3n^2}{2\ln(2n)} = \dfrac{3n^2}{2(\ln 2 + \ln n)} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{3n^2}{2\ln n}$

et $\dfrac{3n^2+2n}{2\ln(n+1)} = \dfrac{3n^2+2n}{2(\ln n + \ln(1+\frac{1}{n}))} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{3n^2}{2\ln n}\,.$

Comme u_n est encadré par deux expressions qui ont le même équivalent, on conclut :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3n^2}{2\ln n}.$$

Application

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n}} \right)^{\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)}$$

Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

Comme $u_n > 0$, on peut considérer :

$$v_n = \ln u_n = \frac{1}{2}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Quand n tend vers $+\infty$, on a :

$$\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = n\left[1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = n+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit :

$$\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{\pi}{n}.$$

On a donc $$\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

La suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$ est une somme de Riemann de la fonction continue de $[\,0,1\,]$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto \ln(1+x)$. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \left[(1+x)\ln(1+x)-x\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1\,.$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln u_n = \frac{\pi}{2}(2\ln 2-1) = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right) \quad \text{puis} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{\pi}{2}}.$$

FICHE 13

Calcul des primitives

I Primitives d'une fonction continue

- **Définition**

f étant définie sur un intervalle I, une fonction F, définie sur I, est une primitive de f, si elle est dérivable sur I et si
$$\forall x \in I \qquad F'(x) = f(x)\,.$$

- **Théorèmes**

– Deux primitives de f diffèrent d'une constante. Autrement dit, si F est une primitive de f sur un intervalle I, toutes les primitives de f sur I sont de la forme : $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante quelconque.

– Si f est continue sur un intervalle I contenant a, la fonction F, définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, est une primitive de f. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

On note $\displaystyle\int f(t)\,\mathrm{d}t$ l'une quelconque des primitives de f.

– Pour toute primitive h de f sur I, on a :
$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \big[h(t)\big]_a^x = h(x) - h(a)\,.$$

Le calcul d'intégrales de fonctions continues se ramène donc à la recherche de primitives.

– Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a :
$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

II Méthodes de calcul

- **Linéarité**

Si F et G sont des primitives respectives de f et de g sur I et k un réel, alors, sur I, $F + G$ est une primitive de $f + g$ et kF une primitive de kf.

- **Intégration par parties**

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et a et b des réels de I. On a :

$$\int_a^b u'(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t = \big[u(t)\, v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

ce qui s'écrit aussi, en terme de primitives :

$$\int u'(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t = u(t)\, v(t) - \int u(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

- **Cas classiques d'utilisation**

P étant un polynôme et $\alpha \neq 0$,

– pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\sin\,(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \sin\,(\alpha t+\beta)$;

– pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\cos\,(\alpha t+\beta)\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \cos\,(\alpha t+\beta)$;

– pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\mathrm{e}^{\alpha t+\beta}\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \mathrm{e}^{\alpha t+\beta}$;

– pour $\displaystyle\int_a^b P(t)\ln t\,\mathrm{d}t$, on pose $v(t) = \ln t$ et $u'(t) = P(t)$.

– Pour calculer $\displaystyle I = \int_a^b \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle J = \int_a^b \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,\mathrm{d}t$, on peut faire deux intégrations par parties « sans changer d'avis », c'est-à-dire en posant les deux fois $v(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$, ou les deux fois $v(t) = \cos\beta t$ ou $\sin\beta t$.

Mais il est plus rapide d'utiliser l'exponentielle complexe :

$$I = \mathrm{Re}\left(\int_a^b \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}}{\alpha+\mathrm{i}\beta}\right]_a^b\right) = \cdots$$

- **Intégration par changement de variable**

Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$, et f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f\big(u(t)\big)\, u'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Si, de plus, u est bijective, on a :

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f\big(u(t)\big)\, u'(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

III Primitives et fonctions rationnelles

- **Primitives d'une fonction rationnelle**

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples, c'est-à-dire comme somme de sa partie entière (polynôme dont on connaît les primitives) et des parties polaires.

– Pour un pôle réel α, on a des fractions de la forme $\dfrac{a}{(x-\alpha)^n} = a(x-\alpha)^{-n}$ dont on connaît des primitives.

– Si α est un pôle non réel, alors $\overline{\alpha}$ est aussi un pôle (puisque la fraction est réelle). En regroupant les complexes conjugués, on aboutit à des fractions de la forme $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ avec $p^2-4q<0$.

On peut en calculer des primitives comme suit (cas $n=1$) :

$$\int_a^x \frac{at+b}{t^2+pt+q}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\int_a^x \frac{2t+p}{t^2+pt+q}\,\mathrm{d}t + \left(b-\frac{ap}{2}\right)\int_a^x \frac{1}{t^2+pt+q}\,\mathrm{d}t\,.$$

La première primitive se calcule en utilisant le changement de variable $u=t^2+pt+q$.

En écrivant sous forme canonique le trinôme t^2+pt+q, le calcul de la deuxième primitive se ramène, après changement de variable, à :

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \big[\arctan u\big]_\alpha^\beta\,.$$

- **Primitives de fractions rationnelles en sinus et cosinus**

On veut déterminer $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$, où f est une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.

Dans le cas où $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant

– lors du changement de x en $-x$, on peut poser $u=\cos x$;

– lors du changement de x en $\pi-x$, on peut poser $u=\sin x$;

– lors du changement de x en $\pi+x$, on peut poser $u=\tan x$.

Sinon, on peut toujours poser $u=\tan\dfrac{x}{2}\cdot$

Dans tous les cas, on est conduit à un calcul du type $\displaystyle\int g(u)\,\mathrm{d}u$ où g est une fonction rationnelle en u.

Application

Déterminez les primitives $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Solution

Connaissant une primitive de $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, on pense à l'intégration par parties :

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad v(x) = \tan x$$

ce qui donne (sur un intervalle où $\cos x$ ne s'annule pas) :

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = x\tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}x = x\tan x + \ln|\cos x| + \text{cte}\,.$$

Application

Calculez $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction à intégrer est une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$.
L'expression $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariante quand on remplace x par $\pi - x$. Dans ce cas, le changement de variable $u = \sin x$ conduit à intégrer une fraction rationnelle. De cette manière, on obtient :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{6 - 5\sin x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{u^2 - 5u + 6}\,\mathrm{d}u\,.$$

Il reste à décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{u^2 - 5u + 6} = \frac{1}{(u-2)(u-3)} = \frac{-1}{u-2} + \frac{1}{u-3}$$

pour finalement obtenir :

$$I = \left[\ln\left|\frac{u-3}{u-2}\right|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}.$$

Application

Sur un intervalle où la fonction est continue, utilisez le changement de variable $u=\sqrt[4]{1+x^3}$, pour déterminer les primitives :

$$\int \frac{\sqrt[4]{1+x^3}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Solution

Posons $u=\sqrt[4]{1+x^3}$. On a alors $u^4=1+x^3$, soit

$$x=\sqrt[3]{u^4-1}\quad ;\quad \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\,(u^4-1)^{-\frac{2}{3}}4u^3\mathrm{d}u\,.$$

Ce changement de variable donne donc :

$$I=\int \frac{\sqrt[4]{1+x^3}}{x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{u}{\sqrt[3]{u^4-1}}\,\frac{1}{3}\,(u^4-1)^{-\frac{2}{3}}4u^3\,\mathrm{d}u=\frac{4}{3}\int \frac{u^4}{u^4-1}\,\mathrm{d}u\,.$$

On a $\dfrac{u^4}{u^4-1}=1+\dfrac{1}{u^4-1}\cdot$

La fraction rationnelle $\dfrac{1}{u^4-1}$ a 4 pôles simples -1, 1, $-\mathrm{i}$, i.

En regroupant les pôles complexes conjugués, la décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\frac{1}{u^4-1}=\frac{a}{u-1}+\frac{b}{u+1}+\frac{cu+d}{u^2+1}\qquad \text{avec } a,\,b,\,c,\,d \text{ réels.}$$

La fonction à décomposer étant paire, il résulte de l'unicité de cette décomposition que $a=-b$ et $c=0$.

En multipliant les deux membres de l'égalité par $u-1$, et en remplaçant u par 1, on obtient $a=\dfrac{1}{4}\cdot$

En multipliant les deux membres de l'égalité par u^2+1, et en remplaçant u par i, on obtient $c\mathrm{i}+d=-\dfrac{1}{2}$ soit $c=0$ et $d=-\dfrac{1}{2}\cdot$

En définitive :

$$\frac{u^4}{u^4-1}=1+\frac{1}{4}\,\frac{1}{u-1}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{u+1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2+1}\cdot$$

D'où :

$$I=\frac{4}{3}u+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|-\frac{2}{3}\arctan u+\text{cte}$$

où $u=\sqrt[4]{1+x^3}$.

Application

Calculez $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Solution

L'intégrale est définie si $0 < |x| < \frac{\pi}{6}$.

De l'écriture $\dfrac{1}{\tan^2 t} = \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{1}{\sin^2 t} - 1$, on déduit :

$$\int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{3x} \frac{t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t - \int_x^{3x} t\,\mathrm{d}t\,.$$

La première intégrale du second membre se calcule par parties, avec :

$$u(t) = t \qquad u'(t) = 1$$
$$v'(t) = \frac{1}{\sin^2 t} \qquad v(t) = \frac{-1}{\tan t}$$

d'où :

$$\int_x^{3x} \frac{t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-t}{\tan t}\right]_x^{3x} + \int_x^{3x} \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-t}{\tan t} + \ln|\sin t|\right]_x^{3x}.$$

Donc :

$$\int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{-3x}{\tan 3x} + \frac{x}{\tan x} + \ln\left|\frac{\sin 3x}{\sin x}\right| - \frac{9x^2}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

Comme $\tan x \underset{0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{0}{\sim} x$, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{-3x}{\tan 3x} = -1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 3\,.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\,\mathrm{d}t = \ln 3\,.$$

FICHE 14

Formules de Taylor

I Formules de Taylor à valeur globale

- **Formule de Taylor avec reste intégral**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, x_0 et x des points de I. On a :

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

où $P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \dfrac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$
est l'approximation de Taylor à l'ordre n ;
et $R_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ est le reste intégral d'ordre n.

- **Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. On suppose de plus qu'il existe $M_{n+1} > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1}$.
On obtient alors la majoration du reste :

$$|R_n(x)| \leqslant M_{n+1} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

II Étude locale des fonctions dérivables

- **Formule de Taylor-Young**

Soit f une fonction dérivable sur I jusqu'à l'ordre n. Alors la fonction ε définie au voisinage de 0 par :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + h^n \varepsilon(h)$$

est telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Au lieu de $h^n\varepsilon(h)$, on écrit souvent $o(h^n)$.

- **Développements limités**

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe une fonction polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n, et une fonction ε, définies au voisinage de x_0 telles que :

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0\,.$$

$P_n(x)$ est la partie régulière et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ le reste.

En posant $x = x_0 + t$, on peut toujours se ramener au voisinage de $t = 0$.

- **Propriétés des développements limités**

Troncature

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et si $p \leqslant n$, alors f admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0 dont la partie régulière est $P_p(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$.

Unicité

Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, il est unique.

Parité

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, de partie régulière $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Si f est paire (resp. impaire), alors les coefficients a_k d'indice impair (resp. pair) sont nuls.

- **Développements limités de base**

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \frac{x}{1!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

avec les cas particuliers :

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\alpha = -1 \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\text{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\text{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad \text{th}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p}{2p+1} x^{2p+1} + o(x^{2p+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6) \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

- **Opérations sur les développements limités**

Considérons deux fonctions f et g admettant des développements limités de même ordre n au voisinage de 0, de parties régulières respectives A_n et B_n.

Combinaison linéaire

Si λ et μ sont des réels, alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité au voisinage de 0 dont la partie régulière est $\lambda A_n + \mu B_n$.

Produit

fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est formée des termes de degré inférieur ou égal à n du produit $A_n B_n$.

Quotient

Si $B_n(0) \neq 0$ (soit $g(0) \neq 0$), $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière est obtenue à partir de $A_n(x) \times \dfrac{1}{B_n(x)}$ en utilisant le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ au voisinage de 0.

Composition

Si $g \circ f$ est définie au voisinage de 0 et si $f(0) = 0$, alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière s'obtient en remplaçant u dans $B_n(u)$ par $A_n(x)$ et en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à n.

Primitive

Si f est continue sur un intervalle ouvert I contenant 0, une primitive F de f admet le développement limité d'ordre $n+1$, au voisinage de 0, obtenu par intégration terme à terme de $A_n(x)$, le terme constant étant $F(0)$.

Dérivée

Si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n ($n \geqslant 2$) sur un intervalle ouvert I contenant 0, la fonction f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ dont la partie régulière s'obtient en dérivant terme à terme celle du développement limité de f.

III Applications des développements limités

- **Étude locale d'une fonction**

Pour l'étude locale d'une fonction, ou pour la recherche d'une limite, on cherche un développement limité comportant au moins un terme non nul.

- **Étude des branches infinies**

Soit f définie sur un intervalle $]A,+\infty[$ ou $]-\infty,A[$. Quand x tend vers l'infini, $X = \frac{1}{x}$ tend vers 0, et, en remplaçant x par $\frac{1}{X}$, on est ramené au voisinage de 0.

Lorsque x et $f(x)$ tendent vers l'infini, on obtient une asymptote oblique (si elle existe) en effectuant le développement limité au voisinage de l'infini :

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

où $\frac{c}{x^k}$ est le premier terme non nul après $\frac{b}{x}\cdot$

Dans ce cas, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f. Et la position relative de la courbe et de l'asymptote résulte du signe de $\frac{c}{x^{k-1}}$ lorsque x tend vers l'infini.

