أنواع التطبيقات:

ليكن f تطبيقا لمجموعة غير خالية E في مجموعة غير خالية F.

سوف نقوم في هذه الفقرة بإعطاء الشروط التي يجب أن تتحقق كي يكون التطبيق f متباينا، غامرا أو متقابلا، كما ننص بعض النظريات ثم نقوم بإثباتها، وأخيرًا نسرد مثالا توضيحيا لذلك.

التطبيق المتباين (أو التباين): يكون التطبيق f **متباينًا** إذا و فقط إذا كان لكل عنصرين مختلفين من المجموعة E صورتان مختلفتان في المجموعة F، و هو ما يعني بالضبط أنه إن كانت لعنصر ما من المجموعة F، سابقة من المجموعة E، فهي وحيدة. أي أن:

f متباين $\Leftrightarrow \forall\, x, x' \in E : \left[x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\right]$

$\Leftrightarrow \forall\, x, x' \in E : \left[f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\right]$

التطبيق الغامر (أو الغمر): يكون التطبيق f **غامرًا** إذا و فقط إذا كان كل عنصر من المجموعة $y \in F$ هو صورة وفق التطبيق f لسابقة على الأقل $x \in E$، أي أن:

f غامر $\Leftrightarrow \left[\forall\, y \in F \;\; \exists\, x \in E : \;\; y = f(x)\right]$

التطبيق التقابلي (أو التقابل): يكون التطبيق f **تقابليًا** إذا و فقط إذا كان كل عنصر y من المجموعة F هو صورة وفق التطبيق f لعنصر وحيد x من المجموعة E، وهو ما يعني بالضبط أن f متباين وغامر في آن واحد، أي أن:

f تقابل $\Leftrightarrow \left[\forall\, y \in F : \exists!\, x \in E, \;\; y = f(x)\right]$

$\Leftrightarrow$ f غامر و متباين

(العبارة $\exists!\, x \in E$ تعني يوجد x من E وحيد).

الصورة المباشرة والصورة العكسية وفق تطبيق: ليكن f تطبيقا من مجموعة غير خالية E نحو مجموعة غير خالية F، وليكن A جزءا من المجموعة E.

نسمي **الصورة المباشرة** للمجموعة A وفق التطبيق f، المجموعة التي نرمز لها بالرمز $f(A)$ والمعرفة بـــ $f(A) = \left\{ f(x) : \; x \in A \right\}$ لما $A \neq \phi$ و $f(\phi) = \phi$.

لاحظ أنه لدينا دوما: $f(A) \subset F$ و $f(A) \neq \phi$ حيث $A \neq \phi$.

وبصفة خاصة نضع $f(E) = \operatorname{Im} f$ ونسميها **صورة** f.

ملاحظة: لدينا دوما $f(E)\subset F$. وإذا كان f غامرا، فمن التعريف لدينا $F\subset f(E)$. وبالتالي قولنا f غامر يعني أن: $f(E)=F$.

يمكن تعريف علاقة من F نحو E (ليست بالضرورة تطبيقا) تتعلق بـــ f نرمز لها بـــ f^{-1} .

من أجل كل جزء غير خالي B من F نسمي **الصورة العكسية** لـــ B بـــ f المجموعة:

$$E'=\{x\in E: f(x)\in B\}$$

تعرف الصورة العكسية حتى وإن كان f ليس متقابلا. ولغرض تضمين الكتابة المحتوى الرياضي نرمز بـــ $E'=f^{-1}(B)$.

من أجل كل جزء X من E. لاحظ أن $f(X)$ خالية إذا وفقط إذا كانت X خالية. خلافا لهذا، يمكن أن تكون $f^{-1}(Y)$ خالية دون أن تكون Y ($Y\subset F$) خالية.

ملاحظة: إذا كان $f:E\to F$ تطبيقا (ليس بالضرورة تقابلا).
من أجل $x\in E,\ y\in F$ ، المجموعة $\{f(x)\}$ بها عنصرا وحيدا لكن $f^{-1}(\{y\})$ هي مجموعة يمكن أن تكون خالية أو بها أكثر من عنصر.

