Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de génie électrique et informatique
Département d'informatique

Année universitaire : 2017/2018
2ième année Licence-Informatique
module : Théorie des langages

# CORRIGÉ ABREGÉ DE LA SÉRIE D'EXERCICES n° 3 de ThL

par : **M.S. Habet, C. Cherifi, N. Otmani, F. Bouhatem**

EXERCICE **1** :

$L = \{a, b\}.\{a, b, c\}^2 \cup \{c\}.\{a, b\}$.

a) $L \| a = (\{a, b\}.\{a, b, c\}^2) \| a \cup (\{c\}.\{a, b\}) \| a = \{a, b, c\}^2 = S1$

$L \| b = (\{a, b\}.\{a, b, c\}^2) \| b \cup (\{c\}.\{a, b\}) \| b = \{a, b, c\}^2 = S1$

$L \| c = (\{a, b\}.\{a, b, c\}^2) \| c \cup (\{c\}.\{a, b\}) \| c = \{a, b\} = S2$

$S1 \| a = \{a, b, c\} = S3$

$S1 \| b = \{a, b, c\} = S3$

$S1 \| c = \{a, b, c\} = S3$

$S2 \| a = \varepsilon = S4$

$S2 \| b = \varepsilon = S4$

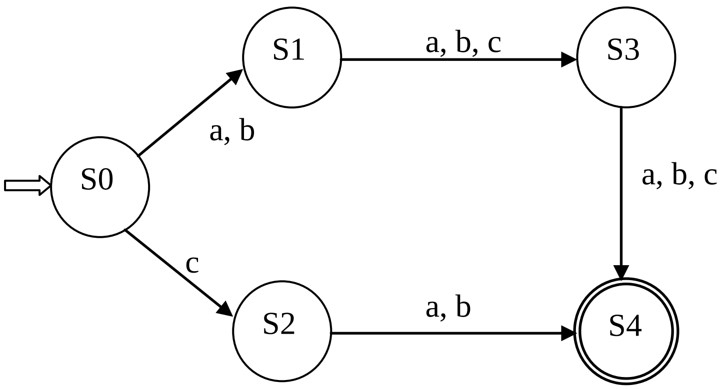
$S2 \| c = \emptyset$

$S3 \| a = S3 \| b = S3 \| c = \varepsilon = S4$

$S4 \| a = S4 \| b = S4 \| c = \emptyset$

b) L est régulier car il a un nombre fini de dérivées.

c) Soit S0 = L. Les états de l'automate reconnaissant L sont les états Si, i=0,..,4 ; l'état initial étant S0 ; il y a un seule état final, c'est S4 (car il contient ε).




EXERCICE **2** :

a) Soit $S0 = \{ a^{2.n} / n \geq 0 \} = \{ \varepsilon, aa, aaaa, a^6, ..., a^{2.n}, ....\}$

On a :

$S0 \| a = \{ a, aaa, a^5, ..., a^{2.n-1}, ....\} = \{ a^{2.n+1} / n \geq 0 \} = S1$

$S1 \| a = \{ \varepsilon, aa, a^4, ..., a^{2.n-2}, ....\} = \{ a^{2.n} / n \geq 0 \} = S0$

Le langage $\{ a^{2.n} / n \geq 0 \}$ a un nombre fini de dérivées : $S0 \| a^k = S0$ si k est pair, et = S1 sinon.

Par conséquent il est régulier.

b) Soit S0 = { $a^n.b^m$ / n, m ≥ 1 }.

On a :

S0 || a = { $a^n.b^m$ / n ≥ 0, m ≥ 1 } = S1

S0 || b = Ø

S1 || a = S1

S1 || b = ({ $a^n.b^m$ / n ≥ 1, m ≥ 1 } ∪ { $a^n.b^m$ / n = 0, m ≥ 1 }) || b

= S0 || b ∪ { $b^m$ / m ≥ 1 } || b = Ø ∪ { $b^m$ / m ≥ 0 } = { $b^m$ / m ≥ 0 } = S2

S2 || a = Ø

S2 || b = S2

Après S2, on n'obtient plus de nouveaux états ; donc il y a un nombre fini de dérivées ; par conséquent { $a^n.b^m$ / n, m ≥ 1 } est régulier.

c) Soit $S_0$ = { $a^n.b^n$ / n ≥ 0 }. Calculons les dérivées de $S_0$ par rapport aux mots $a^k$, pour k ≥ 1 ; pour cela on note : $S_k = S_0 \| a^k$ (pour k ≥ 1).

