

## Introduction à la Résistance des Matériaux

Version 0.1



## Avant propos

Qu'est-ce qui constitue un bon enseignement ? Cette question, quiconque se trouve en face d'un public pour faire passer un savoir se la pose. Évidemment, les enseignants. Mais aussi l'ensemble, la synergie entre les cours : si l'auditoire ne comprend pas ces synergies, il ne voit que des disciplines, n'a comme horizon indépassable que des examens. Et puis les étudiants, bien sûr ! Un cours c'est une interaction.

Pourquoi écrire cela en avant propos d'un cours de RDM ? Et bien pour celui qui, en plus de la RDM, matière de base, technique et peu propice aux grandes envolées théoriques, m'a fait comprendre ce qu'était une formation d'ingénieur et, corrolaire, m'a montré ce qu'était l'art d'enseigner.

A Rémi Henry, professeur à l'INSA de Lyon, « disparu trop », comme s'il pouvait en être autrement....



# Table des matières

1 - Généralités, définitions et principes.....	7
1.1 - Objectifs et limitations d'un cours de Résistance des Matériaux.....	7
1.1.1 - Objectifs.....	7
1.1.2 - Limitations.....	7
1.1.3 - Domaine d'utilisation.....	8
1.2 - Position d'un problème mécanique.....	8
1.3 - Définitions.....	8
1.3.1 - La structure.....	8
1.3.2 - Conditions aux limites.....	9
1.4 - Modélisation d'un montage.....	12
1.5 - Principes fondamentaux.....	15
1.5.1 - Principe de la coupe virtuelle.....	15
1.5.2 - Torseur résultant des efforts.....	16
1.5.3 - Éléments de réduction.....	17
1.6 - Conclusion et remarques : .....	18
1.7 - Exercices.....	19
2 - Position du problème d'élasticité (anisotrope).....	21
2.1 - Description des contraintes.....	21
2.1.1 - Définition des contraintes sur un volume élémentaire.....	21
2.1.2 - Contraintes principales.....	21
2.1.3 - Notations pour l'ingénieur.....	22
2.1.4 - Cercle de Mohr.....	22
2.2 - Description des déformations.....	23
2.2.1 - Déformations d'un volume élémentaire.....	23
2.2.2 - Définition des déformations.....	24
2.2.3 - Déformations principales.....	25
2.2.4 - Notations pour l'ingénieur.....	25
2.2.5 - Équations de compatibilité.....	25
2.3 - Relation contrainte / déformation.....	26
2.3.1 - Courbe expérimentale de chargement.....	26
2.3.2 - Loi de Hooke généralisée.....	27
2.3.3 - Relations de changement de base.....	28
2.3.4 - Caractérisation de matériaux.....	28
2.3.5 - Expression des constantes $C_{ij}$ d'un matériau orthotrope en fonction des paramètres de l'ingénieur.....	29
2.4 - Relation Fondamentale de la Dynamique.....	31
2.4.1 - Démonstration.....	31
2.4.2 - Énoncé.....	32
2.4.3 - Résolution du problème d'élasticité en petites déformations.....	32
2.4.4 - Méthodes variationnelles, méthode de Rayleigh-Ritz.....	33
3 - Théorie de poutres.....	34
3.1 - Étude d'une couche unique dans le cas d'un matériau orthotrope.....	34
3.1.1 - Contexte.....	34
3.1.2 - État de contraintes.....	34
3.1.3 - Lois de comportement.....	34
3.1.4 - Modules d'élasticité.....	35
3.2 - Expression des déformations dans le cadre de la théorie de poutres.....	35

3.2.1 - Développement limité des déplacements selon $x_2$ et $x_3$ .....	35
3.2.2 - Expression des déformations.....	36
3.3 - Expression des contraintes et des efforts résultants.....	37
3.3.1 - Expression des efforts résultants.....	37
3.3.2 - Loi de comportement d'une poutre.....	37
3.3.3 - Cas d'une poutre homogène.....	38
4 - Etude de sollicitations simples.....	40
4.1 - Traction.....	40
4.1.1 - Modélisation.....	40
4.1.2 - Cas des enveloppes minces.....	41
4.1.3 - Treillis articulé.....	41
4.1.4 - Équation de la Chaînette.....	44
4.1.5 - Exercices.....	46
4.2 - Cisaillement.....	47
4.2.1 - Modélisation.....	47
4.2.2 - Essais de cisaillement classiques.....	48
4.2.3 - Exercices.....	49
4.3 - Torsion.....	49
4.3.1 - Modélisation.....	49
4.3.2 - Exercices.....	51
4.4 - Flexion.....	52
4.4.1 - Modélisation.....	52
4.4.2 - Exemples.....	53
4.4.3 - Introduction du cisaillement.....	53
4.4.4 - Extension de la flexion plane sur poutre droites à faible courbure.....	55
4.4.5 - Exercices.....	55
5 - Approches énergétiques.....	57
5.1 - Principe.....	57
5.2 - Théorème de Maxwell Betti.....	58
5.2.1 - Coefficient d'influence.....	58
5.2.2 - Réciprocité.....	58
5.3 - Théorème de Castigliano.....	59
5.3.1 - Énoncé.....	59
5.3.2 - Calcul de déplacements.....	60
5.4 - Systèmes hyperstatiques.....	62
5.4.1 - Méthode générale.....	62
5.4.2 - Théorème de Menabrea.....	62
5.4.3 - Hyperstaticité interne.....	63
5.5 - Exercices.....	64
6 - Dimensionnement de structures élastiques.....	66
6.1 - Critères de Tresca et Von Mises.....	66
6.2 - Concentration de contraintes.....	66
6.3 - Problèmes d'endurance.....	66
6.4 - Flambement de structures.....	66
7 - Annexes.....	68
7.1 - Bibliographie.....	68

