تمارين الفصل II.

تمرين1: نعرف في مجموعة الأعداد الصحيحة Z العملية الداخلية:

$\forall x, y \in Z : x * y = x - y$.

1. هل العملية $(*)$ تبديلية؟
2. بين أنه في $(Z,*)$ يوجد e بحيث $\forall x \in Z : \ x * e = x$ (e حيادي من اليمين).
3. هل e حيادي؟
4. هل يوجد، من أجل كل $x \in Z$، عنصر $x' \in Z$ بحيث $x * x' = e$ (نظير من اليمين)؟

تمرين2: في الزمرة الجمعية Z نضع المجموعة $nZ = \{nk : k \in Z\}$. اثبت أن nZ زمرة جزئية من Z بالنسبة لعملية الجمع. (n عدد طبيعي كيفي).

تمرين3: ليكن p عددا طبيعيا أوليا. نضع $Q_p = \left\{ \frac{a}{p^n} : \ a \in Z, n \in IN \right\}$.

1. اثبت أن Q_p زمرة بالنسبة لعملية الجمع.
2. اثبت أن التطبيق $\varphi : Q_p \to Q_p$ المعرف بـــ $x \mapsto px$ تقابل. هل φ تماثل زمر.

(إرشاد: يكفي إثبات أن Q_p زمرة جزئية من $(Q,+)$ (Q زمرة الأعداد الناطقة)).

تمرين4: لتكن C^* زمرة الأعداد المركبة غير المعدومة بالنسبة لعملية الضرب والعدد الطبيعي n.

نضع $H = \{z \in C^* : \ z^n = 1\}$.

1. اثبت أن H زمرة جزئية من C^*.
2. عين قيمة n التي تكون من أجلها H هي C^*.
3. عين قيم n التي يكون من أجلها عدد عناصر H هو n.

في هذه الحالة عين عنصرا $a \in H$ بحيث $\forall z \in H \ \exists k \in IN : z = a^k$.

(لدينا $z^n - 1$ هو كثير حدود على C، درجته n إذن يقبل على الأكثر n جذرا.

جذوره هي: $z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(0 \le k \le n-1)$، $(i^2 = -1)$.

3. قيم n المطلوبة هي كل عدد طبيعي غير معدوم، العنصر المطلوب هو $a = z_1$).

تمرين5: لتكن E مجموعة غير خالية ونعرف على $P(E)$، مجموعة أجزاء E، العملية التالية:

$X, Y \in P(E) : \quad X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ (الفرق التناظري)

1. اثبت أن $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.
2. أثبت أن $(P(E), \Delta)$ زمرة تبديلية.

(إرشاد: استعن بتمارين الفصل I. العنصر الحيادي لـــ $P(E)$ هو المجموعة الخالية. نظير X من $P(E)$ هو X).

تمرين6: لتكن E مجموعة غير خالية مزودة بعمليتين داخليتين، إحداهما ضربية والأخرى نرمز لها بـــ (*) لنفرض أن كل عملية تتمتع بعنصر حيادي e بالنسبة للضرب و e' بالنسبة لـــ (*) كما نفرض أن:

$$\forall x,y,u,v \in E:\quad (x*y)(u*v)=(xu)*(yv)$$

أثبت أن:

1. $e=e'$
2. $xy=x*y$
3. العمليتين تبديليتان وتجميعيتان.

الحل: ليكن $x,y,z \in E$:

1. لدينا العنصران الحياديان $e,e' \in E$ يحققان : $e*e'=e'*e$ وبالتالي باستخدام الخاصية أعلاه :

$$e'=e'*e'=(e'e)*(ee')=(e'*e)(e*e')=(e*e')(e*e')=(ee)*(e'e)=e*e'=e.$$

2. $xy=(x*e)(e*y)=(xe)*(ey)=x*y.$

3. التبديل: باستخدام 1. و 2. يكفي إثبات ذلك بالنسبة لإحدى العمليتين فقط.

$$xy=(e*x)(y*e)=(ey)(xe)=yx.$$

التجميع: باستخدام 1. و 2. ينتج :

$$(xy)z=(x*y)(e*z)=(xe)*(yz)=x(yz).$$

تمرين7: لتكن المجموعة $G=Q^2-\{(0,0)\}$ (Q هي مجموعة الأعداد الناطقة) مزودة بالعملية التالية :

$$x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2):\ x*y=(x_1y_1-x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1).$$

1. بين أن $(G,*)$ زمرة تبديلية.
2. هل $G\cap\mathbb{Z}^2$ زمرة جزئية من G؟

الحل:

1. واضح أن $G\neq\phi$ وأن العلاقة $(x,y)\mapsto x*y,\quad G\times G\to G$ هي تطبيق وبالتالي العملية (*) داخلية في G. كما يمكن التأكد أن العملية تجميعية وتبديلية (تأكد من ذلك).

العنصر الحيادي والنظير:

ليكن $x=(x_1,x_2),\quad y=(y_1,y_2)\in G$ بحيث :

$$x*y=(x_1y_1-x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1)=z=(z_1,z_2)$$

أي:
$$\begin{cases} x_1y_1 - x_2y_2 = z_1 \\ x_1y_2 + x_2y_1 = z_2 \end{cases}$$

باعتبار y مثبتا و x مجهولا فإن محدد الجملة هو: $d = y_1^2 + y_2^2$.