Application

Soit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, telle que $|f''(x)| \leqslant M$ pour tout x. Montrez que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}M \geqslant 0\,.$$

Solution

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange, à l'ordre 1, entre x et $x+y$:

$$|f(x+y) - f(x) - yf'(x)| \leqslant \frac{y^2}{2}M\,.$$

On en déduit : $f(x+y) \leqslant f(x) + yf'(x) + \dfrac{y^2}{2}M$

et comme f est à valeurs positives, on obtient l'inégalité demandée.

Application

Calculez : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x}$.

Solution

On a : $$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\Big[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big]\right)$$
$$= \exp\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) = \mathrm{e}\Big[1 - \frac{x}{2} + o(x)\Big]$$

d'où : $$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}}{x} = -\frac{\mathrm{e}}{2} + o(1)$$

ce qui démontre que la limite demandée est égale à $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

Application

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{pour} \quad x \neq 0 \;\; ; \; f(0) = 2.$$

Montrez que f admet, au voisinage de 0, un développement limité d'ordre 2, et que, pourtant, $f''(0)$ n'existe pas.

Solution

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on peut écrire :

$$f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + o(x^2),$$

ce qui, par définition, montre que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.
Pour $x \neq 0$, on a :

$$f'(x) = 3 + 8x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour $x = 0$, on a :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \left[3 + 4x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 3\,.$$

Mais $f''(0)$ n'existe pas, car le quotient :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 8 + 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0, puisqu'un terme de la somme, et un seul, n'a pas de limite.

On sait que, pour qu'une fonction admette un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, il est suffisant qu'elle soit n fois dérivable en 0. Cet exercice vous montre que ce n'est pas nécessaire.

Application

Trouvez le développement limité à l'ordre $n+1$, au voisinage de 0, de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

Solution

En calculant, et en développant, $f'(x)$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{1 + x + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}} = 1 - \frac{\dfrac{x^n}{n!}}{1 + x + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}} = 1 - \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Comme $f(0) = 0$, on en déduit :

$$f(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}).$$

Application

Soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$. Déterminez $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Solution

Après factorisation du terme dominant, on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left[(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})^{\frac{1}{3}} - (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}\right] = x\left[1 + o(\frac{1}{x}) - 1 - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})\right] \\ &= x\left[-\frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x})\right] = -\frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Application

Étudiez la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$ lorsque x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.
Précisez les asymptotes éventuelles et la position de la courbe par rapport aux asymptotes.

Solution

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, alors $X = \dfrac{1}{x}$ tend vers 0.
Et rechercher l'existence d'une asymptote revient à rechercher un développement limité en X de $\dfrac{f(x)}{x}\cdot$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{x}{x+1}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+X}e^{X}\\ &= \left[1 - X + X^2 + o(X^2)\right]\left[1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right].\\ &= 1 + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\end{aligned}$$

D'où : $f(x) = x + \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
La courbe $y = f(x)$ admet donc la droite $y = x$ pour asymptote à la fois lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $f(x) - x$ est du signe de $\dfrac{1}{2x}\cdot$ La courbe est donc au-dessous de l'asymptote lorsque x tend vers $-\infty$, et au-dessus lorsque x tend vers $+\infty$.

FICHE 15

Intégrales généralisées

I Définitions et premières propriétés

- **Fonction localement intégrable**

Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est localement intégrable sur I si elle est intégrable sur tout segment inclus dans I.

- **Cas d'une fonction non bornée sur un intervalle borné**

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a,b]$ avec $a < b$. Si la limite $\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

> Si f possède une limite à droite en a, il n'y a aucun problème d'existence pour l'intégrale généralisée.

On définit de manière analogue l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction continue sur $[a,b[$.

> Étudier la nature d'une intégrale généralisée (ou impropre), c'est préciser si elle est convergente ou divergente.

- **Cas d'une fonction définie sur un intervalle non borné**

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$.

Si la limite $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

On définit de manière analogue l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une fonction continue sur $]-\infty,a]$.

- **Généralisation**

  – Si f est localement intégrable sur $]a,b[$, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } c \in]a,b[\text{ quelconque}$$

  et on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, les deux intégrales du second membre convergent.

  – Si f est localement intégrable sur $]a,+\infty[$, on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ avec } b \in]a,+\infty[\text{ quelconque}$$

  et on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, les deux intégrales du second membre convergent.

  – Si f est localement intégrable sur $]-\infty,+\infty[$, on pose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec } b \in]-\infty,+\infty[\text{ quelconque}$$

et on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, les deux intégrales du second membre convergent.

II Règles de convergence

- **Condition nécessaire de convergence sur** $[a,+\infty[$

  Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe, cette limite est nécessairement nulle.

- **Comparaison de fonctions positives**

  Soit f et g localement intégrables et telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a,+\infty[$.

  Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

  Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

- **Équivalence de fonctions positives**

  Soit f et g deux fonctions positives.

  Si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).

  Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{b} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

> Il est important que f et g soient de même signe au voisinage du problème étudié, sinon les fonctions peuvent être équivalentes et leurs intégrales de nature différente.

- **Situations de référence**

  Pour $a > 0$, on a : $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.

  Pour $a > 0$, on a : $\displaystyle\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.

  $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ (où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$) sont convergentes.

III Fonctions sommables

- **Définition**

  Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,+\infty[$. On dit que f est sommable sur cet intervalle si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

  On dit aussi que l'intégrale est absolument convergente.

- **Théorème**

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

  Si f est localement intégrable sur $]a,b]$, on a une définition et un théorème analogue.

Application

Étudiez la nature de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$

Solution

La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

– Au voisinage de 0, on a $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot$ Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ existe, il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$

– Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\left[\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-1\right] = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

ce qui entraîne $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3x^{7/6}}\cdot$

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{7/6}}$ existe, il en est de même de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

– Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

Application

Soit $a > 0$; étudiez l'existence, et déterminez éventuellement la valeur, de :

$$\lim_{a\to 0}\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)\,(a^2-x^2)}}\,.$$

Solution

• Existence

La fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{a-x}\sqrt{a+x}}$ est continue et positive sur $]-a,a[$. Elle tend vers l'infini aux bornes.

Au voisinage de a, on a $f(x) \underset{a}{\sim} K \dfrac{1}{\sqrt{a-x}}$ avec $K = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{2a}}$.

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$ existe, il en est de même pour $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Au voisinage de $-a$, la démonstration est analogue.

Finalement, pour $a > 0$, on a démontré l'existence de l'intégrale :

$$I(a) = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)\,(a^2-x^2)}}.$$

- **Calcul**

Avec $0 < b < a$, considérons l'intégrale $I(b) = \displaystyle\int_{-b}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)\,(a^2-x^2)}}$

et utilisons le changement de variable $x = at$ qui conduit à :

$$I(b) = \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1+a^2t^2}}.$$

Lorsque t varie de $-\dfrac{b}{a}$ à $\dfrac{b}{a}$ alors $\sqrt{1+a^2t^2}$ est compris entre 1 et $\sqrt{1+b^2}$.

On en déduit un encadrement de $I(b)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant I(a) \leqslant \int_{-\frac{b}{a}}^{\frac{b}{a}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

qui donne :

$$\frac{2}{\sqrt{1+b^2}} \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant I(b) \leqslant 2\arcsin\left(\frac{b}{a}\right),$$

puis en faisant tendre b vers a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\pi \leqslant I(a) \leqslant \pi\,.$$

Lorsque a tend vers 0, les deux fonctions de a qui encadrent $I(a)$ ont la même limite π. Par conséquent :

$$\lim_{a\to 0} I(a) = \pi\,.$$

Application

Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

Solution

• Pour la borne 0, il n'y a pas de problème d'existence puisque la fonction à intégrer est prolongeable par continuité.

On peut donc se ramener à l'étude de la convergence de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_1^X \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Lorsque X tend vers $+\infty$, $\dfrac{-\cos X}{X}$ tend vers 0 puisque c'est le produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ existe puisque, de $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ on tire la convergence absolue, donc la convergence, de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

• L'inégalité $|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ entraîne :

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x\,.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}$ diverge vers $+\infty$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x$ converge, ce qui se démontre comme pour l'intégrale en sinus.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ est donc divergente, ce qui prouve que l'intégrale proposée n'est pas absolument convergente.

FICHE 16

Équations différentielles du premier ordre

I Équations à variables séparables

Lorsque l'équation est de la forme :

$$f\,(x(t))\; x'(t) = g(t)\,,$$

où f et g sont des fonctions données dont on connaît des primitives F et G, on a :

$$F\,(x(t)) = G(t) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R},$$

et si F possède une fonction réciproque F^{-1}, on en tire :

$$x(t) = F^{-1}\big(G(t) + C\big)\,,$$

relation qui donne toutes les solutions de l'équation.
Cette solution générale dépend de la constante d'intégration C.

> En pratique, on peut écrire l'équation sous la forme : $f(x)\,\mathrm{d}x = g(t)\,\mathrm{d}t$,
>
> puis intégrer formellement les deux membres : $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t$,
>
> et exprimer x en fonction de t.

II Équations linéaires

- **Définition**

  Elles sont de la forme :

$$a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t) \qquad \textbf{(1)}$$

  où a, b et c sont des fonctions données, continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
  Pour la résolution, on se place sur un intervalle $J \subset I$ tel que la fonction a ne s'annule pas sur J.

- **Théorème dû à la linéarité**

Toute solution de **(1)** est de la forme $x_P + x_S$ où x_P est une solution particulière de **(1)** et x_S la solution générale de l'équation homogène associée :

$$a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

On est donc conduit à deux problèmes : rechercher la solution générale x_S de l'équation homogène, puis une solution particulière x_P de l'équation complète.

- **Résolution de l'équation homogène associée**

C'est une équation à variables séparables. Ses solutions sont du type :

$$x_S(t) = K\,\mathrm{e}^{-A(t)} \quad \text{où} \quad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,\mathrm{d}u$$

avec K constante arbitraire et t_0 élément quelconque de I. Elles comportent donc la fonction nulle et des fonctions qui ne s'annulent jamais.

- **Recherche d'une solution particulière (méthode de Lagrange)**

x_1 étant une solution non nulle de **(2)**, on introduit une fonction auxiliaire inconnue $K(t)$ telle que $x(t) = K(t)\,x_1(t)$ soit solution de **(1)**.
On calcule $x'(t)$; on reporte $x'(t)$ et $x(t)$ dans **(1)**.
On observe que $K(t)$ disparaît, ce qui fournit une auto-vérification. Il reste $K'(t)$, ce qui permet de calculer $K(t)$ puis $x(t)$.
Vous avez le choix entre deux variantes (équivalentes : ne faites pas les deux) :
– chercher tous les $K(t)$ avec une constante d'intégration (n'oubliez pas de reporter dans $x(t)$),
– chercher un $K(t)$, reporter dans $x(t)$ et additionner avec $x_S(t)$.

Cette méthode s'appelle aussi la méthode de variation de la constante. Ce mot curieux (une constante qui varie !) vient du fait qu'on remplace la constante K obtenue en résolvant l'équation homogène par une fonction $K(t)$.

Application

Résolvez l'équation différentielle :

$$(t+1)\,x'(t) + x(t) = (t+1)\ \sin t \qquad \mathbf{(1)}$$

sur des intervalles à préciser.

Solution

L'équation différentielle **(1)** est linéaire du premier ordre. On la résout sur un intervalle où le coefficient de x' n'est pas nul, soit sur $I_1 =]-\infty, -1[$ ou sur $I_2 =]-1, +\infty[$. Sur chaque intervalle I_1 ou I_2, l'équation s'écrit :

$$(t+1)\,x'(t) + x(t) = \left[(t+1)\,x(t)\right]' = (t+1)\ \sin t\,.$$

On a donc :

$$(t+1)\,x(t) = \int (t+1)\ \sin t\ \mathrm{d}t\,.$$

En intégrant par parties, on obtient (attention, la constante dépend de l'intervalle) sur chaque intervalle :

$$\int (t+1)\ \sin t\ \mathrm{d}t = -(t+1)\ \cos t + \ \sin t + K\,.$$

La solution générale de **(1)** sur I_1, ou sur I_2, est donc :

$$x(t) = -\cos t + \frac{K + \ \sin t}{t+1} \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Application

1. Résolvez l'équation différentielle :

$$x\,y'(x) - y(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} \qquad \mathbf{(1)}.$$

2. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Solution

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On cherche sa solution générale sur $I_1 =]-\infty, 0[$ ou sur $I_2 =]0, +\infty[$.

• Résolution de l'équation homogène associée

$$x\,y'(x) - y(x) = 0 \tag{2}$$

$y = 0$ est solution et on sait que les autres solutions ne s'annulent pas sur I.
On peut donc écrire :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x}$$

soit $\ln|y(x)| = \ln|x| + C$, ce qui conduit à la solution générale de **(2)** sur I :
$x \mapsto y(x) = Kx \quad$ avec $\quad K \in \mathbb{R}$.

• Résolution de (1) par la méthode de variation de la constante

Considérons une nouvelle fonction inconnue z telle que $y(x) = z(x)\,x$ soit solution de **(1)**.
On calcule $y'(x) = z'(x)\,x + z(x)$, on reporte dans **(1)** et on obtient :

$$z'(x) = \frac{2x+1}{x^2\,(x^2+1)}.$$

Pour pouvoir calculer z, décomposons la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{2x+1}{x^2\,(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{-2x-1}{x^2+1}.$$

On en déduit :

$$z(x) = -\frac{1}{x} + 2\ln|x| - \ln(x^2+1) - \arctan x + K.$$

La solution générale de **(1)** sur I est donc définie par :

$$y(x) = -1 + 2x\ln|x| - x\ln(x^2+1) - x\arctan x + Kx.$$

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ avec un prolongement par continuité en 0 par :

$$\begin{cases} y(x) = -1 + 2x\ln|x| - x\ln(x^2+1) - x\arctan x + K_1 x & \text{si } x < 0 \\ y(0) = -1 \\ y(x) = -1 + 2x\ln|x| - x\ln(x^2+1) - x\arctan x + K_2 x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sera un prolongement de solution de **(1)** si elle est dérivable en 0.