# 1 - Généralités, définitions et principes

## 1.1 - Objectifs et limitations d'un cours de Résistance des Matériaux

### 1.1.1 - Objectifs

- maîtriser une technique particulière : la résistance des matériaux est l'un des outils de base de l'ingénieur mécanicien. Elle permet la résolution à faible coût d'un très grand nombre de problèmes pratiques. Notons parmi ceux-ci :
  - dimensionnement de charpentes (lamellé-collé, acier, ...),
  - transport par câble : dimensionnement des cabines, des pylônes,
  - dimensionnement de structures de bâtiment ou de Génie Civil (en particulier BAEL),
  - conception d'essais de caractérisation mécanique.
- obtenir une image *vraisemblable* d'un résultat ; la notion de vraisemblance implique un savoir-faire et un jugement. Il est important de conforter les résultats obtenus à des essais expérimentaux ou, pour les zones les plus sollicitées, de compléter par un calcul de structure plus élaboré (Eléments Finis par exemple).
- Introduire une approche mécanicienne de la conception de produits. Le centre des préoccupations d'un mécanicien est la définition d'une pièce assurant une fonction mécanique (transmission d'un effort ou d'un déplacement) en travaillant à la fois sur la géométrie et le matériau qui le constitue. En particulier, dans ce cadre-là, le *matériau doit être le plus courant possible* (faible coût d'approvisionnement, mise en oeuvre éprouvée). L'approche mécanique de conception est un exemple typique d'optimisation sous contraintes. En fonction de chaque cas, il est important de bien dégager les contraintes et l'objectif visé.

### 1.1.2 - Limitations

Le problème mécanique posé dans un cadre général n'a pas de solution simple. L'équation différentielle le décrivant ne peut être résolu que par des méthodes numériques élaborées, sauf simplifications importantes de la géométrie et de la rhéologie. La RDM fournit des outils de résolution dans ce cadre-là. En particulier, on peut décrire le domaine d'application standard comme :

- structures élancées,
- problèmes unidimensionnels ou bidimensionnels,
- domaine élastique linéaire,
- matériaux homogènes.

Cependant, la démarche, si elle est bien comprise, peut être adaptée à une gamme de situations plus vastes, par exemple :

- bétons armés,
- matériaux élasto-plastiques parfaits,
- structures à fortes courbures,
- ...

### 1.1.3 - Domaine d'utilisation

Tel quel, un calcul de Résistance des Matériaux permet :

- le prédimensionnement de structures
- le prédimensionnement d'essais
- l'application de normes de calcul

## 1.2 - Position d'un problème mécanique

Sur le plan mathématique, un problème mécanique vise à la résolution simultanée d'un corpus d'équations regroupant :

- la Relation Fondamentale de la Dynamique

*Dans le cadre de la Résistance des Matériaux, on suppose en général un problème statique, soit :*

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$

- La loi de comportement donnée par l'expérience

*Le cadre de ce cours est l'élasticité linéaire, isotrope ou non.*

- Les conditions aux limites

Déplacement imposé  $\{\vec{u}_i\}_\Omega$

Contrainte imposée  $\{\vec{f}_i\}_\Omega$

*Dans le cadre de la Résistance des Matériaux, les contraintes sont réduites sous la forme d'un torseur au centre de gravité d'une section comprenant efforts et moments.*

- La continuité de la matière

l'expression de cette condition implique que les déformations dérivent d'un potentiel de déplacement.

*Dans le cadre de ce cours, les déformations sont petites et les déplacements sont suffisamment petits pour que l'état initial et l'état déformé soient confondus.*

A chaque étape, l'origine de ces hypothèses simplificatrices sera détaillée.

## 1.3 - Définitions

### 1.3.1 - La structure

#### a - Poutres

Le milieu d'étude est unidimensionnel : poutres, barres. Une poutre est un solide engendré par une surface plane  $S$  dont le centre d'inertie  $G$  décrit une courbe  $C$  de sorte que  $S \perp C$ .

$C$  est la ligne moyenne de la poutre.

Si cette ligne est une droite, la poutre est une **poutre droite**.

Si la courbe est dans le plan, on parle de **poutre à faible courbure** ou de poutre à forte courbure.

Si la courbe n'est pas inscrite dans un plan, la poutre est dite *gauche*.

La poutre est caractérisée par une variable spatiale dépendant d'un repère orthonormé ou cylindrique. La coordonnée  $s(x, y, z)$  ou  $s(r, \theta, z)$  devient  $x$  dans le cas des poutres droites.

La surface  $S$  peut être une surface pleine ou creuse. Les formes classiques sont :



### **b - Plaques et coques**

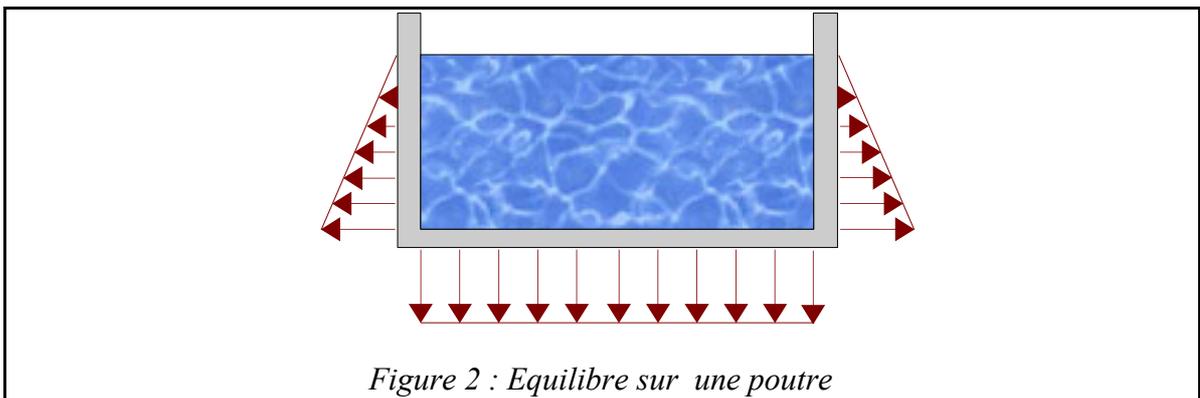
Les plaques et coques sont des structures dont 1 dimension est très faible devant les autres. Les plaques ont deux rayons de courbures très grands devant les autres dimensions. Au contraire, les coques ont un rayon de courbures au moins faible devant les autres dimensions. *De ce fait, l'état initial et l'état déformé ne sont pas identiques.*

