الجزء الأول المنطق

يعتمد الجبر كموضوع من مواضيع الرياضيات على براهين، مجردة في أغلب الأحيان؛ ونظرا لدرجة تعقيد البراهين يمكن للإنسان أن يتخذ مسارا غير سليم فيكون برهانه عرضة لأخطاء. لحماية البرهان يجب أن نكون على دراية ببعض القواعد لاتخاذ المسار السليم له. جملة هذه القواعد نسميها المنطق. لذا يجب التطرق لبعض المفاهيم الضرورية.

القضية: نسمي قضية كل عبارة تحتمل الصحة أو الخطأ، مثلا " $3 < 5$ " هي قضية صحيحة لكن " $5 < 2$ " هي قضية خاطئة.

نصادف خلال الاستدلال قضايا مركبة مكونة من مزيج من قضايا بسيطة. عادة ما تشتمل القضايا على متغيرات، بطبيعة الحال تكون هذه القضايا صحيحة من أجل قيم معينة للمتغيرات وخاطئة من أجل قيم أخرى؛ مثلا من أجل المتغير الصحيح $x \in Z$ القضية " $x > 0$ " صحيحة من أجل كل الأعداد الصحيحة الموجبة تماما وخاطئة من أجل كل الأعداد الصحيحة السالبة أو المعدومة.

نفي القضية: نفي القضية " p " هي قضية نرمز لها بـــ " $\neg p$ " تكون صحيحة لما p خاطئة وخاطئة لما p صحيحة.

مثال: من أجل $x \in Z$. إذا وضعنا p هي القضية " $x > 0$ " يصبح $\neg p$ نفي p هو القضية " $x \leq 0$ ".

ويمكن تلخيص هذا الوضع في الجدول الموالي الذي نسميه جدول الحقيقة:

p	$\neg p$
1	0
0	1

أين يرمز 1 لصحة القضية و 0 لخطئها.
لاحظ، من الجدول، أن القضية $\neg(\neg p)$ (نفي نفي القضية) هي القضية p نفسها.

وصل قضيتين: وصل القضيتين p و q هو قضية نرمز لها بـــ $p \wedge q$ وهي صحيحة إذا وفقط إذا كانت p و q صحيحتين وخاطئة إذا كانت واحدة منهما على الأقل خاطئة.

إذا كان وصل قضيتين خاطئا دوما نقول عن القضيتين أنهما غير منسجمتين (أو متناقضتان).

مثال: من أجل المتغير الحقيقي $x \in IR$ لدينا القضيتان " $x \geq 5$ " و " $x < 3$ " غير منسجمتين.

من أجل أي قضية p، اعتبارنا أن القضية $p \wedge (\neg p)$ دوما خاطئة يسمى مبدأ عدم التناقض.

فصل قضيتين: فصل القضيتين p و q هو قضية نرمز لها بـــ $p \vee q$ وهي صحيحة إذا وفقط إذا كانت إحدى القضيتين على الأقل p أو q صحيحة، خاطئة في الحالات الأخرى (أي لما تكون p و q خاطئتين معا).

مثال: من أجل المتغير الصحيح x، لدينا القضية " $x \leq 0 \ \vee \ x \geq 5$" صحيحة لما $x \in \{5,6,7,\ldots\}$ أو كان $x \in \{0,-1,-2,\ldots\}$ وتكون خاطئة فقط لما $x \in \{1,2,3,4\}$.

الاستلزام: لتكن القضيتين p و q.

نسمي القضية $\neg p \vee q$ استلزاما ونعبر عنه بـــ $p \Rightarrow q$ (ونقرأ p يستلزم q).

أي أن صحة p تستوجب حتما صحة q.

التكافؤ: نقول عن قضيتين p و q إنهما متكافئتان إذا كانت p تستلزم q و q تستلزم p ونعبر عنه بـــ $p \Leftrightarrow q$.

وهذا يعني أن p و q صحيحتان معا أو خاطئتان معا.

على سبيل الاستنتاج مثلا، من أجل أي قضيتين p و q لدينا:

- $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

يمكن تلخيص ما سبق في جدول نسميه **جدول الحقيقة**، من أجل أي قضيتين p و q، كما يلي:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

للتأكد من صحة أو خطإ قضية ما يمكن استعمال جدول الحقيقة، فبذلك يمكن التأكد من أن:

- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

وكذلك، باستعمال جدول الحقيقة يمكن التأكد مما يلي:

من أجل ثلاث قضايا p, q, r لدينا:

1. **توزيع الفصل على الوصل:** $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
2. **توزيع الوصل على الفصل:** $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(بالنسبة لـــ 1. يشتمل جدول القيم على ثمانية أسطر حسب صحة (=1) أو خطإ (=0) كل قضية؛ أما الأعمدة فعددها ثمانية، عمود لكل من القضايا

$p, q, r, p \vee q, p \vee r, q \wedge r, p \vee (q \wedge r), (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ثم تتم المقارنة بين العمودين الأخيرين، فهما متطابقان).

الاستدلال (أو البرهان): نقصد به، انطلاقا من معطيات معينة وبسلسلة من الاستلزامات نتوصل إلى نتيجة مطلوبة مسبقا. هناك أنواع للاستدلال.

الاستدلال بالنقيض: في أحيان كثيرة نصادف قضايا يصعب إثبات صحتها ببرهان مباشر، لاشتمالها مثلا على حالات كثيرة يتطلب الأمر مناقشتها كلها، لذا نلجأ لطريقة برهان غير مباشر نسميه "البرهان بالنقيض" وتتلخص فيما يلي:

نريد إثبات صحة القضية p.

نعتبر (أي نفرض) صحة نفيها $\neg p$؛ بالاعتماد على المعطيات المتوفرة وخطوات منطقية (سلسة من الاستلزامات) نتوصل إلى صحة قضية $\neg q$ حيث نعرف مسبقا أن القضية q صحيحة، وبالتالي نكون قد أثبتنا الاستلزام $\neg p \Rightarrow \neg q$.

من فرضية $\neg p$ صحيحة نستنتج أن $q \wedge \neg q$ صحيحة.

ونعلم أن q و $\neg q$ متناقضتان (مبدأ عدم التناقض) نقول حينئذ إن هناك تناقض، لهذا نستنتج أن $\neg p$ غير صحيحة وبالتالي صحة p.

مثال: لإثبات القضية $(p \Rightarrow q)$ يمكن الانطلاق من القضية $\neg(p \Rightarrow q)$ أي $p \wedge \neg q$ والوصول إلى تناقض. وبذلك تكون القضية $(p \Rightarrow q)$ صحيحة.