On a $\displaystyle \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{y(x)-y(0)}{x} = K_2 + \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2\ln x = -\infty$

Il n'existe donc aucune solution de **(1)** définie sur $\mathbb{R}$.

FICHE 17

Équations différentielles linéaires du second ordre

I Généralités

- **Définition**

Une équation différentielle linéaire du second ordre est de la forme :

$$a(t)\,x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b, c et f sont des fonctions continues données. Pour la résolution, on se place sur un intervalle I tel que la fonction a ne s'annule pas sur I.
L'équation est dite à coefficients constants si elle est de la forme :

$$a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = f(t) \qquad \textbf{(1)}$$

où a, b et c sont des constantes données.

- **Théorèmes dus à la linéarité**

– Toute solution de **(1)** est de la forme $x_P + x_S$ où x_P est une solution particulière de **(1)** et x_S la solution générale de l'équation homogène associée :

$$a(t)\,x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

– Les solutions de **(2)** sur I forment un espace vectoriel de dimension 2.
– Si x_1 est une solution particulière de

$$a(t)\,x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = f_1(t)$$

et x_2 une solution particulière de

$$a(t)\,x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = f_2(t)$$

alors $x_1 + x_2$ est une solution particulière de

$$a(t)\,x''(t) + b(t)\,x'(t) + c(t)\,x(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

II Cas des coefficients constants

- **Résolution de l'équation homogène**

La fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de **(2)** si, et seulement si, r vérifie l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0,$$

ce qui conduit à calculer $\Delta = b^2 - 4ac$.

– Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2. On a alors :
$$x_S(t) = K_1\, e^{r_1 t} + K_2\, e^{r_2 t},$$
où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques.

– Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double r_0. On a alors :
$$x_S(t) = (K_1\, t + K_2)\, e^{r_0 t},$$
où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques.

– Si a,b et c sont réels et si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. On a alors :
$$x_S(t) = e^{\alpha t}\,(K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t),$$
où K_1 et K_2 sont des constantes réelles quelconques.

En physique, on utilise la forme :
$$K_1 \cos \beta t + K_2 \sin \beta t = A \cos(\beta t - \varphi)$$
avec $A = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$, $\cos \varphi = \dfrac{K_1}{A}$ et $\sin \varphi = \dfrac{K_2}{A}$.

- **Résolution de (1) dans quelques cas**

– Cas où $f(t)$ est un polynôme $P(t)$ de degré n
Il existe une solution particulière de **(1)** sous la forme d'un polynôme de degré
n si $c \neq 0$;
$n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$;
$n + 2$ si $c = b = 0$ et $a \neq 0$.
La recherche de cette solution se fait par identification.

– Cas où $f(t) = e^{kt}\, P(t)$ avec P polynôme et k constante
On effectue le changement de fonction inconnue
$$x(t) = e^{kt}\, z(t)$$
où z est une nouvelle fonction inconnue. En reportant x, x' et x'' dans **(1)**, on est conduit à une équation en z du type précédent.

– Cas où $f(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t\, P(t)$ ou $f(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t\, P(t)$ avec α et β réels, et P polynôme à coefficients réels

Une solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution particulière obtenue pour l'équation de second membre $e^{(\alpha+i\beta)t} P(t)$.

III Méthodes générales

- **Variation de la constante**

Si x_1 est une solution de **(2)**, ne s'annulant pas sur I, on peut chercher les solutions de **(1)** sous la forme :

$$x(t) = u(t)\, x_1(t)$$

où u est une fonction inconnue (de classe $\mathcal{C}^1$) qui vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre en u' obtenue en reportant dans **(1)**.

- **Système fondamental de solutions**

Si x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de **(2)**, on peut chercher la solution de **(1)** sous la forme :

$$x(t) = u(t)\, x_1(t) + v(t)\, x_2(t)$$

où u et v sont des fonctions inconnues (de classe $\mathcal{C}^1$) soumises à la condition :

$$u'(t)\, x_1(t) + v'(t)\, x_2(t) = 0\,.$$

Les fonctions u et v sont obtenues en résolvant le système :

$$\begin{cases} u'\, x_1 + v'\, x_2 = 0 \\ u'\, x_1' + v'\, x_2' = f \end{cases}$$

dont le déterminant

$$w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

appelé wronskien de x_1 et x_2, ne s'annule pas sur I lorsque x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes. On obtient :

$$u'(t) = -\frac{x_2(t)\, f(t)}{w(t)} \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{x_1(t)\, f(t)}{w(t)}.$$

- **Utilisation de séries entières**

On peut chercher des solutions sous la forme d'une série entière.

Cette méthode peut être envisagée quand $a(t)$ et $b(t)$ sont des polynômes simples. N'oubliez pas de vérifier que la (ou les) série entière obtenue a un rayon de convergence non nul.

Application

Résolvez l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 10y = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Solution

L'équation différentielle est linéaire du second ordre, à coefficients constants, et sans second membre. Son équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 10 = 0$$

admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + 3\mathrm{i}$ et $r_2 = 1 - 3\mathrm{i}$. Sa solution générale est donc :

$$y(x) = \mathrm{e}^x \big[A \cos 3x + B \sin 3x\big].$$

On a alors :

$$y'(x) = \mathrm{e}^x \big[(A + 3B) \cos 3x + (B - 3A) \sin 3x\big].$$

Les conditions initiales fournissent le système :

$$\begin{cases} y(0) & = & A & = 1 \\ y'(0) & = & A + 3B & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La solution de **(1)** qui vérifie les conditions initiales est donc :

$$y(x) = \mathrm{e}^x \Big[\cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x\Big].$$

Application

Résolvez l'équation différentielle :

$$x'' - 5x' - 14x = (3t^2 + 2t - 1)\,\mathrm{e}^t \qquad \textbf{(1)}$$

Solution

• Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique :

$$r^2 - 5r - 14 = 0$$

a deux racines réelles distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 7$.

Sa solution générale est donc définie par :

$$x(t) = K_1\,\mathrm{e}^{-2t} + K_2\,\mathrm{e}^{7t} \quad \text{avec} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

• Pour la recherche d'une solution particulière de **(1)**, considérons la nouvelle fonction inconnue z telle que $x = z\,\mathrm{e}^t$ soit solution de **(1)**.
On a $\quad x' = z'\,\mathrm{e}^t + z\,\mathrm{e}^t \quad$ et $\quad x'' = z''\,\mathrm{e}^t + 2z'\,\mathrm{e}^t + z\,\mathrm{e}^t$.
x est solution de **(1)** si, et seulement si, z vérifie :

$$z'' - 3z' - 18z = 3t^2 + 2t - 1 .$$

Le coefficient de z n'est pas nul car 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique.

Dans ce cas, nous savons qu'il existe une solution particulière sous la forme :

$$z = at^2 + bt + c .$$

On a alors :

$$z' = 2at + b \quad \text{et} \quad z'' = 2a .$$

On a donc après simplification :

$$\forall t \qquad -18at^2 - (18b + 6a)\,t + (2a - 3b - 18c) = 3t^2 + 2t - 1 ,$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{rcr} -18a & = & 3 \\ -6a - 18b & = & 2 \\ 2a - 3b - 18c & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} a & = & -\dfrac{1}{6} \\ b & = & -\dfrac{1}{18} \\ c & = & \dfrac{5}{108} \end{array}\right.$$

On obtient une solution particulière :

$$z = -\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{18}t + \frac{5}{108}, \quad \text{puis} \quad y = \left(-\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{18}t + \frac{5}{108}\right)\mathrm{e}^t .$$

• La solution générale de **(1)** est donc définie par :

$$y(t) = K_1\,\mathrm{e}^{-2t} + K_2\,\mathrm{e}^{7t} + \left(-\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{18}t + \frac{5}{108}\right)\mathrm{e}^t \quad \text{avec} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

Application

Résolvez l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^x \cos 2x + 5x + 3 \qquad (1).$$

Solution

• Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 5 = 0$$

a deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ et $r_2 = 1 - 2\mathrm{i}$.
Sa solution générale est donc :

$$y = \mathrm{e}^x \big(K_1 \cos 2x + K_2 \sin 2x\big) \quad \text{avec} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

• L'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = 5x + 3 \qquad (\mathbf{E_1})$$

a une solution particulière de la forme $ax + b$. Par identification on obtient

$$y_1 = x + 1.$$

• L'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 5y = x\,\mathrm{e}^x \cos 2x \quad (\mathbf{E_2})$$

est la partie réelle de

$$Y'' - 2Y' + 5Y = x\,\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,x}$$

Posons $Y = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,x} Z$. La fonction Y est solution de l'équation ci-dessus si, et seulement si, Z vérifie $Z'' + 4\mathrm{i}Z' = x$.
Cette équation a une solution particulière de la forme $Z(x) = ax^2 + bx$.
Par identification, on obtient $Z(x) = -\dfrac{\mathrm{i}}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x$.
On en déduit une solution particulière de $(\mathbf{E_2})$:

$$y_2 = \mathrm{Re}\left[\left(-\frac{\mathrm{i}}{8}x^2 + \frac{1}{16}x\right)\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})\,x}\right] = \mathrm{e}^x\left(\frac{x}{16}\cos 2x + \frac{x^2}{8}\sin 2x\right).$$

• L'équation différentielle **(1)** admet pour solution particulière $y_1 + y_2$. Sa solution générale est donc :

$$y = \mathrm{e}^x \big(K_1 \cos 2x + K_2 \sin 2x\big) + x + 1 + \mathrm{e}^x\left(\frac{x}{16}\cos 2x + \frac{x^2}{8}\sin 2x\right).$$

Application

Résolvez l'équation différentielle :

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1 + x^2} \tag{1}$$

Solution

• Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 = (r+2)^2 .$$

Sa solution générale est donc :

$$(K_1 x + K_2)\, \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{avec} \quad (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

• Introduisons une nouvelle fonction inconnue z telle que $y = z\mathrm{e}^{-2x}$ soit solution de l'équation donnée **(1)**. On calcule :

$$y' = z'\, \mathrm{e}^{-2x} - 2z\mathrm{e}^{-2x} \quad ; \quad y'' = z''\, \mathrm{e}^{-2x} - 4z'\, \mathrm{e}^{-2x} + 4z\, \mathrm{e}^{-2x} .$$

En substituant et en simplifiant, il reste :

$$z'' = \frac{1}{1+x^2} .$$

Vous remarquez la disparition de z et de z' qui correspond au fait que -2 est racine double de l'équation caractéristique.

On en déduit $\quad z' = \arctan x + a, \quad$ puis avec une intégration par parties :

$$z = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + ax + b ,$$

et enfin la solution générale de **(1)** :

$$y = \left(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + ax + b \right) \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 .$$

Application

Résolvez l'équation différentielle :

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \qquad (1)$$

sur un intervalle I ne contenant pas 0

Solution

L'équation étant linéaire et homogène, sur un intervalle où le coefficient de y'' ne s'annule pas, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. Mais attention à ne pas introduire une équation caractéristique car les coefficients ne sont pas constants.

• Cherchons des solutions développables en séries entières :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad ; \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad ; \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

En reportant dans **(1)** et en effectuant les changements d'indices nécessaires pour avoir partout x^n on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\, a_{n+1}\, x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\, x^n = 0\,.$$

Tous les coefficients doivent être nuls, soit :

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+1} + a_{n-1} = 0\,.$$

On en déduit, en distinguant les indices pairs et impairs :

$$a_{2p+1} = 0 \quad ; \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\, a_0$$

$$\text{soit} \quad y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\, a_0\, x^{2p} = a_0\, \frac{\sin x}{x} \quad \text{avec } R = +\infty.$$

On obtient ainsi un espace de dimension 1. Il manque donc des solutions.

• La méthode de variation de la constante consiste à introduire une fonction auxiliaire u de sorte que $y(x) = u(x)\, \dfrac{\sin x}{x}$ soit solution de **(1)**.

On calcule :

$$y'(x) = u'(x)\, \frac{\sin x}{x} + u(x)\, \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$y''(x) = u''(x)\, \frac{\sin x}{x} + 2u'(x)\, \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + u(x)\, \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x}{x^3}$$

En reportant et en simplifiant, il reste :

$$u''(x) \sin x + 2u'(x) \cos x = 0$$

ce qui donne successivement (avec K_1 et K_2 réels quelconques) :

$$u'(x) = \frac{K_1}{\sin^2 x} \quad ; \quad u(x) = K_1 \cot x + K_2$$

et enfin la solution générale de **(1)** sur I

$$y(x) = K_1\, \frac{\cos x}{x} + K_2\, \frac{\sin x}{x}.$$

Pour la fin du calcul, on se place, dans un premier temps, sur un intervalle où $\sin x$ ne s'annule pas. Puis on constate que la fonction obtenue est $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ne contenant pas 0.

FICHE 18

Systèmes différentiels

I Définitions et notations

Un système de p équations différentielles linéaires du premier ordre et à coefficients constants est de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & a_{11}\,x_1(t)+\cdots+a_{1p}\,x_p(t)+b_1(t) \\ & \vdots & \\ x_p'(t) & = & a_{p1}\,x_1(t)+\cdots+a_{pp}\,x_p(t)+b_p(t) \end{array}\right.$$

où les b_i sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

On suppose que le nombre d'inconnues est égal à celui des équations.