## 1.3.2 - Conditions aux limites

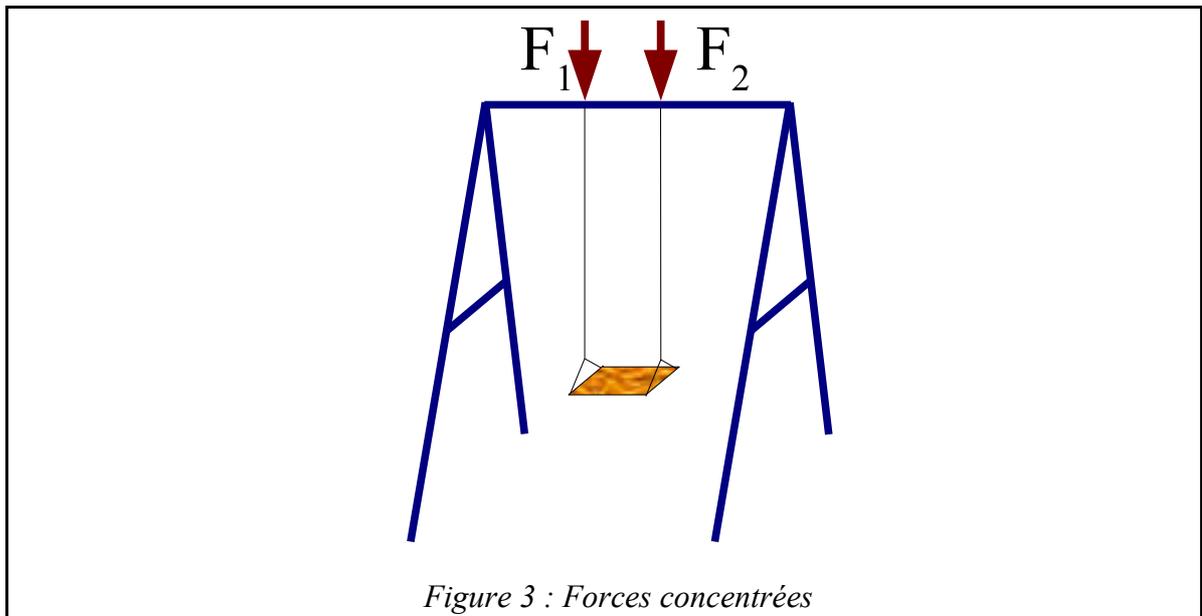
### **a - Dynamiques**

Ce cours de Résistance des Matériaux se concentre sur des problèmes statiques. Les forces ne dépendent donc pas du temps. On suppose également qu'il n'y a pas de force d'inertie (poids propre, forces centrifuges), sauf cas particulier spécifié.