On peut remarquer déjà que $S_k = S_{k-1} \| a$, pour k ≥ 1 ;

on a donc :

$S_1 = S_0 \| a = \{a^{n-1}.b^n / n \geq 1\} = \{a^{n-1}.b^{n-1} / n \geq 1\}.\{b\} = \{a^n.b^n / n \geq 0\}.\{b\} = S_0.\{b\}$

$S_2 = S_1 \| a = (S_0.\{b\}) \| a = (S_0 \| a).\{b\} \cup (\{b\} \| a) = (S_0 \| a).\{b\} = (S_0.\{b\}).\{b\} = S_0.\{bb\}$

$S_3 = S_2 \| a = (S_0.\{bb\}) \| a = (S_0 \| a).\{bb\} = (S_0.\{b\}).\{bb\} = S_0.\{bbb\} = S_0.\{b^3\}$

…

On peut généraliser en démontrant par récurrence que :

$S_k = S_{k-1} \| a = (S_0.\{b^{k-1}\}) \| a = (S_0 \| a).\{b^{k-1}\} = (S_0.\{b\}).\{b^{k-1}\} = S_0.\{b^k\}$, pour tout k ≥ 1.

Pour chaque valeur de k dans ℕ (entiers naturels), on a un langage $S_k$ différent des autres langages $S_i$ (pour i≠k). On peut donc conclure qu'il y a une infinité de langages $(S_k)_{k\geq 1}$, tous différents les uns des autres et par conséquent il y a une infinité de dérivées du langage $S_0$, donc celui-ci n'est pas régulier.

d) Soit L = { $w.w^R$ / w ∈ $\{a, b\}^*$ }. L n'est pas régulier : si on calcule ses dérivées, on trouve un nombre infini. On peut aussi procéder à une démonstration par l'absurde : On suppose que L est régulier, donc d'après le théorème de Nerode, le nombre de ses dérivées par rapport aux mots sur V ={a, b} est fini. Donc il existe deux mots u et v tels que u ≠ v et L || u = L || v ; on peut supposer que u ou v contiennent des mélanges de lettres a et b.

L || u = { $x.x^R.u^R$ / x ∈ $\{a, b\}^*$ }, c'est-à-dire qu'un mot α ∈ L || u s'écrit comme α = $x.x^R.u^R$.

Comme α ∈ L || v, alors v.α ∈ L ; donc $v.x.x^R.u^R$ ∈ L pour tout x ∈ $\{a, b\}^*$. Par conséquent $v^R = u^R$ ;

d'où v = u : contradiction.

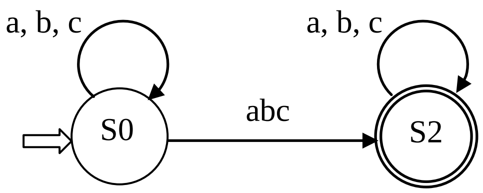
Donc L n'est pas régulier.

<u>EXERCICE **3** :</u>

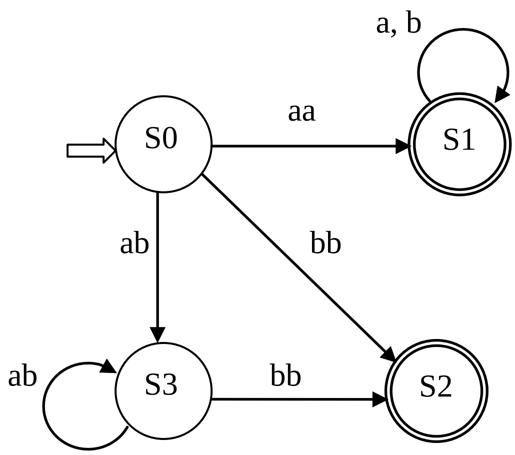
I)

I-1) L'expression régulière : $(a \cup b \cup c)^*.a.b.c.(a \cup b \cup c)^*$ dénote le langages des mots construits sur {a, b, c} et qui contiennent la sous-chaine abc.