Avec

$$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ \vdots \\ x_p(t)\end{pmatrix} \quad ; \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp}\end{pmatrix} \quad ; \quad B(t)=\begin{pmatrix} b_1(t)\\ \vdots \\ b_p(t)\end{pmatrix}$$

(S) s'écrit sous la forme matricielle :

$$X'(t)=A\,X(t)+B(t).$$

Si $B(t)=0$, le système est dit homogène.

II Système homogène

- **Structure des solutions**

L'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène

$$X'(t)=A\,X(t) \qquad (S')$$

est un espace vectoriel de dimension p.
Toute solution de (S) est la somme de la solution générale de (S') et d'une solution particulière de (S).

- **Cas où A est diagonalisable**

Soit A diagonalisable ; notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ ses valeurs propres et V_1,λ,V_p une base de $\mathbb{R}^p$ formée de vecteurs propres associés.

L'espace vectoriel des solutions du système homogène (S') admet pour base :

$$\left(V_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \dots, V_p \mathrm{e}^{\lambda_p t}\right).$$

III Résolution de (S)

- **Par réduction de A**

  On a $A = PRP^{-1}$ où R est diagonale ou triangulaire.
  Si l'on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et $C(t) = P^{-1}B(t)$, le système s'écrit :

$$Y'(t) = RY(t) + C(t).$$

On résout ce système réduit et on en déduit $X(t) = PY(t)$.

> Si $B(t) \neq 0$, cette méthode nécessite le calcul de P^{-1} et peut être pénible.

- **Par la méthode de « variation des constantes »**

  Si $\left(C_1(t), \dots, C_p(t)\right)$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (S'), on peut poser $X(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i(t)\, C_i(t)$ où les u_i sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$.

- **Par la recherche d'intégrales premières indépendantes**

  Si λ est une valeur propre de A, comme $\det(A - \lambda I_p) = 0$, il existe une combinaison linéaire, à coefficients non tous nuls, des lignes L_i de la matrice $A - \lambda I_p$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, L_i = 0$.
  En utilisant cette combinaison linéaire à partir des lignes de

$$X' - \lambda X = (A - \lambda I_p)X + B$$

  on obtient une équation différentielle ordinaire qui donne $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\, x_i$.

  Si A est diagonalisable, on obtient ainsi p combinaisons linéaires en x_i, d'où l'on déduit les x_i.

Application

Résolvez le système différentiel :

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} x' = 5x - 2y + e^t & \textbf{(1)} \\ y' = -x + 6y + t & \textbf{(2)} \end{array}\right.$$

Solution

• **Utilisation d'une équation du second ordre** ($n = 2$ seulement)

En dérivant **(1)** par rapport à t, on obtient :

$$x'' = 5x' - 2y' + e^t = 5x' + 2x - 12\left[\frac{x' - 5x - e^t}{-2}\right] - 2t + e^t$$

soit :

$$x'' - 11x' + 28x = -5\,e^t - 2t\,.$$

La résolution de cette équation différentielle donne :

$$x(t) = 2K_1\,e^{4t} + K_2\,e^{7t} - \frac{5}{18}\,e^t - \frac{1}{14}\,t - \frac{11}{392}.$$

En reportant dans l'équation **(1)**, on obtient alors :

$$y(t) = K_1\,e^{4t} - K_2\,e^{7t} - \frac{1}{18}\,e^t - \frac{5}{28}\,t - \frac{27}{784}.$$

• **Écriture matricielle et éléments propres**

(S) s'écrit sous forme matricielle $X'(t) = A\,X(t) + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \text{et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 7$, et les espaces propres associés $\text{Vect}(V_1)$ et $\text{Vect}(V_2)$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• **Recherche d'intégrales premières indépendantes** ($n = 2$ conseillé)

Avec $\lambda_1 = 4$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' - 4x & = & x - 2y + e^t \\ y' - 4y & = & -x + 2y + t \end{array}\right\} \Longrightarrow (x + y)' - 4(x + y) = e^t + t\,.$$

Avec $\lambda_2 = 7$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x' - 7x & = & -2x - 2y + e^t \\ y' - 7y & = & -x - y + t \end{array}\right\} \Longrightarrow (x - 2y)' - 7(x - 2y) = e^t - 2t\,.$$

Ces deux équations différentielles permettent de calculer $x + y$ et $x - 2y$; puis on en déduit x et y.

- **Variation des constantes**

La solution générale du système homogène $X'(t) = A\,X(t)$ s'écrit :

$$X = K_1\,\mathrm{e}^{4t}\,V_1 + K_2\,\mathrm{e}^{7t}\,V_2 \quad \text{avec } (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour résoudre (S), on peut introduire deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = u(t)\,\mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v(t)\,\mathrm{e}^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ soit solution de (S).

En reportant, et en simplifiant, on obtient :

$$u'(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{t}{3}\,\mathrm{e}^{-4t} \quad ; \quad v'(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-6t} - \frac{2}{3}\,t\,\mathrm{e}^{-7t}.$$

Par calcul de primitives, on obtient $u(t)$ et $v(t)$, puis $x(t)$ et $y(t)$.

- **Diagonalisation de A**

Avec la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, on peut écrire : $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

En posant $X(t) = PU(t)$ avec $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ le système (S) devient $U'(t) = DU(t) + P^{-1}B(t)$ ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} u'(t) = 4u(t) + \dfrac{1}{3}\,(\mathrm{e}^t + t) \\[2ex] v'(t) = 7v(t) + \dfrac{1}{3}\,(\mathrm{e}^t - 2t). \end{cases}$$

Il s'agit de deux équations différentielles linéaires du premier ordre.
Leur résolution et le report du résultat dans $X(t) = PU(t)$ donne à nouveau $x(t)$ et $y(t)$.

FICHE 19

Séries numériques

I Définitions et premières propriétés

- **Convergence**

Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes.

– On dit que la série $\sum u_n$ (ou encore la série de terme général u_n) est convergente si la suite (S_N) de terme général :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_N$$

tend vers une limite finie S. On note S la somme de la série :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} u_n \right) = \lim_{N \to +\infty} (S_N) .$$

S_N est appelée somme partielle d'ordre N.

La différence $R_N = S - S_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ est le reste d'ordre N. C'est l'erreur commise en remplaçant S par sa valeur approchée S_N.

– Si la série $\sum u_n$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Étudier la nature d'une série, c'est préciser si elle est convergente ou divergente.

- **Condition nécessaire de convergence**

Si la série $\sum u_n$ converge, alors le terme général u_n tend vers 0.

Si le terme général u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

- **Espace vectoriel des séries convergentes**

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et ont pour sommes respectives U et V alors, pour tous nombres, réels ou complexes, a et b, la série $\sum (au_n + bv_n)$ est convergente et a pour somme $aU + bV$.

- **Convergence absolue**

La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente, si la série $\sum |u_n|$ est convergente. Si une série de nombres, réels ou complexes, est absolument convergente, alors elle est convergente. Mais la réciproque est fausse.

II Séries à termes positifs

- **Caractérisation**

Pour qu'une série de termes réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée.

- **Comparaison de deux séries**

– Théorème de comparaison
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

– Utilisation d'équivalents
Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes > 0 telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Les deux séries sont alors de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont convergentes ou divergentes en même temps.

– Règle de d'Alembert
Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admette une limite l quand n tend vers $+\infty$.
Si $l < 1$, la série converge ; si $l > 1$, la série diverge.

- **Comparaison d'une série à une intégrale**

Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive et décroissante.
La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

III Séries de référence

- **Séries géométriques**

La série de terme général (réel ou complexe) $u_n = aq^n$ est convergente (absolument) si, et seulement si, $|q| < 1$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} aq^n = a\frac{1}{1-q}.$$

- **Séries de Riemann**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

En particulier, la série divergente $\sum \frac{1}{n}$ est appelée série harmonique.

- **Série exponentielle**

La série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

IV Séries alternées

- **Définition**

Une série $\sum u_n$ à termes réels est alternée si son terme général change de signe alternativement.
Si $u_0 \geqslant 0$, on a donc $u_n = (-1)^n a_n$ où $a_n = |u_n|$.

- **Critère spécial des séries alternées**

– Théorème
Si la suite de termes positifs (a_n) est décroissante et converge vers 0, alors la série alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ est convergente.

– Majoration du reste
Dans les hypothèses du critère spécial des séries alternées, les suites $\left(S_{2n}\right)$ et $\left(S_{2n+1}\right)$ sont adjacentes.
Le reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ est du signe de $(-1)^{N+1}$ et vérifie :

$$|R_N| \leqslant a_{N+1}.$$

Application

Déterminez la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

Solution

Pour $n \geqslant 3$, on a $\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n} > 1$ et $0 < \cos\dfrac{\pi}{n} < 1$, ce qui entraîne $u_n > 0$.
Lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$u_n = \ln\left(\frac{1+\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1-\frac{\pi^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \ln\left(1+\frac{\pi^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{n^2}.$$

La série à termes positifs $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ qui est une série de Riemann convergente.

Application

Déterminez la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{n!}$

Solution

La série est à termes positifs. Pour étudier sa nature, on peut utiliser la règle de d'Alembert. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{\ln^2(n+1)-\ln^2 n}.$$

Comme

$$\ln^2(n+1) - \ln^2 n = \big[\ln(n+1)+\ln n\big]\big[\ln(n+1)-\ln n\big] = \ln(n^2+n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}\ln n$$

on en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\ln^2(n+1)-\ln^2 n} = 1$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$.

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n$ est donc convergente.

Application

Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \cdot$ Calculez $\lim_{s \to 1^+} (s-1)\zeta(s)$.

Solution

Soit $s > 1$ fixé. La fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^s}$ est décroissante ; d'où :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^s}\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^s} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^s}\, \mathrm{d}x \ ;$$

puis en additionnant :

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x^s}\, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leqslant 1 + \int_1^{N} \frac{1}{x^s}\, \mathrm{d}x$$

c'est-à-dire :

$$\frac{(N+1)^{1-s}-1}{1-s} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \leqslant 1 + \frac{N^{1-s}-1}{1-s}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ et en multipliant par $s-1 > 0$, on obtient :

$$1 \leqslant (s-1)\,\zeta(s) \leqslant s.$$

D'après le théorème d'encadrement, on a donc :

$$\lim_{s \to 1^+} (s-1)\,\zeta(s) = 1 \ .$$

Application

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n \geqslant 2$ par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

Montrez que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Quelle est la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

Solution

• Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right] = 1$, on a bien l'équivalence

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n .$$

• Comme la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et converge vers 0, la série $\sum u_n$ est convergente d'après le critère spécial des séries alternées.

• On peut écrire :

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] = u_n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

La série $\sum \left[\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]$, de même nature que la série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{n}$, est divergente.

La série $\sum v_n$ étant la somme d'une série convergente et d'une série divergente est donc divergente.

Cet exercice montre que l'équivalence $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ n'entraîne pas que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature lorsque u_n et v_n ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang.

Vous pouvez aussi remarquer que la série de terme général v_n est alternée et ne vérifie pas les hypothèses du critère spécial puisque $|v_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ n'est pas décroissante.

FICHE 20

Suites de fonctions

I Convergences

(f_n) désigne une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- **Convergence simple**

La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f, de I dans K, si :

$$\forall x \in I \qquad \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

- **Convergence uniforme**

f étant la limite simple de la suite (f_n), on dit que la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur I si :

$$\lim_{n \to +\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$$

où $\quad \| f_n - f \|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$

Le nombre $\|f_n - f\|_\infty$ se calcule souvent avec l'étude des variations de la fonction $f_n - f$. Quand ce calcul est trop difficile, cherchez à minorer ou à majorer.

La convergence uniforme de (f_n) vers f entraîne la convergence simple.

La réciproque est fausse.

II Propriétés

- **Continuité de la limite**

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, et si chaque f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.

Si les f_n sont continues sur I, et si f n'est pas continue sur I, alors la convergence n'est pas uniforme.

Il suffit que la convergence soit uniforme sur tout segment inclus dans I, pour que f soit continue sur I.

- **Intégration de la limite**

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, et si chaque f_n est continue sur I, alors pour tous a et b dans I, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\,.$$

Si cette égalité n'a pas lieu, alors la convergence n'est pas uniforme.

- **Dérivation de la limite**

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans I, convergeant en un point $a \in I$. Si la suite des dérivées (f_n') converge uniformément sur I, alors la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ dans I qui vérifie :

$$\forall x \in I \qquad f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)\,.$$

- **Théorème de la convergence dominée**

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I.
Si (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I, et s'il existe une fonction φ continue par morceaux sur I, positive et intégrable sur I, telle que pour tout entier n, on ait $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors les fonctions f_n et f sont sommables sur I et

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n\,.$$

Application

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = n^2 x\,(1 - nx) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = 0 & \text{si} \quad \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Montrez que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.

2. Montrez que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Solution

1. Pour tout x fixé dans $]0,1]$, on a $f_n(x) = 0$ dès que n vérifie $n > \dfrac{1}{x}$; et par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

Pour $x = 0$, on a toujours $f_n(0) = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$.

La suite (f_n) converge donc simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle $f = 0$.

2. Étudions les variations de la fonction $f_n - f = f_n$.

Si $0 < x < \dfrac{1}{n}$ on a $f_n'(x) = n^2\,(1 - 2nx)$ et on obtient le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{n}$		1
f_n			$\frac{n}{4}$				
		$\nearrow$		$\searrow$			
	0				0	$\longrightarrow$	0

On a donc $\|f_n - f\| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{n}{4}$.

Comme $\|f_n - f\|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Application

On considère la suite de fonctions f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Étudiez

1. la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$;

2. la convergence uniforme de (f_n) sur un intervalle $[a,b]$;

3. la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. Rappelons que, pour tout réel u, on a $|\sin u| \leqslant |u|$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{|x|}{n}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle $f = 0$.