- pression appliquée sur les surfaces

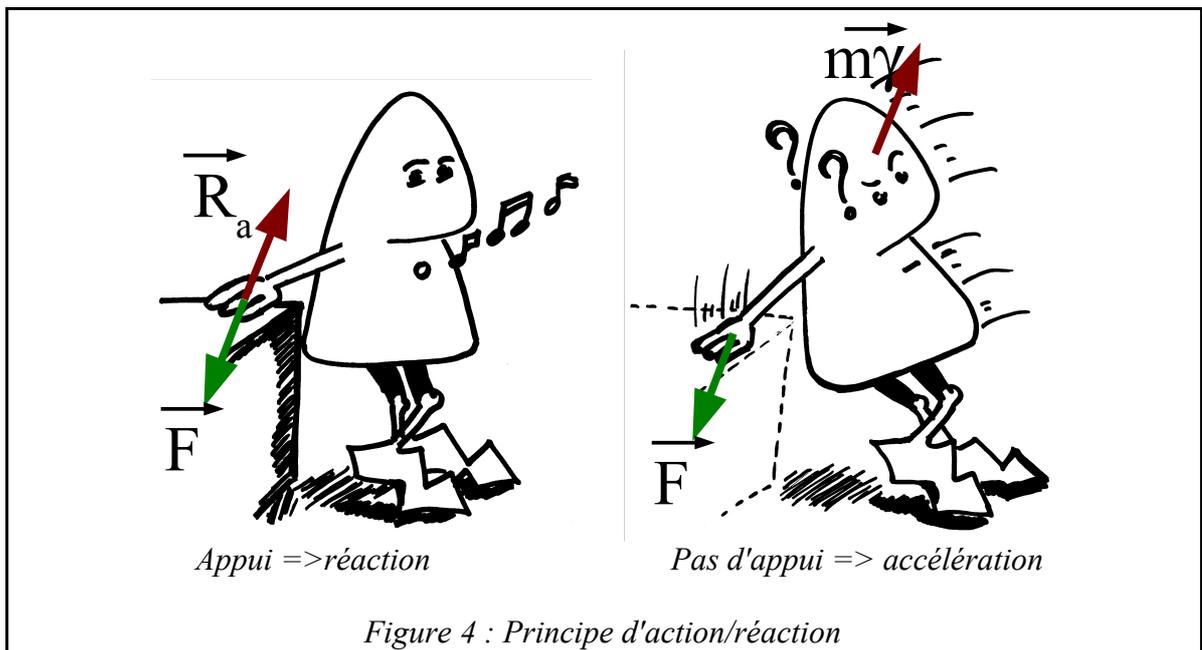


- effort concentré



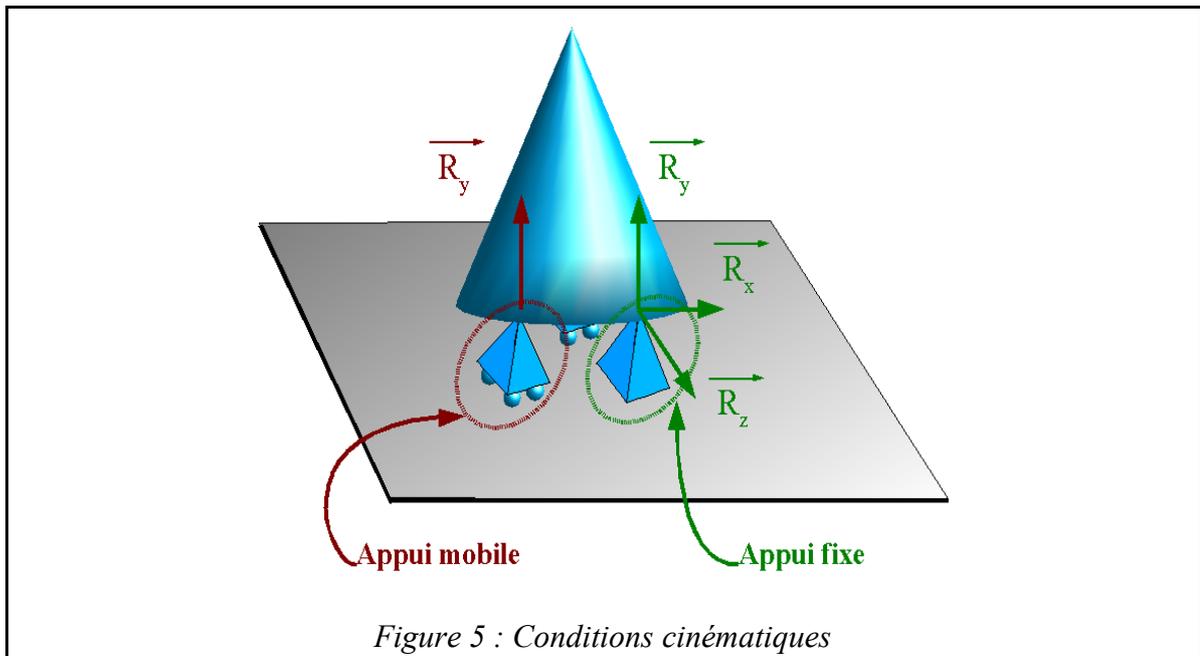
– forces de réaction

Les forces de réaction sont les forces exercées sur une pièce à sa frontière de sorte que cette pièce reste en équilibre. Elles sont le complément d'une condition aux limites en déplacement. Les forces de réaction sont liées aux conditions de contact (adhérence-glissement) ; de ce point de vue là, on remarquera, sans y entrer, la complexité et la richesse des situations mécaniques liées aux contacts.



**b - Cinématiques**

Les conditions présentées ci-dessous sont des conditions idéales. Elles doivent être critiquées au cas par cas dans les situations réelles :



Appui mobile :

Inconnue dynamique : la force de réaction normale au plan  $R_y$ ,

Inconnues cinématiques : deux déplacements dans le plan tangent  $U_x$  et  $U_z$ .

3 rotations  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  et  $\phi_z$

Exemple de système : butée plane ; plan à frottement nul ou négligeable

Articulation (appui fixe) :

Inconnues dynamiques : force de réaction normale  $R_y$ , + deux forces tangentielles  $R_x$  et  $R_z$ .

Souvent, les forces tangentielles sont réductibles à une seule pour un système planaire.

Inconnues cinématiques : trois rotations  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  et  $\phi_z$ .

Exemple de système : appui sur un plan adhérent, came/poussoir, dent d'engrenage...

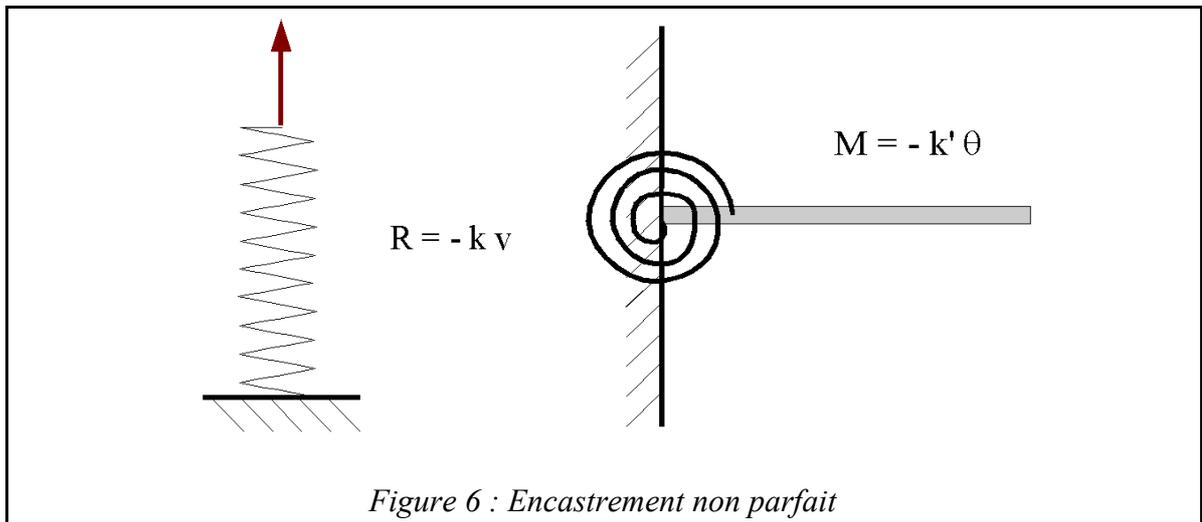
Encastrement :

Inconnues dynamiques : 3 efforts + 3 moments.

Inconnues cinématiques : aucune.

Exemple de système : système vissé, collé, riveté ; queue d'aronde, ...