Un automate équivalent est le suivant (il est généralisé) :




I-2) automate (généralisé aussi) pour l'expression régulière : $aa.(a \cup b)^* \cup (ab)^*.bb$




II)

II-1) Soit $S0 = (1.1^*.0.0^*.1)^*.0.1^*$ ; S0 sera un état non final car le langage dénoté par l'expression ne contient pas ε (le plus petit mot du langage est : 0).

Calculons les dérivées de S0, pour cela posons $\alpha = (1.1^*.0.0^*.1)^*$ :

$S0 \| 0 = (\alpha \| 0).0.1^* \cup (0.1^*) \| 0 = ((1.1^*.0.0^*.1) \| 0).\alpha.0.1^* \cup 1^* = \varnothing \cup 1^* = 1^* = S1$ (S1 est final car le langage qu'il dénote contient ε)

$S0 \| 1 = (\alpha \| 1).0.1^* \cup (0.1^*) \| 1 = ((1.1^*.0.0^*.1) \| 1).\alpha.0.1^* = (1^*.0.0^*.1).\alpha.0.1^* = S2$ (S2 est non final)

$S1 \| 0 = \varnothing$

$S1 \| 1 = 1^* = S1$

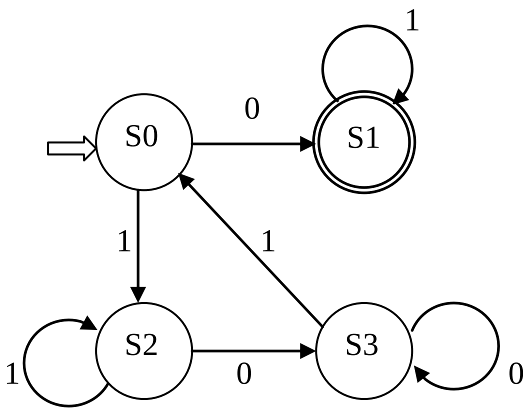
$S2 \| 0 = ((1^*.0.0^*.1) \| 0).\alpha.0.1^* = 0^*.1.\alpha.0.1^* = S3$ (S3 non final)

$S2 \| 1 = ((1^*.0.0^*.1) \| 1).\alpha.0.1^* = 1^*.0.0^*.1.\alpha.0.1^* = S2$

$S3 \| 0 = (0^*.1.\alpha.0.1^*) \| 0 = S3$

$S3 \| 1 = (0^*.1.\alpha.0.1^*) \| 1 = \alpha.0.1^* = S0$

D'où l'automate :



II-2) Soit S0 = $(a \cup ba)^*.bb.b^*.a$ ; S0 sera un état non final car le langage dénoté par l'expression ne contient pas ε (le plus petit mot du langage est : bba).

Calculons les dérivées de S0, pour cela posons $\alpha = (a \cup ba)^*$ :

$S0 \parallel a = (\alpha \parallel a).bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel a = (\alpha \parallel a).bb.b^*.a = ((a \cup ba) \parallel a).(a \cup ba)^*.bb.b*.a$

$\quad = \varepsilon.(a \cup ba)^*.bb.b*.a = \alpha.bb.b*.a = S1$ (S1 est non final)

$S0 \parallel b = (\alpha \parallel b).bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel b = ((a \cup ba) \parallel b).(a \cup ba)^*.bb.b*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel b =$

$\quad = a.(a \cup ba)^*.bb.b*.a \cup (b.b^*.a) = a.\alpha.bb.b^*.a \cup (b.b^*.a) = S2$ (S2 non final)

$S1 \parallel a = (\alpha \parallel a).bb.b^*.a = ((a \cup ba) \parallel a).(a \cup ba)^*.bb.b^*.a = \alpha.bb.b^*.a = S1$

$S1 \parallel b = (\alpha \parallel b).bb.b^*.a \cup (bb.b^*.a) \parallel b = ((a \cup ba) \parallel b).(a \cup ba)^*.bb.b^* \cup (b.b^*.a)$