2. Un intervalle $[a,b]$ étant donné, on peut poser $M = \max\big(|a|,|b|\big)$ et la majoration de la question précédente donne :

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f_n(x)| \leqslant \frac{M}{n}$$

soit $\|f_n - f\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \dfrac{M}{n}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^{[a,b]} = 0$, ce qui prouve la convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[a,b]$.

3. On a $\|f_n - f\|_\infty^{\mathbb{R}} \geqslant |f_n(n)|$ par définition d'une borne supérieure.

Comme $f_n(n) = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} n^2 \times \dfrac{1}{n^2} = 1$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

FICHE 21

Séries de fonctions

I Convergences

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I. On considère les sommes partielles définies par :

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)\,.$$

- **Convergence simple**

  On dit que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur I si la suite (S_N) converge simplement et on note :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{N\to+\infty} S_N(x)\,.$$

- **Convergence uniforme**

  On dit que la série $\sum_n u_n$ converge uniformément sur I si la suite (S_n) converge uniformément sur I.

- **Convergence normale**

  Définition

  On dit que la série $\sum_n u_n$ converge normalement sur I si la série des normes $\sum_n \|u_n\|_\infty$ converge.

  Condition nécessaire et suffisante

  La série $\sum_n u_n$ converge normalement sur I si, et seulement si, il existe une série numérique à termes positifs a_n telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |u_n(x)| \leqslant a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente.}$$

La recherche de a_n peut se faire par majoration ou en étudiant les variations de u_n.

Théorème

La convergence normale de $\sum_n u_n$ entraîne la convergence uniforme de $\sum_n u_n$ et, pour tout $x \in I$, la convergence absolue de $\sum_n u_n(x)$.

Si vous êtes optimiste, pour étudier le mode de convergence d'une série de fonctions, commencez par la convergence normale sur I, ou sur tout segment de I.
C'est souvent facile à faire, et, si ça marche, c'est un mode de convergence qui entraîne tous les autres.

II Propriétés

Pour une série $\sum_n u_n$ qui converge uniformément (normalement entraîne cette condition) sur I, les théorèmes sur les suites de fonctions conduisent à :

- **Continuité**

  Si les fonctions u_n sont continues sur I, alors la somme S est continue sur I.

- **Intégration**

  Si les fonctions u_n sont continues dans I et si $\sum_n u_n$ converge uniformément sur I, alors, pour tous a et b dans I, on a :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_n(x)\, \mathrm{d}x \right)$$

- **Dérivation**

  Si les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, s'il existe $a \in I$ tel que $\sum u_n(a)$ converge, et si $\sum_n u'_n$ converge uniformément, alors la somme S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie :

$$\forall x \in I \qquad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_k(x)\,.$$

Application

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}} \cos 2nx$.

1. Montrez que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

2. Calculez sa somme.

Solution

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a : $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^{2n}}$.

La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ est une série géométrique convergente. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

2. Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. On a :

$$u_n(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{(-1)^n}{2^{2n}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{4}\right)^n.$$

Dans $\mathbb{C}$, la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{4}\right)^n$ est convergente puisque $\left|\dfrac{-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{4}\right| = \dfrac{1}{4} < 1$ et a pour somme $\dfrac{1}{1 + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}}{4}}$. On a donc :

$$S(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1 + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}}{4}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{4}{(4 + \cos 2x) + \mathrm{i} \sin 2x}\right) = \frac{16 + 4 \cos 2x}{17 + 8 \cos 2x}.$$

Application

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\sin x^2}{\operatorname{ch} nx}$.

1. Montrez que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. Montrez que cette série converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout réel $a > 0$.

3. Montrez que sa somme est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

1. Comme toutes les fonctions u_n sont paires, on peut limiter l'étude de la convergence simple à $x \geqslant 0$.
Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$ pour tout n et la série converge.
Pour $x > 0$, on choisit la majoration :

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{1}{\operatorname{ch} nx} \leqslant \frac{2}{e^{nx}}.$$

La série géométrique de terme général $\dfrac{1}{e^{nx}} = (e^{-x})^n$ est convergente puisque $0 < e^{-x} < 1$ pour $x > 0$.

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est donc absolument convergente pour tout x réel.
Notons $S(x)$ sa somme.

2. Soit $a > 0$. Pour tout $x \geqslant a$, on a $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{2}{e^{na}}$.

La série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{na}}$ est une série géométrique convergente.

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est donc normalement convergente sur $[a,+\infty[$.

3. Comme toutes les fonctions u_n sont continues, la question précédente entraîne que la somme S est continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.
Du fait de la parité des u_n, on a donc la continuité de S sur $\mathbb{R}^*$.
Il reste à étudier la continuité de S en 0.
En utilisant la majoration $|\sin u| \leqslant |u|$, on obtient pour $x > 0$:

$$0 \leqslant |u_n(x)| \leqslant \frac{2x^2}{e^{nx}}.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^{nx}} = \frac{1}{1-e^{-x}}$ on obtient donc :

$$0 \leqslant |S(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)| \leqslant \frac{2x^2}{1-e^{-x}}.$$

On a $1 - e^{-x} \underset{0}{\sim} x$, ce qui entraîne $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{1-e^{-x}} = 0$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$. Par suite de la parité, on obtient de même $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$.
On a donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} S(x) = 0 = S(0)$ et la fonction S est continue en 0.

FICHE 22

Séries entières

I Convergence d'une série entière

- **Série entière**

Une série entière est une série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \qquad \text{avec} \quad u_n(z) = a_n\, z^n$$

où z est la variable réelle ou complexe et les a_n des constantes réelles ou complexes.

- **Lemme d'Abel**

Si la suite $\left(|a_n|\, r^n\right)$ est bornée, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < r$.

- **Rayon de convergence**

Une série entière vérifie une, et une seule, des trois propriétés :

– la série converge uniquement pour $z = 0$ (on pose $R = 0$) ;
– il existe un nombre réel $R > 0$ tel que la série converge absolument pour tout z tel que $|z| < R$, et diverge pour tout z tel que $|z| > R$;
– la série converge absolument pour tout z (on pose $R = +\infty$).

- **Détermination du rayon de convergence**

– Le nombre R est la borne supérieure des ensembles :

$$\{r \in \mathbb{R}_+ \; ; \; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, r^n \text{ converge}\} \quad ; \quad \{r \in \mathbb{R}_+ \; ; \; |a_n|\, r^n \text{ borné}\}.$$

– On détermine souvent R à partir de la règle de d'Alembert.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = l|z|^k$, en écrivant : $l|z|^k < 1 \iff |z| < \sqrt[k]{\dfrac{1}{l}}$

on obtient $R = \sqrt[k]{\dfrac{1}{l}}\cdot$

- **Mode de convergence**

– La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R converge absolument dans l'intervalle (ouvert) de convergence $]-R,R[$ dans le cas réel ; dans le disque (ouvert) de convergence $B(0,R)$ dans le cas complexe.
Pour $|z| > R$, la série diverge.
Si $|z| = R$, il n'y a pas de résultat général.
– La convergence est normale, donc uniforme, sur tout compact inclus dans le disque (ou l'intervalle) de convergence.

- **Combinaison linéaire**

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2, et de sommes respectives $f(z)$ et $g(z)$.

Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$ a pour somme $\alpha f(z) + \beta g(z)$; son rayon de convergence R est tel que :

$$\begin{aligned} R &= \min(R_1, R_2) && \text{si} \quad R_1 \neq R_2 \\ R &\geqslant R_1 && \text{si} \quad R_1 = R_2. \end{aligned}$$

II Série entière d'une variable réelle

- **Dérivation**

Si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, alors f est dérivable sur $]-R,R[$ et l'on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1}.$$

Il en résulte que f est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$.

- **Intégration**

Si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, pour tout $x \in]-R,R[$ on a :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

La série entière ainsi obtenue par intégration terme à terme a le même rayon de convergence que la série initiale.

III Développement d'une fonction en série entière

- **Condition nécessaire**

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$, alors f est indéfiniment dérivable et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
Donc, si le développement en série entière de f existe, il est unique.

- **Condition suffisante**

Si f est indéfiniment dérivable sur $I =]-R, R[$ et s'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant M$$

alors f est développable en série entière.

- **Développements de base**

$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$	$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$	$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$	$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$	$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$

Application

Déterminez le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^{2n}$ où :

$$a_n = \frac{\text{ch}\, n}{\text{sh}^2\, n}.$$

Solution

Pour déterminer le rayon de convergence avec la règle de d'Alembert, calculons d'abord un équivalent plus simple de a_n quand n tend vers l'infini.

On a : $a_n = \dfrac{2(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n})}{(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n})^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\mathrm{e}^n}$.

On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{n+1}} \frac{\mathrm{e}^n}{2} |x|^2 = \frac{1}{\mathrm{e}} |x|^2.$$

On a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}}|x|^2 < 1 \iff |x| < \sqrt{\mathrm{e}}$.

La série entière de l'énoncé a donc pour rayon de convergence $R = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Application

Étudiez la convergence (rayon de convergence et étude aux bornes), et déterminez la somme $S(x)$, de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}.$$

Solution

- Le rayon de convergence $R = 1$ s'obtient avec la règle de d'Alembert car :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - 1}{4(n+1)^2 - 1} |x|^2 = |x|^2.$$

- On a : $|u_n(1)| = |u_n(-1)| = \dfrac{1}{4n^2 - 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$.

Comme la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la série entière proposée est normalement convergente sur $[-1,1]$.

• En décomposant en éléments simples, on obtient :

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$$

ce qui conduit à décomposer la somme $S(x)$ cherchée avec deux séries entières dont le rayon de convergence est 1 :

$$S(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Sachant que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan\, x$, on en déduit :

$$S(x) = \frac{1}{2}\left[-x^2 \arctan\, x - (\arctan\, x - x)\right] = \frac{1}{2}\left[x - (1+x^2)\arctan\, x\right].$$

Application

Étudiez la convergence (rayon de convergence et étude aux bornes), et déterminez la somme $S(x)$, de la série entière : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

Solution

• Le rayon de convergence $R = 1$ s'obtient avec la règle de d'Alembert car :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{4n+3}|x|^4 = |x|^4.$$

• Aux bornes on a : $u_n(-1) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n}$ et $u_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4n}$. Dans les deux cas, la série diverge.

• Pour $x \in]-1;1[$ il reste à calculer $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$.

Sur $]-1;1[$ on sait que S est dérivable et que :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2} = x^2 \frac{1}{1-x^4} \qquad \text{(série géométrique de raison } x^4\text{)}.$$

En décomposant en éléments simples, on obtient :

$$\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}.$$

Comme de plus $S(0)=0$, on obtient par calcul de primitives :

$$S(x) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\arctan x\,.$$

Application

Développez en série entière la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x-2x^2)$. Étudiez la validité aux bornes.

Solution

Comme $1+x-2x^2 = (1-x)(1+2x)$ la fonction f est définie sur $]-\frac{1}{2};1[$. On peut donc parier que le développement en série entière aura $\frac{1}{2}$ pour rayon de convergence, qu'il sera convergent en $x=\frac{1}{2}$ et divergent en $x=-\frac{1}{2}$.

Sur $\left]-\frac{1}{2};1\right[$ on peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \ln(1-x) + \ln(1+2x).$$

Avec les développements usuels on peut écrire :

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad \text{pour } x \in [-1;1[\ ;$$

$$\ln(1+2x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n} \quad \text{pour } x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}].$$

On obtient donc, avec un rayon de convergence et un comportement aux bornes conformes aux prévisions :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n - 1}{n}x^n \quad \text{pour } x \in]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}].$$

On peut aussi calculer d'abord $f'(x)$, décomposer en éléments simples, les développer, puis intégrer.

FICHE 23

Séries de Fourier

I Série de Fourier d'une fonction

Soit f est une fonction T-périodique ($T > 0$), continue par morceaux sur $[0, T]$. On note $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation, et α un réel quelconque.

- **Coefficients de Fourier**

  Forme réelle ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos n\omega t \,\mathrm{d}t \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t \,\mathrm{d}t\,.$$

  Forme complexe ($n \in \mathbb{Z}$)

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\,\mathrm{d}t\,.$$

  Passage des coefficients complexes aux coefficients réels

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} & \text{pour } n \geqslant 0 \\ b_n = \mathrm{i}\,(c_n - c_{-n}) & \text{pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

  Passage des coefficients réels aux coefficients complexes

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{et pour } n \geqslant 1 : \quad c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}\,b_n}{2} \quad ; \quad c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}\,b_n}{2}.$$

- **Série de Fourier d'une fonction périodique**

  On associe à f une série qui, lorsqu'elle converge, définit une fonction S périodique de période T.
  Forme réelle

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\,.$$

  Forme complexe

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}.$$

- **Fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux**

On dit que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_p = b$ telle que :

– f de classe $\mathcal{C}^1$ dans chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[\quad (i = 0, \ldots, p-1)$,

– $f(t)$ et $f'(t)$ possèdent une limite en chaque extrémité de ces intervalles, notées $f(a_{i-}), f(a_{i+}), f'(a_{i-})$ et $f'(a_{i+})$.

- **Propriétés**

Parité

Si f est une fonction paire, pour tout n on a $b_n = 0$, soit $c_n = c_{-n}$.
Si f est une fonction impaire, pour tout n on a $a_n = 0$, soit $c_n = -c_{-n}$.

Coefficients de Fourier d'une dérivée

Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,T]$, les coefficients de Fourier de f et f' sont reliés par :
Forme complexe :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(f') = \mathrm{i}\, n\, \omega\, c_n(f)\ ;$$

Forme réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n(f') = n\, \omega\, b_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(f') = -n\, \omega\, a_n(f).$$

II Convergence de la série de Fourier d'une fonction

- **Théorème de Dirichlet**

Si f est T-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,T]$, alors la série de Fourier de f est convergente et sa somme S vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad S(t) = \frac{f(t_-) + f(t_+)}{2}.$$

De plus, la convergence est normale (donc uniforme) sur tout segment où la fonction est continue, ou sur $\mathbb{R}$ si f est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarquez que si f est continue en un point t_0, alors $S(t_0) = f(t_0)$.