D'autres conditions existent, par exemple des rigidités en translation ou en rotation :



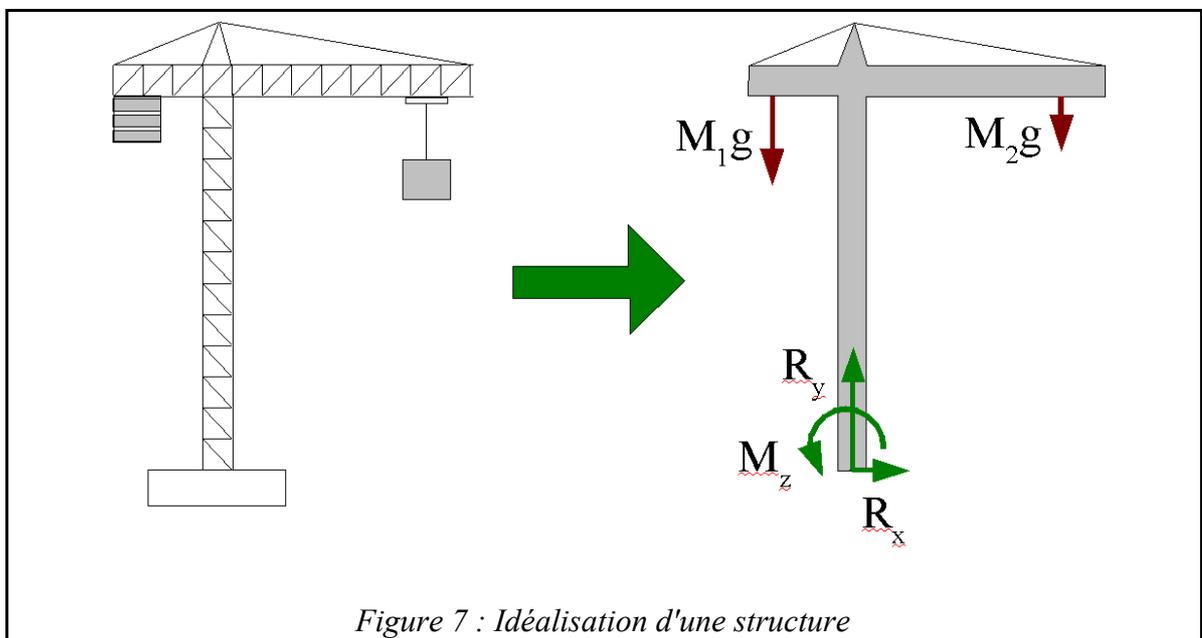
L'analyse fine de systèmes mécaniques doit toujours faire apparaître ce genre de condition aux limites. En effet, un encastrement « à rigidité finie » a des déplacements (flèches) significativement plus importants qu'un encastrement « à rigidité infinie ».

### 1.4 - Modélisation d'un montage

#### a - Conditions d'équilibre

Objectif : faire un modèle théorique simple le plus près possible de la réalité.

Par exemple :



- simplification de la géométrie
- préciser les efforts
- application de la relation d'équilibre en force et en moment

le problème doit être **isostatique** pour avoir une solution simple.

Pour avoir l'isostaticité :

- calculer les  $n_i$  réactions (ici 2 efforts et 1 moment)
- compter les équations d'équilibre non identiquement nulles
$$\sum F|_x = 0$$
$$\sum F|_y = 0 \Rightarrow n_e \text{ équations}$$
$$\sum M|_z = 0$$
- si  $n_e - n_i > 0$ , le problème est *hypostatique* ; il n'est pas en équilibre.
- si  $n_e - n_i < 0$ , le problème est *hyperstatique* ; il est trop contraint. Il est possible de trouver des solutions sur la base d'une formulation énergétique.
- si  $n_e - n_i = 0$ , le problème est *isostatique* ; il peut être résolu dans le cadre de la mécanique classique.

### **b - Objectifs technologiques**

1ère étape :

- connaître les efforts extérieurs

2<sup>ème</sup> étape :

- évaluer les contraintes et/ou déformations et les déplacements

ensuite :

- optimiser la géométrie pour garantir un poids minimum à déformation ou déplacement maximum imposé.

La première étape comme la seconde peut donner des valeurs d'entrées (conditions aux limites) pour un calcul plus élaboré (théorie de potentiel élastique, Eléments Finis ou Eléments Frontière).

### **c - Exemple d'analyse multi-échelle en mécanique**

L'étude d'une aile d'avion permet de voir un exemple d'utilisation de la Mécanique des Poutres dans un processus d'optimisation intégrant des outils numériques plus complets. Dans un premier temps, on peut modéliser l'aile comme une poutre encastree en flexion, soumise à un effort ponctuel et à un effort réparti. Cette approche permet en particulier de valider la section de l'aile de sorte qu'elle ne touche pas le sol. Le dimensionnement se fait dans ce cas sur la flèche de l'aile. Ce cas est très fréquent en flexion. Évidemment, cette approche ne prend pas en compte l'attache du moteur sur l'aile, qui doit être traitée avec un modèle plus complexe du fait de sa forme. Le plus courant est l'utilisation d'un code éléments finis. Mais la modélisation de toute l'aile est quasi impossible et conduirait à une taille de calcul démesuré. On fait donc un zoom sur la zone d'intérêt. Certaines conditions aux limites (sur les deux bords) sont issues du modèle de poutre simple développé ci-dessus.

Le modèle RDM permet une première validation de l'ensemble. Il permet aussi de conduire une analyse plus poussée dans des hypothèses relativement réalistes.

Attention, tout modèle ne rend compte que des phénomènes que l'on veut bien lui attribuer! Par éléments finis ou par un modèle analytique de poutre, on ne verra jamais l'influence de la fréquence de rotation des moteurs sans analyse dynamique ou modale !

