

2011-2012.

Durée = 2 h.

Devoir surveillé N°1

MODULE : ALGÈBRE I. PREMIÈRE ANNÉE

Exercice 1. -Ecrire à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques les implications suivantes :

1. Si n est entier naturel tel que n^2 est impair, alors n est impair.
2. Si n est entier naturel tel que $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

-Ecrire les contraposées des propositions précédentes.

-Montrer la contraposée de la première proposition.

-A-t-on démontré l'implication 1 ?

Exercice 2. Soit $E = \{a\}$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)))$.

Exercice 3. Soient E un ensemble fini non vide, et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant :

- (a) $f(\phi) = \phi$.
- (b) $\forall A, B \in \mathcal{P}(E); f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (c) $\forall A \in \mathcal{P}(E); \text{card} A \leq \text{card} f(A)$.

I- Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$\begin{array}{lcl} A \subset B & \implies & f(A) \subset f(B) \\ f(A \cap B) & \subset & f(A) \cap f(B) \end{array}$$

- Montrer que $f(E) = E$.

II- Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ telles que : $\text{card} A = \text{card} f(A)$ et $\text{card} B = \text{card} f(B)$

Montrer que :

$$\begin{array}{lcl} \text{card}(A \cup B) & = & \text{card} f(A \cup B) \\ \text{card}(A \cap B) & = & \text{card} f(A \cap B) \end{array}$$

Indication : $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B - \text{card}(A \cap B)$

III- Soit E un ensemble non vide, on définit pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ l'application

$$\chi_A : E \longrightarrow \{0, 1\} \text{ telle que } \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

χ_A s'appelle la fonction caractéristique de A .

Montrer que :

1. $\chi_A \leq \chi_B \iff A \subset B$
2. $\chi_A = \chi_B \iff A = B$

Exercice 4. Soient E un ensemble non vide et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E .

-Montrer que deux classes sont disjointes ou égales.

-Prouver que l'ensemble quotient E/\mathcal{R} est une partition de E .