- **Formule de Parseval**

Si f est continue par morceaux sur un segment de longueur T on a :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} [f(t)]^2 \mathrm{d}t = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

Application

Montrez que : $|\sin x| = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}$ où λ est un coefficient à déterminer.

Solution

La fonction définie par $f(x) = |\sin x|$ est périodique de période $T = \pi$, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Elle est donc développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ (et la convergence est normale).

Déterminons les coefficients sous la forme réelle car, la fonction f étant paire, on a $b_n = 0$ pour tout n.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \cos(2nt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t\right]\mathrm{d}t$$

$$\text{car } \sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^{2n+1}-1}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n-1}-1}{2n-1}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right]$$

$$= \frac{-4}{\pi(4n^2-1)} \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{4}{\pi}.$$

D'après le théorème de Dirichlet, on a donc pour tout x réel :

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}$$

On utilise la formule $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ et on décompose la série de Fourier en somme de deux séries convergentes car la première de ces séries est convergente.

En évaluant les deux membres de l'égalité ci-dessus en $x = 0$, on déduit :

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1} \qquad \text{soit } \lambda = \frac{8}{\pi}.$$

Application

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique, et telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Montrez que :

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Solution

Notons $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier réels de la fonction f et $a_n(f')$ et $b_n(f')$ ceux de la fonction f'.

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer la formule de Parseval aussi bien à f qu'à f'.

On a toujours $a_0(f') = 0$ et, ici, on a fait l'hypothèse que $a_0(f) = 0$. On a donc, en utilisant les relations entre les coefficients de Fourier d'une fonction et de sa dérivée :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2(f) + b_n^2(f)\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^2(f') + b_n^2(f')\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[a_n^2(f) + b_n^2(f)\right]$$

On en déduit :

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

L'égalité dans cette inégalité signifie que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n^2-1)\left[a_n^2(f) + b_n^2(f)\right] = 0$, c'est-à-dire : $a_n(f) = b_n(f) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Dans les hypothèses de l'exercice, la fonction f est égale à la somme de sa série de Fourier. Il reste donc dans l'égalité résultant de l'application du théorème de Dirichlet :

$$f(t) = a_1 \cos t + b_1 \sin t\,.$$

Réciproquement, les fonctions de ce type conduisent à l'égalité dans l'inégalité de l'énoncé.

FICHE 24

Topologie de $\mathbb{R}^n$

I Norme sur un espace vectoriel

- **Définition**

On appelle norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application N, de E dans $\mathbb{R}$, qui vérifie :

$$\forall x \in E \qquad N(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad N(x) = 0 \iff x = 0\ ;$$
$$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)\ ;$$
$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \quad \text{(inégalité triangulaire).}$$

On emploie généralement la notation $\|x\|$ pour $N(x)$, qui rappelle l'analogie avec la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

- **Propriété**

$$\forall x \in E \qquad \forall y \in E \qquad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|\,.$$

- **Normes classiques**

Sur $\mathbb{R}^n$, on utilise indifféremment les trois normes classiques suivantes, définies pour $X = (x_1,\ldots,x_n)$ par :

$$\|X\|_\infty = \sup\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}\ ;\ \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|\ ;\ \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,.$$

II Parties remarquables de $\mathbb{R}^n$

- **Boules**

Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, on appelle :

– boule ouverte de centre $A \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble :

$$B(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n\ ;\ \|X - A\| < r\},$$

– boule fermée de centre $A \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble :

$$B^*(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n\ ;\ \|X - A\| \leqslant r\}.$$

- **Parties bornées**

  Une partie D de $\mathbb{R}^n$ est bornée si l'ensemble des réels $\|X - Y\|$, où X et Y sont des vecteurs quelconques de D, est borné.
  D est bornée si, et seulement si, il existe une boule qui la contient.

- **Parties ouvertes, parties fermées**

  – Soit D une partie et A un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
  On dit que A est un point intérieur de D s'il existe une boule $B(A,r)$, avec $r > 0$, contenue dans D.
  On dit que A est un point frontière de D si toute boule $B(A,r)$, avec $r > 0$, contient au moins un vecteur de D et un vecteur qui n'appartient pas à D.
  L'ensemble des points frontières de D est appelée la frontière de D.
  On dit que A est un point adhérent à D si toute boule $B(A,r)$, avec $r > 0$, contient un point de D.
  Les points adhérents à D sont les points de D et les points frontières de D.

  – On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est ouverte si elle ne contient aucun point de sa frontière, c'est-à-dire si elle est égale à l'ensemble de ses points intérieurs.

  – On dit qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est fermée si elle contient tous les points de sa frontière.

  – On dit qu'un point A de D est isolé si l'on peut trouver une boule de centre A ne contenant pas d'autre point de D que A.

Application

Soit $B(a,r)$ une boule ouverte relative à une norme de $\mathbb{R}^n$. Montrez que c'est une partie convexe, c'est-à-dire que si x et y sont deux éléments quelconques de $B(a,r)$, le segment d'extrémités x et y est inclus dans $B(a,r)$.

Solution

Le segment d'extrémités x et y est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ de la forme $z = tx + (1-t)y$ avec $t \in [0; 1]$.
On veut montrer que, si $\|x-a\| < r$ et $\|y-a\| < r$, alors $\|z-a\| < r$.
On a : $z - a = t(x-a) + (1-t)(y-a)$.
D'après les propriétés d'une norme, on a donc :
$\|z-a\| \leqslant t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| < tr + (1-t)r$ soit $\|z-a\| < r$.

Application

Dessinez les boules fermées de centre O et de rayon r relatives à chacune des trois normes classiques de $\mathbb{R}^2$.

Solution

• Soit $B_0^*(O,r)$ la boule fermée de centre O et de rayon r relative à la norme $\|(x_1,x_2)\|_\infty = \sup\left(|x_1|,|x_2|\right)$.
On a alors :

$$(x,y) \in B_0^*(O,r) \iff \sup\left(|x|,|y|\right) \leqslant r \iff |x| \leqslant r \text{ et } |y| \leqslant r.$$

$B_0^*(O,r)$ est donc l'intersection des deux bandes définies par :

$$-r \leqslant x \leqslant r \quad \text{et} \quad -r \leqslant y \leqslant r.$$

• Soit $B_1^*(O,r)$ la boule fermée de centre O et de rayon r relative à la norme $\|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$. On a alors :

$$(x,y) \in B_1^*(O,r) \iff |x| + |y| \leqslant r$$

Dans le premier quadrant, la condition s'écrit $x + y \leqslant r$, ce qui est l'équation du demi-plan limité par la droite $x + y = r$ et contenant l'origine. On obtient ainsi un triangle. Puis on complète par symétrie par rapport aux axes puisque la quantité $|x| + |y|$ est invariante quand on change x en $-x$ ou y en $-y$.

• Soit $B_2^*(O,r)$ la boule fermée de centre O et de rayon r relative à la norme $\|(x_1,x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$.

On a alors :

$$(x,y) \in B_2^*(O,r) \iff \sqrt{x_1^2+x_2^2} \leqslant r \iff x_1^2+x_2^2 \leqslant r^2.$$

$B_2^*(O,r)$ est donc le disque de centre O et de rayon r.

• **Graphiques**

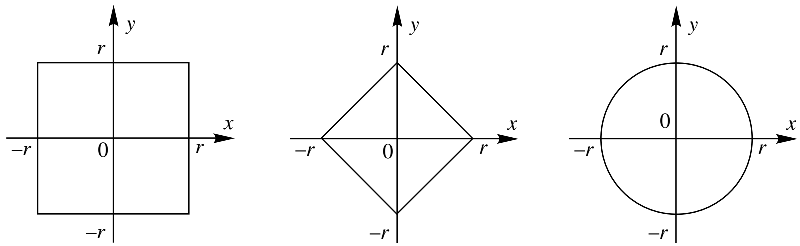


Figure 24.1

> Seule la troisième boule permet de jouer à la pétanque! Le mot « boule » a donc ici un sens plus général que dans la vie courante.

FICHE 25

Fonctions de plusieurs variables

Pour simplifier, les énoncés seront donnés dans le cas de deux variables.

I Définitions

- **Fonction de deux variables**

Une fonction f, définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, fait correspondre à tout vecteur X de D un réel unique $f(X)$.
X se note (x,y) ou (x_1,x_2).
L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \Big\{\big(x,y,f(x,y)\big) \quad ; \quad (x,y) \in D\Big\}$$

est la surface représentative de f ; c'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction d'une variable.

- **Fonctions partielles**

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $A = (a_1,a_2)$ un point intérieur de D. Les fonctions :

$$x_1 \mapsto f(x_1,a_2) \quad \text{et} \quad x_2 \mapsto f(a_1,x_2)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a_1 et a_2, sont appelées les fonctions partielles associées à f au point A.

- **Lignes de niveau**

Soit $k \in \mathbb{R}$; l'ensemble $\{(x,y) \in D \quad ; \quad f(x,y) = k\}$ est la courbe de niveau k de la fonction f.

II Limite et continuité

- **Limite en un point**

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ sans point isolé,
A un point adhérent à D,
et f une fonction à valeurs réelles dont le domaine de définition est D, privé éventuellement de A.

On dit que f a pour limite l au point A si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists r > 0 \qquad (X \in D \quad \text{et} \quad \|X - A\| < r) \implies |f(X) - l| < \varepsilon\,.$$

L'existence et la valeur éventuelle de la limite sont indépendantes de la norme choisie dans $\mathbb{R}^2$. On dit que les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.
Lorsqu'elle existe, la limite est unique.

- **Continuité**

Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $A \in D$ si f possède en A une limite égale à $f(A)$.
Si f est continue en chaque élément de D, on dit que f est continue sur D.

Remarques

Si f est définie en A et possède une limite en ce point, cette limite est nécessairement égale à $f(A)$, et f est alors continue en A.

Si f a pour limite l en A, la restriction de f à toute courbe continue passant par A admet la même limite l. La réciproque est fausse.

- **Opérations algébriques**

Comme pour les fonctions d'une variable, la somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues sont continus.

III Composition des fonctions continues

- **Généralisation**

Si f est une application de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, la définition de la limite en un point A se généralise en remplaçant $|f(X) - l|$ par $\|f(X) - l\|$.
Il en est de même pour la continuité.
L'application f peut s'écrire :

$$X = (x_1, x_2) \in D \longmapsto f(X) = \big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\big) \in \mathbb{R}^2\,.$$

Elle est continue si, et seulement si, les deux applications cooordonnées f_1 et f_2, qui vont de D dans $\mathbb{R}$, sont continues.

- **Continuité d'une fonction composée**

Soit f une application de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, continue en $X_0 \in D$,
g une application de $f(D) \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, continue en $f(X_0)$,
alors l'application $g \circ f$, de D dans $\mathbb{R}$, est continue en X_0.

Application

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x\tan y - y\tan x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Étudiez la continuité de f en $(0,0)$.

Solution

Pour étudier la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$, nous allons utiliser le développement limité de la fonction tangente au voisinage de l'origine qui peut s'écrire :

$$\tan u = u + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon(u) \quad \text{avec } \lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0\,.$$

Avec cette notation, on a :

$$f(x,y) = \frac{\frac{1}{3}(xy^3 - yx^3) + xy^3\varepsilon(y) - yx^3\varepsilon(x)}{x^2+y^2}.$$

Choisissons la norme euclidienne $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
On a la majoration :

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leqslant \frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{3}|xy|y^2 + \frac{1}{3}|xy|x^2 + |xy||\varepsilon(y)|y^2 + |yx||\varepsilon(x)|x^2\right) \\ &\leqslant |xy|\left(\frac{1}{3} + |\varepsilon(y)| + |\varepsilon(x)|\right) \leqslant \|(x,y)\|^2\left(\frac{1}{3} + |\varepsilon(y)| + |\varepsilon(x)|\right) \end{aligned}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, ce qui prouve que f est continue en $(0,0)$.

La majoration $|f(x,y)| \leqslant 2\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}$ ne permettait pas de conclure.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrez que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.
2. Montrez que la fonction f n'est pas continue à l'origine.

Solution

Remarquons tout d'abord que la fonction est bien définie dans $\mathbb{R}^2$ puisque

$$x^4 - 2x^2 y + 3y^2 = (x^2 - y)^2 + 2y^2$$

ne s'annule qu'en $(0,0)$.

1. La restriction de f aux droites $x = 0$ et $y = 0$ est la fonction nulle.
La restriction de f à la droite $y = mx$, avec $m \neq 0$, donne :

$$f(x,mx) = \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2}$$

et tend vers 0 quand x tend vers 0.
Comme $f(0,0) = 0$, la restriction de f à toute droite passant par l'origine est donc continue.

2. Considérons la restriction de f à la parabole $y = x^2$. On a :

$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $f(x,x^2)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

Pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en M_0, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par M_0 qui n'admette pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes.
Mais pour prouver l'existence d'une limite, il faut considérer le cas général.
Dans le cas de deux variables, lorsque (x, y) tend vers $(0, 0)$, il peut être intéressant de passer en coordonnées polaires.

FICHE 26 Calcul différentiel

Pour simplifier, les énoncés seront donnés dans le cas de deux variables.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte D de $\mathbb{R}^2$.

I Dérivation d'ordre 1

- **Dérivées partielles premières**

Soit $(x_0, y_0) \in D$. Les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

- **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$**

Si les fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.