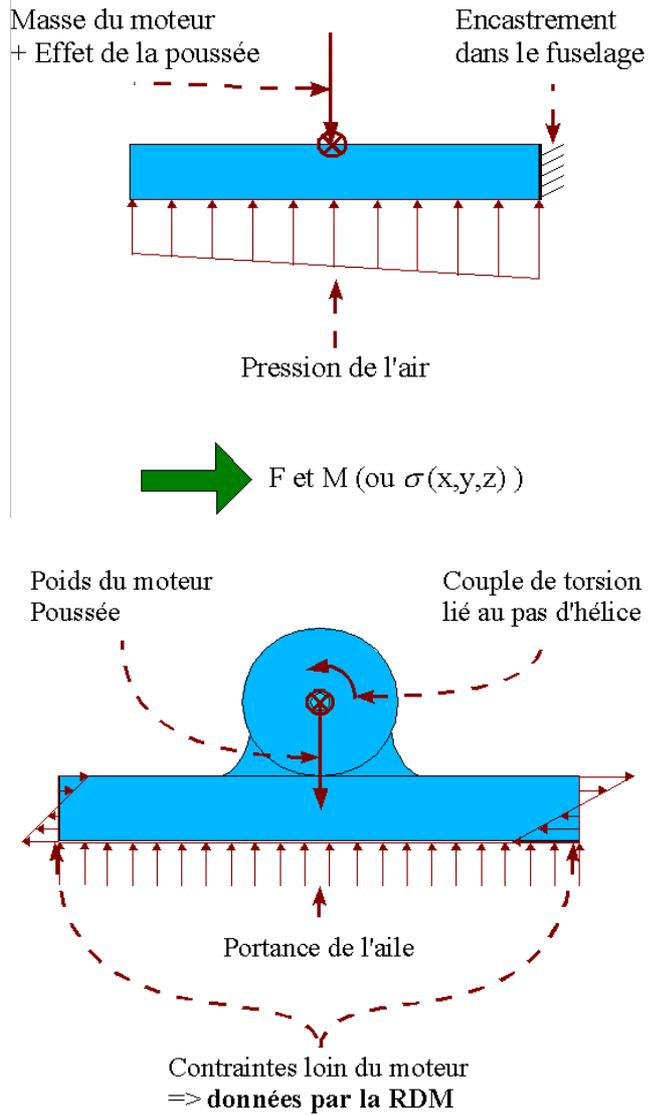


Figure 8 : Analyse multi-échelle

### d - Unités

On recommande toujours d'utiliser les unités du système international, soit :

- pour les longueurs le mètre (m)
- pour les forces le Newton (N)

- pour la masse, le kilogramme (kg)
- pour les contraintes ou les pressions le Pascal (Pa = 1 N/m<sup>2</sup>)
- pour les déformations, le mètre par mètre
- pour un couple, le newton mètre (N.m).

Toutefois, les résultats doivent être présentés dans un système d'unité plus fonctionnel :

- pour les longueurs le millimètre (mm)
- pour les forces, le Newton (N), de décanewton (daN) voir le kilonewton (kN)
- pour la masse, le kilogramme (kg)
- pour les contraintes ou les pressions le MégaPascal (MPa) voir parfois le GigaPascal (GPa)
- pour les déformations, le micromètre par mètre (μm/m) ou « microdéformation »
- pour un couple, le newton mètre (N.m).

Les erreurs d'échelle peuvent être importantes si le système d'unités choisi n'est pas cohérent. On notera que les codes éléments finis n'ont pas d'unité. De ce fait, c'est à l'utilisateur de savoir en quelle unité est exprimée son résultat. Souvent, on utilise le millimètre plutôt que le mètre et le Newton. Les résultats en contraintes sont donc directement en MPa. Toutefois, on ne peut conseiller cette méthode au débutant...

### **e - Ordre de grandeur**

<i>Matériau</i>	<i>Module d'Young</i>	<i>Limite élastique (Contrainte)</i>	<i>Limite élastique (déformation)</i>	<i>Coefficient de Poisson</i>
Acier courant	205 GPa	390 MPa	2000 μm/m	0,3
Aluminium	70 GPa	300 MPa	4300 μm/m	0,33
Titane	110 GPa	770 MPa	7000 μm/m	0,25
Plexiglass	3 GPa	60 MPa	20000 μm/m	0,36

Attention : on notera que les limites élastiques dépendent fortement des éléments d'alliage présents ainsi que de l'état physique de la matière (écrouissage notamment). En revanche, les modules élastiques changent peu.

## **1.5 - Principes fondamentaux**

### **1.5.1 - Principe de la coupe virtuelle**

Si on coupe virtuellement une structure, des forces apparaissent sur la section sous l'effet des efforts extérieurs de manière à maintenir un équilibre statique.

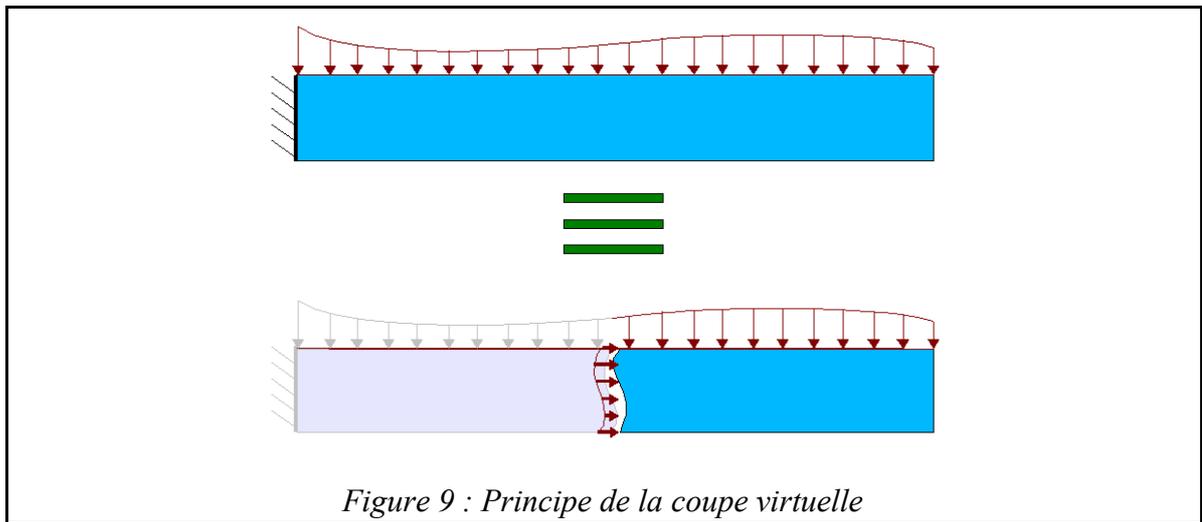


Figure 9 : Principe de la coupe virtuelle

Les efforts ainsi mis en évidence sont des forces internes, assurant la cohésion de la matière. Ces efforts sont répartis sur chaque « grain » de matière. On peut donc définir un effort par unité de surface comme suit :

$$\vec{p}_i = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta S} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial S}, \quad \vec{P}_i = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