نظرية1.4: ليكن f تطبيقا لمجموعة غير خالية E نحو مجموعة غير خالية F، عندئذ فإنه:
حتى يكون التطبيق f تقابلا يلزم و يكفي أن يوجد تطبيق وحيد g، $g:F\to E$ بحيث:

$$g\circ f=Id_E \quad \text{و} \quad f\circ g=Id_F .$$

البرهان:
لزوم الشرط: لنفرض أن التطبيق f تقابل، ولنضع $B=\{f(x):\ x\in E\}$ ، عندئذ لاحظ أن $B=F$ لأن التطبيق f غامر. لنعرف الآن g كما يلي:

$$\begin{aligned} g: B &\longrightarrow E \\ f(x) &\mapsto x \end{aligned}$$

أولا: g معرف جيدا: (واضح تماما من تعريف المجموعة B).

ثانيا: g تطبيق: ليكن العنصرين $f(x)$ و $f(x')$ من المجموعة B بحيث $f(x)=f(x')$ و $x,x'\in E$ ، عندئذ لكون f متباينا ينتج أن: $x=x'$ ، أي أن $g(f(x))=g(f(x'))$ ، وهو ما يعني أن g تطبيق.

ثالثا: لنعين تركيب التطبيقين g و f:

لدينا: (لكون $f(x) \in B = F$) $\forall x \in E : (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x = Id_E(x)$.

من جهة أخرى: ليكن $y \in F$ ، عندئذ لكون التطبيق f غامرا فإنه: $\exists x \in E : y = f(x)$.

و منه: $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(g(f(x))) = f(x) = y = Id_F(y)$.

إذن أثبتنا وجود تطبيق g يحقق: $g \circ f = Id_E$ و $f \circ g = Id_F$.

والآن سوف نثبت وحدانية التطبيق g :

لنفرض وجود تطبيق آخر h يحقق:

$h : F \to E$ ، $h \circ f = Id_E$ و $f \circ h = Id_F$.

عندئذ، نجد: $h = h \circ Id_F = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = Id_E \circ g = g$ ،

وهذا ما يثبت وحدانية التطبيق g المطلوب.

كفاية الشرط: لنفرض أنه يوجد تطبيق وحيد g، $g : F \to E$ بحيث $g \circ f = Id_E$ و $f \circ g = Id_F$ ،

و لنبين أن التطبيق f تقابل حيث $f : E \to F$.

ليكن $y \in F$ ، بما أن $f \circ g = Id_F$ فإن $(f \circ g)(y) = y$ أي أن $f(g(y)) = y$.

وبوضع $g(y) = x \in E$ ، ينتج أن $\exists x \in E : f(x) = y$ ، و هو ما يعني أن التطبيق f غامر.

من جهة أخرى، ليكن العنصرين $x, x' \in E$ بحيث $f(x) = f(x')$ ، عندئذ بما أن g تطبيق فرضا، فإنه ينتج أن: $g(f(x)) = g(f(x'))$ أي أن: $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ ، ولكن من الفرض $g \circ f = Id_E$ ، نحصل على أن: $x = x'$ ، و هو ما يثبت أن التطبيق f متباين.

إذن التطبيق f تقابل.

تسمية: يدعى التطبيق الوحيد g الذي يحقق المساواتين السابقتين " **التطبيق العكسي** للتطبيق f "، و يرمز له بالرمز f^{-1} أي أن $g = f^{-1}$.

نظرية2.4: لتكن A, B, C ثلاث مجموعات غير خالية و $g : A \to B, f : B \to C$ تطبيقين تقابليين.

عندئذ فإن التطبيق $f \circ g$ تقابلي و لدينا $(f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})$.

البرهان: إن $f \circ g : A \to C$ تطبيق.

ليكن $z \in C$. لكون التطبيق f غامرًا يوجد $y \in B$ بحيث $z = f(y)$.

وبما أن التطبيق g غامر فإن: $\exists x \in A : y = g(x)$.

و منه: $\exists x \in A : z = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$.

أي أن التطبيق $f \circ g$ غامر.