- **Dérivées des fonctions composées**

– Cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières. Si x et y sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = f\big(x(t), y(t)\big)$ est dérivable et :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) \times y'(t)$$

– Cas $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Si f est une fonction des deux variables x et y, elles-mêmes fonctions des deux variables u et v, on peut définir la fonction composée :

$$g(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$$

et écrire, lorsque les diverses dérivées partielles qui interviennent sont définies :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x(u, v), y(u, v)\Big) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x(u, v), y(u, v)\Big) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \ ;$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\,.$$

- **Vecteur gradient**

  Le gradient de f en (x_0, y_0) est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières. Il est orthogonal à la courbe de niveau de f passant par (x_0, y_0).

II Dérivées partielles d'ordre supérieur

- **Définition**

  Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0, y_0), ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en (x_0, y_0). On les note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)\ ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)\ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)\ ; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0).$$

  Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue.

- **Fonction de classe $\mathcal{C}^k$**

  Si les fonctions dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.

  Si les dérivées partielles de tous ordres existent, f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.

- **Théorème de Schwarz**

  Si au moins une des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ est continue en (x_0, y_0), alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)\,.$$

III Différentielle

- **Fonction différentiable**

  On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe des constantes réelles A et B telles que :

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = Ah + Bk + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$$

  avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0\,.$

Dans ce cas, on a $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $B = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ et on note :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

- **Théorème**

Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0).
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0).

Les deux réciproques sont fausses.

- **Dérivée dans une direction**

La dérivée de f en (x_0, y_0) dans la direction du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$ est :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Lorsque f est différentiable, cette limite existe et vaut :

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0, y_0) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0) \cdot \overrightarrow{u}.$$

Cette dérivée directionnelle est maximum dans la direction du gradient et vaut alors $\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0)\|$.

IV Fonctions implicites

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et C_k la courbe de niveau $f(x, y) = k$.

À tout point $(x_0, y_0) \in C_k$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut associer un intervalle ouvert I contenant x_0 et une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in I \qquad y = \varphi(x) \Longleftrightarrow f(x, y) = k.$$

De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est donnée par :

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x, \varphi(x)\big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)}.$$

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrez que f admet des dérivées partielles secondes en tout point.

Que pouvez-vous déduire du calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

Solution

Si l'on considère un point M_0 distinct de l'origine, il existe une boule de centre M_0 dans laquelle f est donnée seulement par la première expression. Comme il s'agit d'une composée de fonctions dérivables autant de fois que l'on veut, f admet des dérivées partielles secondes en M_0.

Dans tout voisinage de $(0,0)$, les deux expressions de f interviennent et on doit revenir aux définitions :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$

On va avoir aussi besoin du calcul pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1.$$

Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, le théorème de Schwarz permet de conclure que les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Le théorème de Schwarz a été publié en 1873. L'exemple de l'exercice est dû à Peano (1858-1932).

Application

Soit $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Déterminez toutes les fonctions f, $\mathcal{C}^1$ sur U, qui vérifient :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x} \qquad \textbf{(1)}$$

Solution

L'introduction des coordonnées polaires :

$$x = \rho\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = \rho\sin\theta$$

nous permet de considérer la fonction g définie sur $]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par :

$$g(\rho,\theta) = f(x,y).$$

Pour déterminer l'équation vérifiée par les dérivées partielles de g, il est préférable de calculer les dérivées partielles de f pour pouvoir substituer dans l'équation donnée.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} &&= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\theta}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} &&= \sin\theta\frac{\partial g}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\theta}.\end{aligned}$$

La fonction f vérifie **(1)** si, et seulement si, la fonction g vérifie :

$$\rho\cos\theta\left[\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right] + \rho\sin\theta\left[\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\theta}\right] = \tan\theta,$$

soit après simplication :

$$\rho\frac{\partial g}{\partial\rho} = \tan\theta \qquad \textbf{(2)}$$

En intégrant l'équation **(2)** par rapport à ρ on a :

$$g(\rho,\theta) = \ln\rho\times\tan\theta + \varphi(\theta)$$

où φ est une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.
En revenant à f, on obtient la solution générale de **(1)** :

$$f(x,y) = \frac{y}{2x}\ln(x^2+y^2) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

où ψ est une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Application

Montrez que l'équation :

$$x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0$$

permet d'exprimer z en fonction de (x,y) au voisinage de $(1,1,1)$.
Calculez alors $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.

Solution

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3$.
f possède des dérivées partielles continues :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 4y \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4x - 3z^2 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 6yz$$

et au point $(1,1,1)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 7 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 1 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -4.$$

Puisque $f(1,1,1) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous assure qu'on peut exprimer z en fonction de (x,y) dans un voisinage de $(1,1,1)$ et que :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)} = \frac{7}{4} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)} = \frac{1}{4}.$$

FICHE 27

Optimisation d'une fonction de plusieurs variables

I Généralités

- **Définitions**

Soit f une fonction numérique définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$.
f admet un maximum (resp. minimum) global (ou absolu) en $a \in D$ si

$$\forall x \in D \qquad f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a)).$$

f admet un maximum (resp. minimum) local (ou relatif) en $a \in D$ s'il existe une boule de rayon non nul $B(a,r)$ telle que :

$$\forall x \in B(a,r) \cap D \qquad f(x) \leqslant f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geqslant f(a)).$$

- **Existence d'un minimum et d'un maximum globaux**

Si D est fermé (c'est-à-dire contient sa frontière) et borné et si f est continue, alors f admet un maximum et un minimum globaux atteints au moins une fois.

II Extrémum local

- **Condition nécessaire d'extrémum local**

Si f présente un extrémum local en $a = (x_0, y_0)$ et est de classe $\mathcal{C}^1$ en ce point, alors :

$$\forall i \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = \overrightarrow{0}\,.$$

Un point vérifiant cette condition est appelé point stationnaire, ou point critique, de f.

- **Condition suffisante d'extrémum local (cas de 2 variables)**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point stationnaire ; posons :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad ; \quad S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad ; \quad T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

On a alors :
– si $S^2 - RT < 0$, f présente un extrémum relatif en (x_0, y_0) ; il s'agit d'un maximum si $R < 0$ et d'un minimum si $R > 0$;
– si $S^2 - RT > 0$, f présente un point-selle (ou point-col) en (x_0, y_0) ; ce n'est pas un extrémum ;

> Le mot col vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne : minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extremum du paysage.
> Le mot selle vient de l'exemple d'une selle de cheval.

– si $S^2 - RT = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.

- **Étude directe**

Après avoir déterminé un point stationnaire (x_0, y_0), on peut aussi étudier directement le signe de la différence

$$D(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0).$$

Si cette différence est de signe constant pour h et k voisins de 0, il s'agit d'un extrémum local (un maximum si $D < 0$, un minimum si $D > 0$). Sinon, il s'agit d'un point-col.
Mieux, si le signe est constant pour h et k quelconques, alors l'extrémum est global.

Application

Étudiez les extrémums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Solution

- Comme la restriction $f(x,0) = x^4 - 2x^2$ peut tendre vers $+\infty$, il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$.
- Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x^3 - (x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -y \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont donc : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
Pour les étudier, calculons les dérivées secondes :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4 \quad ; \quad S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \quad ; \quad T = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 12y^2 - 4.$$

- En $(0,0)$, on a $S^2 - RT = 0$. On ne peut donc pas conclure avec les dérivées secondes.
  Examinons le signe, au voisinage du point étudié, de deux restrictions :

$$f(x,x) = 2x^4 > 0 \quad \text{et} \quad f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 \underset{0}{\sim} -8x^2 < 0.$$

  Les signes étant différents, le point $(0,0)$ n'est pas un extrémum.
- En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, on a $S^2 - RT < 0$ et $R > 0$. Il s'agit donc d'un minimum local dont la valeur est $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8$.

Avec des transformations algébriques, on peut obtenir :

$$f(x,y) + 8 = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x+y)^2 \geqslant 0.$$

Il s'agit donc d'un minimum global.

- En $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, le résultat est identique car $f(x,y) = f(-x,-y)$.

Application

Étudiez les extrémums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y.$$

Solution

Comme la restriction $f(0,0,z) = -z$ peut tendre vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, il n'y a pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^3$.
Un extrémum relatif de f vérifie les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x + yz = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Pour étudier la nature du point critique obtenu, nous pouvons étudier le signe de $f(x,y,z) - f(1,1,-1)$ lorsque x est voisin de 1, y voisin de 1 et z voisin de -1.
Mais il est plus intéressant de considérer la différence

$$\Delta f(h,k,l) = f(1+h,1+k,-1+l) - f(1,1,-1) = kl + hl - hk + hkl + \frac{h^2}{2}$$

avec h, k et l voisins de 0.

De cette façon, vous disposez d'une vérification : les termes de degré 1 en h, k et l doivent disparaître.
Il vous reste à transformer Δf si vous pensez qu'il s'agit d'un extrémum, ou fournir des restrictions qui se contredisent si vous pensez que ce n'est pas un extrémum.

On $\Delta f(h,0,h) = \dfrac{3}{2}h^2 > 0$ pour $h \neq 0$

et $\Delta(h,h,0) = -\dfrac{1}{2}h^2 < 0$ pour $h \neq 0$.
Ces restrictions à deux courbes continues passant par l'origine, qui donnent des signes différents, prouvent que le point $(1,1,-1)$ n'est pas un extrémum.

FICHE 28

Fonctions définies par une intégrale

I Cas de l'intégrale définie

- **Existence et continuité**

Soit f une fonction de deux variables, continue sur $[a,b] \times [c,d]$; alors la fonction F définie par $F(x) = \int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,t)\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t\,.$$

- **Dérivabilité**

Si f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $[a,b] \times [c,d]$, alors F est dérivable sur $[a,b]$ et on a :

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Si de plus, u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $[c,d]$, alors la fonction G définie par $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et

$$G'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + f\big(x,v(x)\big)\,v'(x) - f\big(x,u(x)\big)\,u'(x)\,.$$

II Cas de l'intégrale généralisée

Soit f une fonction de deux variables, continue sur $I \times]a,+\infty[$. Lorsqu'elle existe, on considère la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

- **Existence et continuité**

S'il existe une fonction positive g définie, continue par morceaux et sommable sur $]a,+\infty[$, et qui vérifie :

$$\forall x \in I \qquad \forall t \in]a,+\infty[\qquad |f(x,t)| \leqslant g(t)$$

alors F existe et est continue sur I.

- **Dérivabilité**

Supposons en plus des hypothèses précédentes que f admette une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I\times]a,+\infty[$ et qu'il existe une fonction positive h définie, continue par morceaux et sommable sur $]a,+\infty[$, et qui vérifie :

$$\forall x \in I \qquad \forall t \in]a,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant h(t)$$

alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'(x) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

- **Remarques**

Le théorème précédent se généralise pour les dérivées successives de F.

Pour la continuité et les dérivabilités successives, il suffit d'établir les hypothèses de domination du type $|f(x,t)| \leqslant g(t)$ sur tout segment de I.

Application

Pour $x \in \mathbb{R}$, considérons : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2tx)\, \mathrm{d}t$.

Étudiez l'existence et la dérivabilité de f, puis calculez $f(x)$.

Solution

• La fonction g définie par :

$$g(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2tx)$$

est continue sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$. On a la majoration :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,+\infty[\qquad |g(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$$

et la fonction définie par $h_1(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et sommable sur $[0,+\infty[$.
Par conséquent, f existe et est continue sur $\mathbb{R}$.

• On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -2t\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2tx)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2}.$$

La fonction définie par $h_2(t) = 2t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et sommable sur $[0,+\infty[$.
Par conséquent, f est dérivable et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \int_0^{+\infty} -2t\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2tx)\, \mathrm{d}t.$$

• En intégrant par parties, on obtient :

$$f'(x) = \Big[\mathrm{e}^{-t^2} \sin(2tx)\Big]_0^{+\infty} - 2x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(2tx)\, \mathrm{d}t,$$

soit $f'(x) = -2xf(x)$.
Cette équation différentielle a pour solution générale $f(x) = K\mathrm{e}^{-x^2}$.
La constante K vaut : $K = f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$

Si vous saviez que cette intégrale a pour valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ vous concluriez :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Application

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(1 - \cos xt)}{t^2}\, dt$.

Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$. Déduisez-en une expression simple de $f(x)$.

Solution

• La fonction g définie par :

$$g(x,t) = \frac{e^{-t}(1 - \cos xt)}{t^2} \quad \text{si } t \neq 0 \quad ; \quad g(x,0) = \frac{x^2}{2}$$

est continue sur $\mathbb{R} \times [0; +\infty[$.

On a toujours : $|1 - \cos u| = \left|2 \sin^2 \frac{u}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{u}{2}\right|^2$ ce qui entraîne :

$$|g(x,t)| \leqslant e^{-t}\frac{x^2}{2}.$$

Pour tout $a > 0$ et pour tout $(x,t) \in [-a,a] \times [0,+\infty[$, on a $|g(x,t)| \leqslant \frac{a^2}{2}e^{-t}$ et cette fonction majorante est sommable sur $[0,+\infty[$.
On en déduit l'existence et la continuité de f sur tout $[-a,a]$, donc sur $\mathbb{R}$.

• Pour la dérivabilité première et seconde de f, la fonction :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{e^{-t}}{t} \sin xt \quad \text{si } t \neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = x$$

se majore sur tout $[-a,a]$ par une fonction sommable sur $[0,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant a\, e^{-t}$$

et la fonction :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = e^{-t} \cos xt \quad \text{si } t \neq 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,0) = 1$$

par $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^{-t}$, fonction sommable sur $[0,+\infty[$.