$\quad = a.\alpha.bb.b^*.a \cup (b.b^*.a) = S2$ (S2 non final)

$S2 \parallel a = ((a.\alpha.bb.b^*.a) \parallel a) \cup ((b.b^*.a) \parallel a) = \alpha.bb.b^*.a = S1$

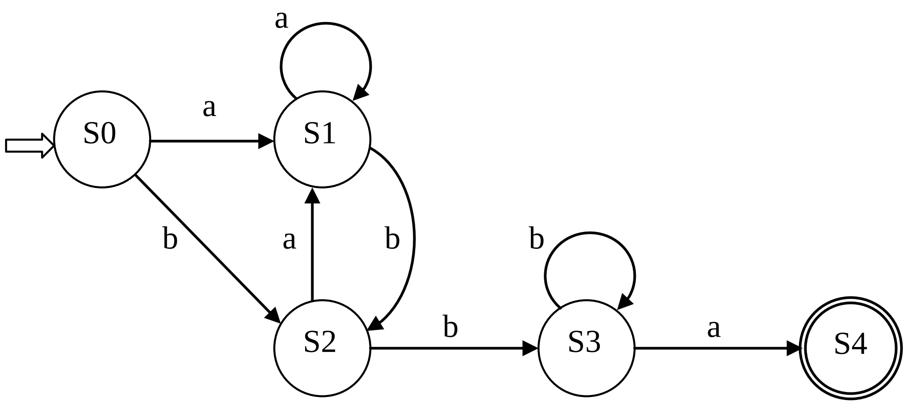
$S2 \parallel b = ((a.\alpha.bb.b^*.a) \parallel b) \cup ((b.b^*.a) \parallel b) = \varnothing \cup b^*.a = b^*.a = S3$ (S3 non final)

$S3 \parallel a = ((b^*) \parallel a).a \cup (a \parallel a) = \varnothing \cup \varepsilon = \varepsilon = S4$ (S4 final)

$S3 \parallel b = b^*.a = S4$

$S4 \parallel a = S4 \parallel b = \varnothing$

D'où l'automate :




<u>EXERCICE **4** :</u>

Le résultat à établir dans cet exercice est connu sous le nom du théorème d'Arden.

1) Montrons que $A^*.B$ est solution de l'équation : $X = A.X \cup B$ ; pour cela effectuons le remplacement de X par $A^*.B$ dans $A.X \cup B$ :

$A.(A^*.B) \cup B = (A.A^*.B) \cup B = A^+.B \cup B = (A^+ \cup \varepsilon).B = A^*.B = X$ ; d'où la relation.

Montrons que $A^*.B$ est la solution minimale au sens que $A^*.B$ est inclus dans toute autre solution Y de l'équation. Soit $w \in A^*.B$, donc w s'écrit $w = x.y$ ; où $x \in A^*$ et $y \in B$.

$x \in A^* \Rightarrow \exists\, n \geq 0$ tel que $x \in A^n$ ; d'où $w \in A^n.B$.

Soit Y une solution quelconque de l'équation, on a :

$Y = A.Y \cup B = A.(A.Y \cup B) \cup B = A^2.Y \cup A.B \cup B = A^2.(A.Y \cup B) \cup A.B \cup B =$

$\quad A^3.Y \cup A^2.B \cup A.B \cup B = \ldots = A^{n+1}.Y \cup A^n.B \cup \ldots \cup A.B \cup B$

Or $w \in A^n.B$ donc $w \in Y$, où Y est toute solution de l'équation. On a donc $A^*.B \subseteq Y$.

2) Dans cette question, on suppose : $\varepsilon \notin A$. On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe une autre solution différentes X' différente de $A^*.B$.

Soit f le plus petit mot de X' qui n'appartient pas à $A^*.B$.

$f \in X' \Rightarrow f \in A.X'$ ou $f \in B$. On peut écrire que $f \notin B$ car sinon il appartiendrait à $A^*.B$.