### 1.5.2 - Torseur résultant des efforts

L'écriture de l'équilibre sur une poutre virtuellement coupée conduit à l'expression suivante :

$$\sum \vec{F}_{ext} + \int_S \vec{p}_i dS = \vec{0}$$

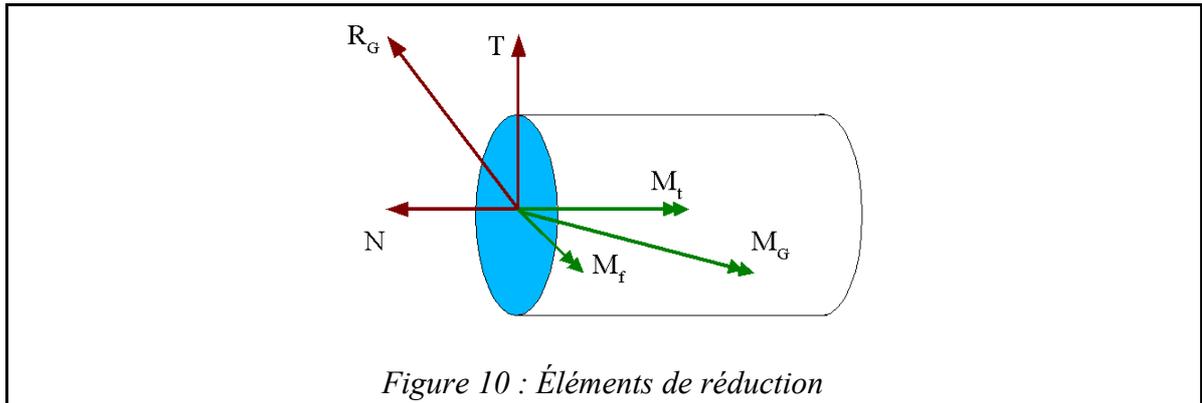
$$\sum \vec{M}_{ext} + \sum \vec{F}_{ext} \wedge \vec{GM}_F + \int_S \vec{p}_i \wedge \vec{GM}_i dS = \vec{0}$$

Avec un équilibre en effort ou en moment, les quantités  $\int_S \vec{p}_i dS$  et  $\int_S \vec{p}_i \wedge \vec{GM}_i dS$  ne peuvent pas être déterminées sans hypothèse.

On nommera  $\int_S \vec{p}_i dS = \vec{R}_G$  et  $\int_S \vec{p}_i \wedge \vec{GM}_i dS = \vec{M}_G$  **le torseur résultant au centre d'inertie de la section.**

### 1.5.3 - Éléments de réduction

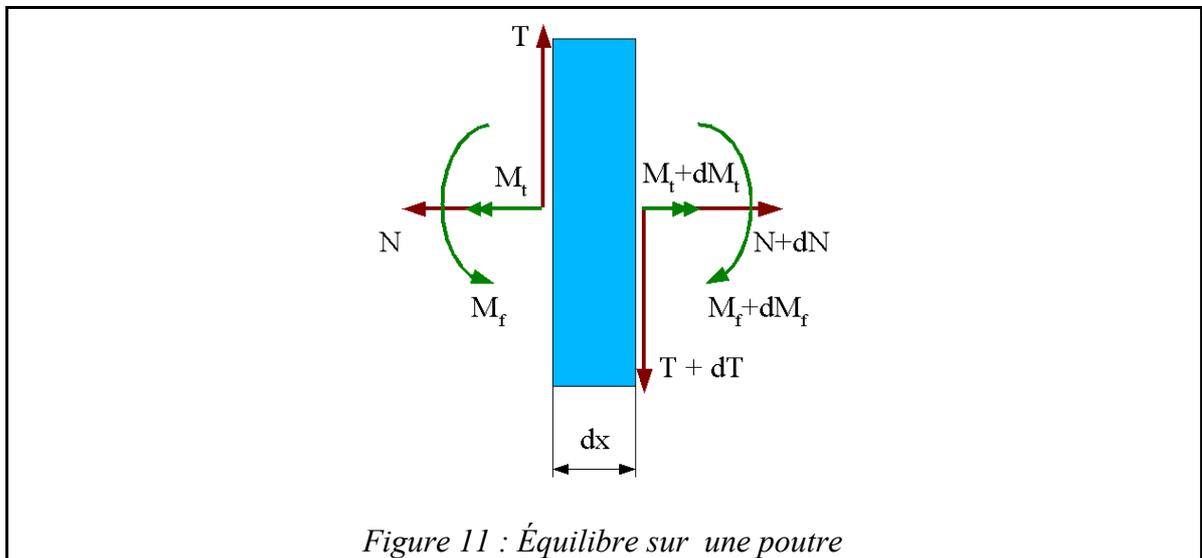
#### a - Présentation des éléments



$R_G$  se décompose en deux composantes :  
l'une ( $N$ ) est normale à la surface  
l'autre est tangentielle à la surface de la coupe  
Cette définition suppose qu'une section droite reste droite.

$M_G$  se décompose en deux contributions :  
- un moment de torsion  $M_t$   
- un moment de flexion  $M_f$ .

#### b - Relation entre $T$ et $M_f$



Faisons l'équilibre sur une tranche de poutre droite infiniment petite de longueur  $dx$ . En écrivant l'équilibre en moment de flexion au centre de gravité de la première section, il vient :

$$dM_f = -T dx \quad , \text{ soit } \quad T = -\frac{dM_f}{dx}$$

### **c - Principe de Saint-Venant**

*Dans une poutre longue, la répartition des contraintes dans une section située suffisamment loin des points d'application des forces extérieures ne dépend que du torseur résultant des efforts appliqués d'un côté de cette section.*

Ce principe n'est pas applicable :

- au voisinage des points d'application de forces concentrées
- près de variations brutales de forces réparties
- près de variations de section

Évidemment, cet énoncé ne précise pas ce que « près » veut dire. Le contexte devra guider le concepteur pour savoir si la distance est suffisamment grande. Retenons qu'une structure est une poutre si l'on regarde à une distance de 5 à 10 fois la longueur caractéristique, par exemple :

- la largeur de la poutre
- le diamètre d'un congé ou d'un perçage
- ...