• On a donc $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos xt\, dt$ ce qui donne successivement :

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(x) = \arctan x \quad \text{et } f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

FICHE 29

Intégrales multiples

I Intégrales doubles

- **Théorème de Fubini**

Soit φ et ψ deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $\varphi \leqslant \psi$; notons A l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x).$$

Alors :

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

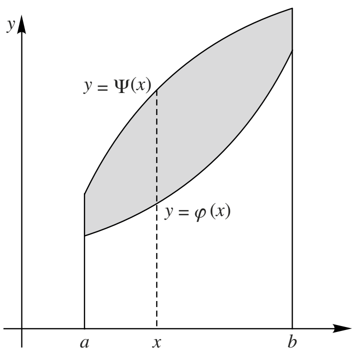


Figure 29.1

On peut permuter les rôles de x et de y.

- **Changement de variables**

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $x = \varphi(u,v)$ et $y = \psi(u,v)$; alors :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\big(x(u,v),y(u,v)\big) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Le déterminant $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$ est appelé jacobien.

- **Cas des coordonnées polaires**

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,.$$

II Intégrales triples

- **Approche et calcul**

f étant continue sur un domaine fermé et borné D de $\mathbb{R}^3$, l'intégrale triple $I = \iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ se définit de façon analogue aux intégrales doubles, et se calcule par intégrations successives.

- **Changement de variables**

Le théorème est analogue au cas précédent. En particulier, si un domaine est représenté par une partie D de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes et par une partie Δ en coordonnées cylindriques ou sphériques, on a

– en coordonnées cylindriques :

$$I = \iiint_\Delta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,,$$

– en coordonnées sphériques :

$$I = \iiint_\Delta f(r\cos\varphi\cos\theta,r\cos\varphi\sin\theta,r\sin\varphi)r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Attention, dans cette formule φ est la latitude. N'oubliez pas de modifier si vous utilisez la colatitude, comme le font beaucoup de physiciens qui ignorent la navigation.

III Applications

- **Aire et volume**

Si $f(x,y) = 1$, l'intégrale double $\iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est l'aire de A.

Si $f(x,y,z) = 1$, l'intégrale triple $\iiint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est le volume de A.

- **Masse**

Si $f(x,y)$, ou $f(x,y,z)$, est la densité au point (x,y), ou (x,y,z), l'intégrale double, ou triple, correspondante est la masse de la partie A.

Application

Calculez l'intégrale double $I = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où D est le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant x^2+y^2.$$

Solution

La partie D de $\mathbb{R}^2$ est l'intersection du carré $[0,1]\times[0,1]$ et de l'extérieur du cercle de centre O et de rayon 1.
La fonction f définie par :

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$$

est continue sur D.
À l'aide du théorème de Fubini, et du dessin pour ne pas se tromper sur les bornes, on peut écrire :

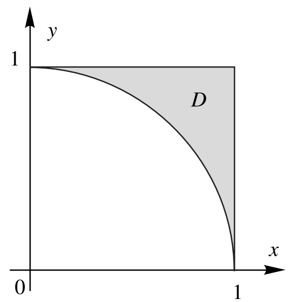


Figure 29.2

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \left(\frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x\,.$$

On a :

$$\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{x}{2}\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{2y}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{x}{2}\ln(1+x^2+y^2)\right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=1} = \frac{x}{2}\ln(2+x^2) - \frac{x}{2}\ln 2 = \frac{x}{2}\ln(1+\frac{x^2}{2})$$

On a donc, en utilisant le changement de variable $u = \frac{x^2}{2}$:

$$I = \int_0^1 \frac{x}{2}\ln(1+\frac{x^2}{2})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[(1+u)\ln(1+u) - u\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{4}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{4}$$

Application

Calculez l'intégrale double $I = \iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où D est le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$x^2+y^2-x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad x^2+y^2-y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y \geqslant 0\,.$$

Solution

La condition $x^2+y^2-x \leqslant 0$ s'écrit $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqslant \frac{1}{4}$ et signifie que $M(x,y)$ est intérieur au cercle de centre $\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

La condition $x^2+y^2-y \geqslant 0$ s'écrit $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}$ et signifie que $M(x,y)$ est extérieur au cercle de centre $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

L'allure de la représentation graphique de D suggère de passer en coordonnées polaires, ce qui donne :

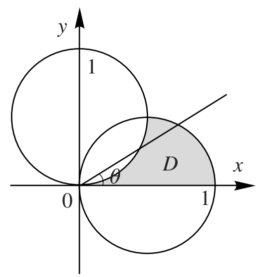


Figure 29.3

$$I = \iint_\Delta (\rho\cos\theta+\rho\sin\theta)^2\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \iint_\Delta \rho^3(\cos\theta+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,,$$

où $\Delta = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 ; 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sin\theta \leqslant \rho \leqslant \cos\theta\}$.

On a $(\cos\theta+\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta = 1+\sin 2\theta$, et I se calcule grâce au théorème de Fubini :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin 2\theta)\left(\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\theta\,.$$

$\displaystyle\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} \rho^3\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4}\cos 2\theta$ entraîne :

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin 2\theta)\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{3}{16}\cdot$$

FICHE 30

Intégrales curvilignes

I Formes différentielles de degré 1

- **Définition**

Une forme différentielle de degré 1 est une application ω, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et à valeurs dans le dual $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.
En notant $\mathrm{d}x_i$ la i-ième projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$ (définie par $\mathrm{d}x_i(h) = h_i$ si $h = (h_1,\ldots,h_n)$), ω s'écrit :

$$\forall x = (x_1,\ldots,x_n) \in U \qquad \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\mathrm{d}x_i\,.$$

Les P_i, applications de U dans $\mathbb{R}$, sont les fonctions coordonnées de ω.

> En physique, on associe à ω le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de composantes (P_1, P_2) dans le plan et (P_1, P_2, P_3) dans l'espace.

Si tous les P_i sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, on dit que ω est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

- **Forme exacte**

Une forme différentielle ω est exacte s'il existe une fonction f, de classe $\mathcal{C}^1$, de U dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\mathrm{d}f = \omega.$$

On dit alors que f est une primitive de ω sur U.

> En physique, ω exacte signifie que $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradients.

- **Forme fermée**

ω est fermée si :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\} \qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}.$$

> En physique, cette condition signifie que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$.

- **Condition nécessaire pour ω exacte**

Une forme différentielle exacte de classe $\mathcal{C}^1$ est toujours fermée.

En physique, cela signifie que l'on a toujours $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \overrightarrow{0}$.

- **Ouverts particuliers**

  Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est étoilé s'il existe $a \in U$ tel que, pour tout $x \in U$, le segment d'extrémités a et x soit inclus dans U.
  Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe si toute courbe fermée incluse dans U peut se ramener à un point par déformation continue.

- **Théorème de Poincaré**

  Si U est un ouvert étoilé, ou si U est simplement connexe, alors :
$$\omega \text{ exacte sur } U \iff \omega \text{ fermée sur } U.$$

Attention, cette équivalence exige une hypothèse sur U. Elle n'est pas vraie dans le cas du plan privé d'un point, de l'espace privé d'une droite (qui ne sont ni étoilés ni simplement connexes).

II Intégrale curviligne

- **Arc orienté**

  Soit Γ un arc de courbe défini par la représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$
  L'arc est orienté par le choix de l'un des deux sens de parcours possibles, ce qui revient à distinguer les vecteurs unitaires tangents (opposés) $\overrightarrow{T}_+$ et $\overrightarrow{T}_-$.

- **Intégrale d'une forme différentielle le long d'un arc orienté**

  P, Q et R étant des fonctions continues, on appelle intégrale curviligne de la forme différentielle $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ le nombre noté :
$$\int_{\Gamma^+} \omega = \int_{\Gamma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$
  et défini par :
$$I = \int_a^b \Big[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big]\mathrm{d}t$$

En physique, il s'agit de la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de Γ.

Application

Montrez que la forme différentielle $\omega = \dfrac{2xy\,\mathrm{d}x + (1-x^2)\,\mathrm{d}y}{(1-x^2)^2+y^2}$ est fermée.

Dans un ouvert à préciser, déterminez une fonction f telle que $\omega = \mathrm{d}f$.

Solution

• La forme différentielle ω est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$.

À partir de $P = \dfrac{2xy}{(1-x^2)^2+y^2}$ et $Q = \dfrac{1-x^2}{(1-x^2)^2+y^2}$ on observe que :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x\,(1-x^2)^2 - 2xy^2}{\left[(1-x^2)^2+y^2\right]^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Elle est donc fermée.

• Elle est exacte sur tout ouvert respectant les hypothèses du théorème de Poincaré, ce qui n'est pas le cas de son ensemble de définition.
Cherchons f telle que $\omega = \mathrm{d}f$ sur un ouvert A à préciser. f doit vérifier :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{(1-x^2)^2+y^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1-x^2}{(1-x^2)^2+y^2}.$$

Il est plus simple de partir de la seconde égalité et de placer dans un ouvert où $x^2 \neq 1$, par exemple $A = \{(x,y)\ ;\ |x| < 1\}$, qui est simplement connexe.

On peut alors écrire $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{1}{1-x^2}}{1+\left(\dfrac{y}{1-x^2}\right)^2}$ d'où l'on tire :

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{1-x^2}\right) + \varphi(x).$$

En calculant $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et en reportant, on obtient $\varphi'(x) = 0$, soit :

$$\forall (x,y) \in A \qquad f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{1-x^2}\right) + K.$$

Application

1. Soit la forme différentielle définie dans $\mathbb{R}^2$ par $\omega = y\,\mathrm{d}x + (2x - ye^y)\,\mathrm{d}y$. Montrez que ω n'est pas exacte dans $\mathbb{R}^2$.

2. Trouvez une fonction $g(y)$ de la seule variable y telle que la forme différentielle $g(y)\omega$ soit exacte dans $\mathbb{R}^2$.

3. Déterminez les fonctions $f(x,y)$ telles que $\mathrm{d}f = g\omega$ dans $\mathbb{R}^2$.

Solution

1. La forme différentielle est de la forme $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, avec

$$P(x,y) = y \quad \text{et} \quad Q(x,y) = 2x - ye^y.$$

Comme $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ la forme ω n'est pas fermée. Elle ne peut donc pas être exacte.

2. On a $g(y)\,\omega = P_1\mathrm{d}x + Q_1\mathrm{d}y$ avec

$$P_1(x,y) = yg(y) \quad \text{et} \quad Q_1(x,y) = (2x - ye^y)\,g(y).$$

Comme $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, d'après le théorème de Poincaré on a :

$$g(y)\,\omega \text{ exacte} \iff g(y)\,\omega \text{ fermée.}$$

Comme $\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = g(y) + yg'(y)$ et $\dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = 2g(y)$, la condition cherchée s'écrit :

$$yg'(y) - g(y) = 0 \iff g(y) = Ky.$$

On peut donc choisir, en particulier, $g(y) = y$.

3. D'après la question précédente, il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{d}f = y\,\omega$, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - y^2e^y$$

La première égalité donne $f(x,y) = xy^2 + k(y)$. En reportant dans la seconde équation, on obtient :

$$2xy + k'(y) = 2xy - y^2e^y \iff k'(y) = -y^2e^y,$$

soit après deux intégrations par parties :

$$k(y) = -e^y\,(y^2 - 2y + 2) + C \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Les fonctions f cherchées sont donc définies par :

$$f(x,y) = xy^2 - e^y\,(y^2 - 2y + 2) + C.$$

Application

Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs défini sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$\overrightarrow{V}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\overrightarrow{j}$$

1. Vérifiez que $\overrightarrow{V}$ satisfait la condition nécessaire pour être un champ de gradients.

2. Calculez la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long du cercle C^+ de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
$\overrightarrow{V}$ est-il un champ de gradients ?

Solution

1. Les fonctions définies par $P(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ et $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a bien :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

ce qui est la condition nécessaire pour que, dans le plan, le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ soit un champ de gradients.

2. On peut paramétrer C^+ par :

$$x = \cos\theta \quad ; \quad y = \sin\theta \quad ; \quad \theta \in [0,2\pi].$$

La circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de C^+ est égale à l'intégrale curviligne :

$$\int_{C^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \big[-\sin\theta(-\sin\theta) + \cos\theta(\cos\theta)\big]\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\,.$$

On en déduit que le champ $\overrightarrow{V}$ n'est pas un champ de gradients, car sa circulation le long de la courbe fermée C^+ n'est pas nulle.

Remarquons qu'il n'y a aucune contradiction avec le cours (heureusement !) puisque Ω n'est pas un ensemble simplement connexe.
En effet, un cercle entourant l'origine ne peut pas être ramené à un point en restant dans Ω.

Index

EXPRESS SCIENCES

Daniel FREDON
Myriam MAUMY-BERTRAND
Frédéric BERTRAND

Mathématiques
Analyse
en 30 fiches

Des principes aux applications

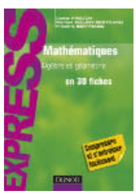
Comment aller à l'essentiel, comprendre les méthodes et les démarches avant de les mettre en application ?

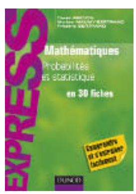
Conçue pour faciliter aussi bien l'apprentissage que la révision, la collection « **EXPRESS** » vous propose une présentation simple et concise en **30 fiches pédagogiques** des notions d'analyse.

Chaque fiche comporte :

- les **idées** clés à connaître,
- la **méthode** à mettre en œuvre,
- des **applications** sous forme d'exercices corrigés.

Des mêmes auteurs :





Daniel Fredon
Ancien maître de conférences à l'université de Limoges.

Myriam Maumy-Bertrand
Maître de conférences à l'université Louis Pasteur de Strasbourg.

Frédéric Bertrand
Maître de conférences à l'université Louis Pasteur de Strasbourg.

L1/ L2
Mathématiques, Informatique, Sciences physiques, Cycles préparatoires intégrés

DUNOD

ISBN 978-2-10-053933-8

www.dunod.com