Donc $f \in A.X' \Rightarrow f = g.h$ avec $g \in A$ et $h \in X'$. Or $\varepsilon \notin A$, donc $g \neq \varepsilon$ et donc $|h| < |f|$.

Il existe deux cas pour h :

- $h \in A^*.B \Rightarrow gh \in A.A^*.B \Rightarrow f \in A^+.B \Rightarrow f \in A^*.B$ ce qui est faux.
- $h \notin A^*.B$, sachant que $h \in X'$ : contradiction car h est plus petit que f qu'on a supposé être le petit élément de X' n'appartenant pas à $A^*.B$.

EXERCICE **5** :

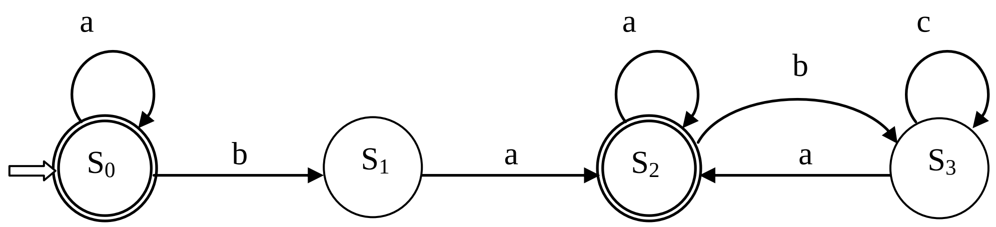
1) On va associer une variable à chaque non terminal de g : X0 (associé à S), X1 (à A) et X2 (à B).
On traduit les règles de productions de P en équations d'expressions régulières :

$$\begin{cases} X0 = a.X1 \cup \varepsilon \\ X1 = b.X1 \cup c.X2 \\ X2 = b.X2 \cup a \end{cases}$$

2) En appliquant le théorème d'Arden (voir exo 4) à la 3ième équation, on obtient : $X2 = b^*.a$.
En remplaçant X2 dans la 2ième équation on aura : $X1 = b.X1 \cup c.b^*.a$ ; puis avec le théorème d'Arden on obtient : $X1 = b^*.c.b^*.a$. On remplace dans la première équation et on aura : $X0 = a.\ b^*.c.b^*.a \cup \varepsilon$ qui dénote le langage engendré par g.

EXERCICE **6** :

a) Pour trouver l'automate simple associé à g, on peut décomposer la règle $S \rightarrow baA$ en deux règles :
$S \rightarrow bC$ et $C \rightarrow aA$ ; ou C est un nouveau non terminal.
On construit l'automate simple $\mathcal{A}$ équivalent en associant un état de l'automate à chaque non-terminal, cet état sera final lorsque le non-terminal associé produit ε. Les transitions de $\mathcal{A}$ seront déduites à partir des règles de productions de g.




b) Le système d'équations régulières associé à $\mathcal{A}$ :

$$\begin{cases} X0 = a.X0 \cup b.X1 \cup \varepsilon \\ X1 = a.X2 \\ X2 = a.X2 \cup b.X3 \cup \varepsilon \\ X3 = c.X3 \cup a.X2 \end{cases}$$

c) Pour trouver l'expression régulière qui dénote $L(\mathcal{A})$, on résout le système de la question b) pour trouver la valeur de X0.
De la quatrième équation on a : $X3 = c^*.a.X2$ ; on remplace dans la troisième :
$X2 = a.X2 \cup b.c^*.a.X2 \cup \varepsilon = (a \cup b.c^*.a).X2 \cup \varepsilon$ qui se résout avec $X2 = (a \cup b.c^*.a)^*$.
On remplace dans la deuxième : $X1 = a.(a \cup b.c^*.a)^*$. Puis dans la première :
$X0 = a.X0 \cup b.a.(a \cup b.c^*.a)^* \cup \varepsilon$. Et on obtient ainsi la solution : $X0 = a^*.(b.a.(a \cup b.c^*.a)^* \cup \varepsilon)$.
Donc $L(\mathcal{A})$ est dénoté par l'expression régulière : $a^*.ba.(a \cup b.c^*.a)^* \cup a^*$.

-------------------------- Fin du corrigé de la série 3 de ThL --------------------------