ملاحظات:

1. تقاطع عائلة من الزمر الجزئية هو زمرة جزئية.
2. اتحاد زمرتين جزئيتين ليس بالضرورة زمرة جزئية. مثلا، $3Z$ و $8Z$ (مضاعفات 3 و 8 في Z) زمرتان جزئيتان من $(Z,+)$ لكن اتحادهما ليس كذلك لأن 3 و 8 من الاتحاد ولكن 3+8 لا ينتمي إلى الاتحاد.
3. رغم كون $H=\{-1,1\}$ جزء من Z و H لها بنية زمرة (ضربية) لكنها ليست زمرة جزئية من Z لأن Z ليست زمرة بالنسبة لعملية الضرب.

تماثل الزمر

عادة نستعمل التطبيقات للتعرف عما إذا كانت مجموعة ما لها نفس خواص مجموعة أخرى معطاة، الخواص تمثل أساسا البنية الجبرية.

تماثل بين الزمرتين من $(G,\cdot)$ نحو $(G',*)$، هو كل تطبيق $f:G\to G'$ يحقق $\forall x,y\in G:\quad f(x\cdot y)=f(x)*f(y)$.

كل تماثل زمر تقابلي نسميه **تشاكل** زمر.

يحفظ تماثل الزمر البنية الجبرية، أي أنه ينقل زمرة جزئية من زمرة البدء إلى زمرة جزئية أخرى من زمرة الوصول، تطبيق كيفي بين زمرتين ليس له بالضرورة هذه الخاصية.

مثال: التطبيق $f:(IR,+)\to(IR^*,\cdot)$ بين الزمرة الجمعية للأعداد الحقيقية $(IR,+)$ والزمرة الضربية $(IR^*,\cdot)$ والمعرف بـــ $\forall x\in IR:\ f(x)=2^x$ يحقق:
$\forall x,y\in IR:\ f(x+y)=2^{x+y}=2^x\cdot 2^y=f(x)\cdot f(y)$، لذلك فهو تماثل زمر.

ملاحظة: باستعمال التعريف يمكن إثبات أن تركيب تماثلين هو تماثل، والتطبيق العكسي لأي تشاكل هو تشاكل .

خواص التماثلات

نظرية2.1: لتكن G,G' زمرتين ضربيتين و e,e' العنصرين الحياديين لـــ G,G' على الترتيب.

من أجل كل تماثل زمر $f:G\to G'$ لدينا الخواص التالية :

1. $f(e)=e'$.
2. $\forall x\in G:\quad f(x^{-1})=\left(f(x)\right)^{-1}$.
3. $\forall x\in G,\forall n\in\mathbb{Z}:\quad f(x^{n})=\left(f(x)\right)^{n}$.
4. إذا كانت H زمرة جزئية من G فإن $f(H)$ زمرة جزئية من G'
(الصورة المباشرة لزمرة جزئية بواسطة تماثل، هي زمرة جزئية كذلك).
5. إذا كانت H' زمرة جزئية من G' فإن $f^{-1}(H')$ زمرة جزئية من G.
(الصورة العكسية لزمرة جزئية بواسطة تماثل هي زمرة جزئية أيضا).

البرهان: بالنسبة لـــ 1. في الزمرة G' لدينا: $f(e)=f(e\cdot e)=f(e)\cdot f(e)$ لذلك $f(e)=e'$.

بالنسبة لـــ 2. ليكن $x\in G$. من 1. وكون f تماثلا لدينا:

$$f(x)\cdot f(x^{-1})=f(x\cdot x^{-1})=f(e)=e'=f(e)=f(x^{-1}\cdot x)=f(x^{-1})\cdot f(x)$$

وهذا يعبر على أن نظير $f(x)$ هو $f(x^{-1})$ أي $f(x^{-1})=\left(f(x)\right)^{-1}$.

بالنسبة لـــ 3. ليكن $x\in G$ و n عددا صحيحا. لما n موجب نستعمل كون f تماثلا ولما n سالب نستعمل كون f تماثلا و 2. المثبتة.

الخاصية 4. نتركها للقارئ كتمرين، فهي تثبت باستعمال التعاريف فقط، ونثبت الخاصية 5.

لدينا تعريفا: $f^{-1}(H')=\{x\in G: f(x)\in H'\}\subseteq G$

من 1. لدينا $f(e)=e'\in H'$ ومنه $e\in f^{-1}(H')$ وبالتالي $f^{-1}(H')\neq\phi$.

من أجل $x,y\in f^{-1}(H')$ لدينا $f(x),f(y)\in H'$: وبما أن H' زمرة جزئية من G' وكون f تماثلا وباستعمال 2. نستنتج أن: $f(xy^{-1})=f(x)f(y^{-1})=f(x)\left(f(y)\right)^{-1}\in H'$

وبالتالي $xy^{-1}\in f^{-1}(H')$ ومن هذا 5. محقق.

نتيجة3.1: ليكن f تماثلا بين الزمرتين G,G' . لدينا:

1. $f(G)$ زمرة جزئية من G' .
2. $f^{-1}(\{e'\})$ زمرة جزئية من G.

البرهان : يكفي تطبيق النظرية2.1، بأخذ $H=G$ في 4. و $H'=\{e'\}$ في 5.

إن الزمرتين الواردتين في النتيجة زمرتان خاصتان لهما أدوار مهمة في تعيين طبيعة التطبيق f وتعرفان بالتسميتين:

$Imf=f(G)=\{f(x)\in G':\ x\in G\}$ ونسميها صورة f.

و $Ker f=\{x\in G:\ f(x)=e'\}=f^{-1}(\{e'\})$ ونسميها نواة f.

e العنصر الحيادي لـــ G و e' العنصر الحيادي لـــ G'.

نظرية4.1: ليكن f تماثلا بين الزمرتين G,G' لدينا:

1. f غامر إذا وفقط إذا $Imf=G'$.
2. f متباين إذا وفقط إذا $Ker\,f=\{e\}$ (e العنصر الحيادي لـــ G).

البرهان: 1. محققة من تعريف غمر التطبيق f.

بالنسبة لـــ 2. نفرض أن f متباين. وليكن $x\in Ker\,f$ إذن $f(x)=e'$ (e' العنصر الحيادي لـــG')؛ من كون $f(e)=e'$ و f متباينا فإن $x=e$ وبالتالي $Ker\,f\subseteq\{e\}$ ومن كون $Ker\,f$ زمرة جزئية من G نستنتج أن $Ker\,f=\{e\}$.

عكسيا، ليكن x و y من G بحيث $f(x)=f(y)$ ؛ بتطبيق خواص التماثلات على المساواة الأخيرة نحصل على $f(xy^{-1})=f(x)\left(f(y)\right)^{-1}=e'$،

أي $xy^{-1}\in Kerf=\{e\}$ ومن هذاينتج أن $x=y$ وبالتالي f متباين.