

Développements Limités

**Exercice 01** :Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en  $x_0 = 0$  :

1.  $\sin x \cos x$  à l'ordre 5  
2.  $e^x \sqrt{1-x}$  à l'ordre 3
3.  $\operatorname{sh} x \cos x$  à l'ordre 5  
4.  $e^x \sin x$  à l'ordre 5

**Réponse :**

1.  $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$   
2.  $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{13}{48}x^3 + o(x^3)$
3.  $x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5)$   
4.  $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5)$

**Exercice 02** :Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en  $x_0$  à l'ordre indiqué :

1.  $\sin x$  en  $x_0 = \frac{\pi}{4}$  à l'ordre 3  
2.  $e^x$  en  $x_0 = 1$  à l'ordre 4
3.  $\sin x \cos 3x$  en  $x_0 = \frac{\pi}{3}$  à l'ordre 3  
4.  $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$  en  $+\infty$  à l'ordre 3

**Réponse :**

1.  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3 + O((x - \frac{\pi}{4})^3)$   
2.  $e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2 + \frac{e}{6}(x - 1)^3 + \frac{e}{24}(x - 1)^4 + o((x - 1)^4)$   
3.  $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{5\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \frac{7}{3}(x - \frac{\pi}{3})^3 + o((x - \frac{\pi}{3})^3)$   
4.  $1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o(\frac{1}{x^3})$

**Exercice 03** :Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})) = \frac{1}{2}$   
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\operatorname{tang} x - x} = \frac{3}{2}$   
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \frac{1}{2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = -\frac{1}{2}$   
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) = 1$

**Exercice 04** :Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

Montrer qu'au voisinage de  $+\infty$ , la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote dont on donnera l'équation.

**Réponse** : $y = x - 2 + \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x^2})$

**Exercice 05 :** On considère la fonction  $f$  donnée pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ - \{0\}$  par :

$$f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$$

1. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
2. Étudier la dérivabilité du prolongement de  $f$ .

### Exercices Supplémentaires

**Exercice 06 :** Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en  $x_0 = 0$  à l'ordre indiqué :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $(e^x - 1)(\sin x - x)$ à l'ordre 6 | 3. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 |
| 2. $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 6      | 4. $\tan x$ à l'ordre 5                           |

**Exercice 07 :** Déterminer les développements limités des fonctions suivantes en  $x_0$  à l'ordre indiqué :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\cos x$ en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ à l'ordre 4 | 3. $\arctan x$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 3                 |
| 2. $\frac{\ln x}{x^2}$ en $x_0 = 1$ à l'ordre 4  | 4. $\sqrt{\tan x}$ en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3 |

**Exercice 08 :** Calculer les DL des fonctions suivantes en  $x_0 = 0$  à l'ordre indiqué :

- |                                     |                                    |                                    |   |
|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|---|
| 1. $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, n = 4$ | 2. $\frac{1}{1 + x + x^2}, n = 4$  | 3. $(2x + 1)\sqrt{1 - x}, n = 3$   | 4. $\sqrt{1 + x}\sqrt[3]{1 + x^2}, n = 3$ |
| 5. $x\frac{e^x}{1 - x^2}, n = 4$    | 6. $\frac{\sin x}{2 + x^2}, n = 3$ | 7. $\ln(x + \sqrt{\cos x}), n = 4$ | 8. $\sin(\ln(1 + x)), n = 5$              |

**Réponse :**

- |   |   |
|---|---|
| 1. $-1 + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$  | 2. $1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$                                     |
| 3. $1 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$     | 4. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{24}x^2 + \frac{11}{48}x^3 + o(x^3)$ |
| 5. $x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + o(x^4)$               | 6. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$                         |
| 7. $x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{12}x^3 - \frac{13}{24}x^4 + o(x^4)$ | 8. $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^5 + O(x^5)$ |

**Exercice 09 :**Déterminer, en utilisant des développements limités, les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{1/3}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{1 - \sqrt{3x-5}} = -\frac{1}{6}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-1/6}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos x}{x^2} = 1$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3} - 1} = \frac{1}{3}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \cos x) - 2 \tan x}{2x - \sin x - \tan x} = 7$

8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)} = 4$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+x}}{(x^2 + 1)(x + 3)} = 0$
10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}$

11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cosh \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \sqrt{e}$

12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1)e^{1/x}}{\sqrt{x^2 + 2}} = 1$

**Exercice 10 :**Calculer le DL au  $V(0)$  et à l'ordre 2 de la fonction suivante : $f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$

Indication :calculer le DL de  $f'$  puis déduire le DL de  $f$ .

**Réponse :** $f'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{3+2x}}, f(x) = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{6}\sqrt{3}x - \frac{5}{72}\sqrt{3}x^2 + o(x^2)$ .

**Exercice 11 :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :

$$f(x) = x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Montrer qu'au voisinage de  $\pm\infty$ , la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote dont on donnera l'équation et la position de la courbe par rapport à son asymptote.

**Réponse :**Au voisinage de  $\pm\infty$  on trouve :  $f(x) = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + o(\frac{1}{x})$

**Exercice 12 :**Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Montrer qu'au voisinage de  $\pm\infty$ , la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote dont on donnera l'équation et la position de la courbe par rapport à son asymptote.

**Réponse :**Au voisinage de  $\pm\infty$  on trouve :  $f(x) = x - 1 + \frac{2}{3x} + o(\frac{1}{x})$