بما أن $y \neq (0,0)$ فإن $d \neq 0$. الحل الوحيد للجملة هو: $x_1 = \dfrac{z_1y_1 + z_2y_2}{d}$, $x_2 = \dfrac{z_2y_1 - z_1y_2}{d}$

في الجملة السابقة، بأخذ $z = y$ نحصل على العنصر الحيادي $e = (e_1, e_2) = (1,0) \in G$؛

وبأخذ $z = e$ نحصل على x نظير y: نظير $y = (y_1, y_2)$ هو $y' = \left(\dfrac{y_1}{d}, \dfrac{-y_2}{d}\right)$

$y' \in G$ لأن $d \neq 0$. إذن G زمرة تبديلية.

2. $G' = G \cap \mathbb{Z}^2$ ليست زمرة جزئية من G لأن $x = (1,1) \in G'$ ونظيره هو $x' = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right) \notin G'$.

تمرين8: لتكن G زمرة، نرمز لعمليتها ضربيا، عنصرها الحيادي e تحقق الخاصية التالية:

(أ) $\forall x \in G: \quad x^2 = e$.

1. اعط مثالا عن زمرة تحقق الخاصية (أ).
2. بين أن كل زمرة تحقق الخاصية (أ) هي تبديلية.
3. نفرض أن عدد عناصر G منته وزوجي ونعرف فيها العلاقة R التالية:

$x, y \in G: \quad xRy \Leftrightarrow x = y \quad \vee \quad x = y^{-1}$.

تأكد من أن R علاقة تكافؤ، عين صف تكافؤ e.

ثم استنتج أنه يوجد x من G بحيث $x \neq e$ و $x^2 = e$.

الحل:

1. الزمرة الجمعية $\dfrac{Z}{2Z} = \{\dot{0}, \dot{1}\}$ صفوف تكافؤ الأعداد الصحيحة ترديد 2، عنصرها الحيادي هو صف الصفر، تحقق الخاصية (أ).

الزمرة الجمعية $\dfrac{Z}{2Z} \times \dfrac{Z}{2Z} = \{(\dot{0},\dot{0}), (\dot{0},\dot{1}), (\dot{1},\dot{0}), (\dot{1},\dot{1})\}$

عنصرها الحيادي هو $(\dot{0},\dot{0})$، تحقق أيضا الخاصية (أ).

2. نفرض أن زمرة ضربية G تحقق الخاصية (أ)، وليكن x و y من G.

من الخاصية (أ) لدينا: $x = x^{-1}, y = y^{-1}$.

وبما أن $yx \in G$ فإن $yx = (yx)^{-1}$ وبالتالي: $xy = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} = yx$.

ومنه العملية في G تبديلية.

3. إثبات كون العلاقة R تكافؤا نتركه للقارئ ونبحث عن صف تكافؤ العنصر الحيادي e، وليكن $\dot{e}$:
$\dot{e} = \{x \in G:\ xRe\} = \{x \in G:\ x = e \vee x = e^{-1}\} = \{e\}$.

إذن $\dot{e}$ به عنصر وحيد.

واضح أنه مهما كان x من G فإن صف تكافئه هو $\dot{x} = \{x, x^{-1}\}$ أي أن عدد عنصره إما 1 أو 2.

لو نفرض أنه لا يوجد x من G، $x \neq e$ بحيث $x^2 = e$. أي مهما كان $x \in G - \{e\}$ يحقق $x \neq x^{-1}$.

وبالتالي مهما كان $x \in G - \{e\}$ فإن عدد عناصر $\dot{x}$ هو 2؛ من هذا وكون عدد عناصر $\dot{e}$ هو 1 ومن كون مجموعة صفوف التكافؤ المختلفة تشكل تجزئة لـــ G، نستنتج أن عدد عناصر G فردي. وهذا يناقض الفرض. ومنه المطلوب.

تمرين9: لتكن G زمرة ضربية. والتطبيق $f : G \to G$ المعرف بـــ $x \mapsto x^{-1}$.

1. اثبت أن f تقابل.
2. اثبت أن: f تماثل إذا وفقط إذا كانت G تبديلية.

الحل: 1. التباين: ليكن x و y من G بحيث $f(x) = f(y)$. إذن $x^{-1} = y^{-1}$ (z^{-1} هو نظير z في G).
بتركيب x ثم y في طرفي المساواة ينتج $x = y$.

الغمر: بما أن G زمرة، فمن أجل كل b من G يوجد a من G بحيث $ba = e$ (e العنصر الحيادي في G)
أي $b = a^{-1} = f(a)$ وبالتالي f غامر. ومنه f تقابل.

2. لنفرض أن f تماثل ونثبت أن G تبديلية.

ليكن x و y من G. من كون $xy \in G$ و f تماثلا فإن: $(xy)^{-1} = f(xy) = f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1}$ أي $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1}$، بتركيب xy ثم yx في طرفي المساواة الأخيرة ينتج $xy = yx$. إذن G تبديلية.

عكسيا، لنفرض أن G تبديلية. ليكن x و y من G:

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y).$$

هذه المساواة تعبر على أن f تماثل.