ومن جهة أخرى، لدينا:

$$\forall x, x' \in A : (f \circ g)(x) = (f \circ g)(x') \Rightarrow f(g(x)) = f(g(x'))$$

$$\Rightarrow g(x) = g(x') \quad \text{(لأن التطبيق } f \text{ متباين)}$$

$$\Rightarrow x = x' \quad \text{(لأن التطبيق } g \text{ متباين)}$$

و هذا يعني أن التطبيق $f \circ g$ متباين، إذن فهو تقابل.

و لكون التطبيق $f \circ g$ تقابلاً، فإنه يقبل تطبيقا عكسيا $(f \circ g)^{-1}$ معرفا بـــ: $(f \circ g)^{-1} : C \to A$.

ولدينا:

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = (f \circ Id_B) \circ f^{-1} = (f \circ f^{-1}) = Id_C$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = (g^{-1} \circ Id_B) \circ g = (g^{-1} \circ g) = Id_A$$

و هذا يعني أن التطبيق $g^{-1} \circ f^{-1}$ هو التطبيق العكسي للتطبيق $f \circ g$، أي أن:

$$(f \circ g)^{-1} = (g^{-1} \circ f^{-1})$$

ملاحظة: لاحظ أن الشرط "fتقابلي" هو شرط أساسي و ضروري لوجود التطبيق العكسي للتطبيق f.

مثال: لتكن f، g و f_1 ثلاثة تطبيقات معرفة بالشكل:

$$f : IR \longrightarrow IR_+ \quad x \mapsto x^2 \quad ، \quad g : IR_+ \longrightarrow IR_+ \quad x \mapsto \sqrt{x} \quad و \quad f_1 : IR_+ \longrightarrow IR_+ \quad x \mapsto x^2$$

نلاحظ أن التطبيق f_1 هو اقتصار للتطبيق f على المجموعة IR_+.

التطبيق f ليس متباينا لأنه مثلا $4 = f(2) = f(-2)$ و لكن $IR \ni -2 \neq 2 \in IR$.

التطبيق f غامر لأنه من أجل كل عنصر $y \in IR_+$ ، يوجد مثلا العنصر $x = -\sqrt{y} \in IR$ يحقق:

$$f(x) = f(-\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 = y$$

ومنه ينتج أن التطبيق f ليس تقابلا.

من جهة أخرى لدينا: $\forall x \in IR_+ : (f_1 \circ g)(x) = f_1\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x = Id_{IR_+}(x)$

وكذلك: $\forall x \in IR_+ : (g \circ f_1)(x) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = |x| = x = Id_{IR_+}(x)$

وهو ما يعني أن التطبيقين g و f_1 تقابليان وأن أحدهما هو التابع العكسي للآخر.

هذا المثال يوضح أنه قد يكون تطبيق ما تقابلا، دون أن يكون تمديده كذلك.

هناك حالة خاصة، لكي يكون تطبيق ما تقابلا، يكفي أن يكون متباينا أو غامرا.

نظرية3.4: لتكن E و F مجموعتين منتهيتين بكل واحدة منهما n عنصرا، $n \geq 1$. و f تطبيق من E نحو F.

عندئذ فإن القضايا التالية متكافئة:

1. f متباين 2. f غامر 3. f متقابل.

البرهان:

يكفي إثبات 1. تكافئ 2.

لدينا التطبيق: $f: E \to F$.

– لنفرض أن: 1. محققة.

من تباين التطبيق f ، لدينا عدد عناصر $f(E)$ هو n (أي أن: $|f(E)| = n$)،

وبما أن: $f(E) \subseteq F$ و $|F| = n$ فإن $f(E) = F$ وهذا معناه أن f غامر، ومنه 2. محققة.

– لنفرض الآن أن 2. محققة.

(بالنقيض) نفرض جدلاً أن f ليس متباينًا، إذن يوجد على الأقل عنصران مختلفان x و y من E،

بحيث: $f(x) = f(y)$ ، و منه $|f(E)| \leq n-1$ ، و لكن f غامر (فرضًا) أي أن: $f(E) = F$ ، وبالتالي

نستنتج أن: $n = |F| = |f(E)| \leq n-1$ وهذا تناقض.

الخلاصة: الفرضية غير صحيحة، ومنه 1. صحيحة.