### **d - Principe de superposition**

*Les déplacements et contraintes en un point d'une structure soumise à plusieurs forces extérieures imposées sont respectivement la somme géométrique des déplacements et des contraintes produites aux mêmes points par chaque force prise isolément.*

Ce principe s'applique pour les conditions suivantes :

- le système mécanique doit être tel que les déplacements soient dus uniquement à des déformations élastiques (en particulier, problèmes thermiques, frottement, plasticité)
- les déplacements doivent être proportionnels aux forces appliquées. Le matériau doit être donc élastique linéaire.
- l'effet des forces extérieures doit être indépendant des déformations qui en résultent. Les non-linéarités géométriques, notamment le flambage, ne peuvent entrer dans ce cadre.

### **e - Petites déformations**

Dans le cadre de la RDM classique, on considère que les déformations et les déplacements sont suffisamment petits pour que l'on puisse appliquer les lois d'équilibre statique à l'état initial du système considéré plutôt qu'à son état final déformé.

## **1.6 - Conclusion et remarques :**

Soit une structure réelle soumise à des efforts statiques.

1. Schéma de calcul

- préciser la géométrie
- les forces extérieures
- les conditions aux limites

2. Isostaticité ?
3. Calcul des réactions si nécessaire
4. Calcul des éléments de réduction
5. Quel type de Problèmes ?
  - Résistance ?
  - Déformation ?
6. Vérifier l'homogénéité des résultats
7. Vraisemblance du résultat ?
8. Quelle confiance dans le résultat ?

## 1.7 - Exercices

### a - Exercice 1

On reprend l'exemple de la grue décrit précédemment.

- 1 – De quelle nature est la liaison au pied de la grue ? En déduire le torseur des réactions au pied de la grue. Comment peut-on régler au mieux le contre-poids ?
- 2 – De quelle nature sont les autres liaisons ?
- 3 – Donner les efforts subis par chacune des poutres modélisées dans le cas de la grue.
- 4 – Quel est l'effort repris par chacun des câbles ? Sont-ils en traction ou en compression ?

### b - Exercice 2

Modélisez les systèmes suivants :



Figure 12 : une charpente



Figure 13 : un ski



*Figure 14 : un pied de tomate*

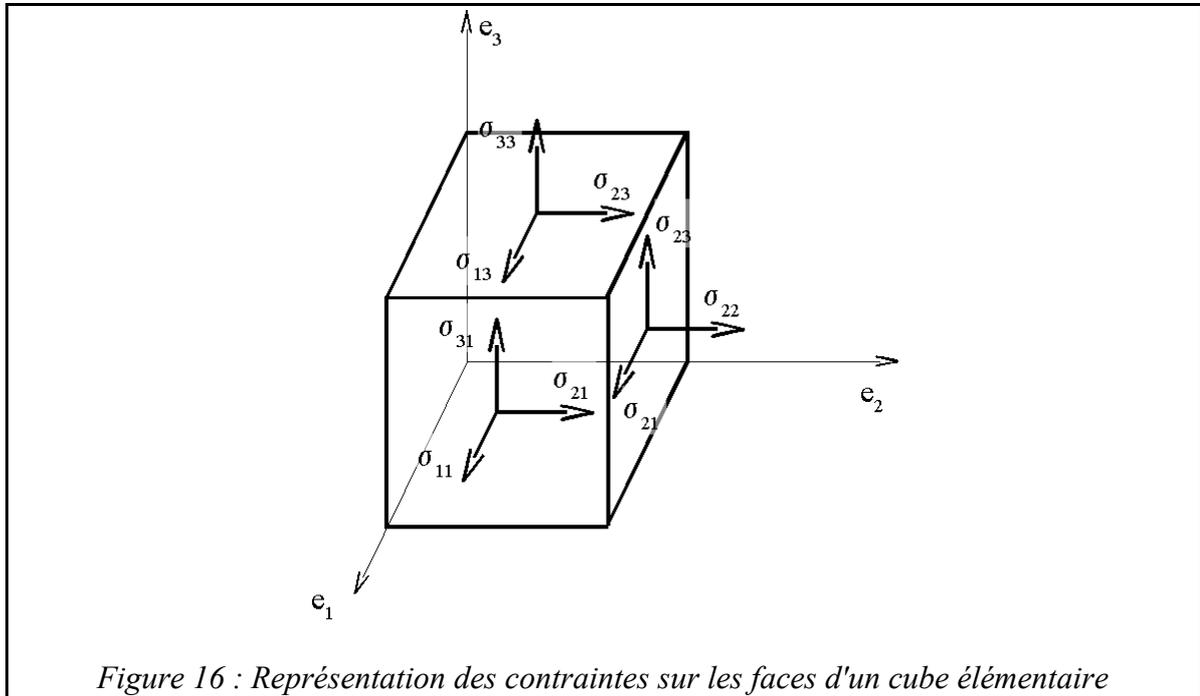


*Figure 15 : des palmes*

## 2 - Position du problème d'élasticité (anisotrope)

### 2.1 - Description des contraintes

#### 2.1.1 - Définition des contraintes sur un volume élémentaire



Si on fait l'équilibre en moment selon chacun des axes, il vient  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$  et  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ .

Le champ de contraintes au point M d'un solide est un tenseur de rang 2 symétrique noté  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M})$ .

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}_R \quad (1)$$

comme  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  pour tout  $i \neq j$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M})$  est symétrique, 6 grandeurs représentent donc l'état des contraintes en un point M.

#### 2.1.2 - Contraintes principales

Il existe un repère dans lequel  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M})$  est de la forme : 
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{R_{\text{prnc}}}$$

Les contraintes dans ce repère sont les contraintes principales. Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M})$ . La recherche des contraintes principales et du repère principal revient à résoudre l'équation  $([\boldsymbol{\sigma}] - \lambda[\mathbf{I}]) = [\mathbf{0}]$ .

Dans le repère principale, un élément de matière ne subit pas de cisaillement, mais seulement traction ou compression.

### 2.1.3 - Notations pour l'ingénieur

On peut noter les 6 variables du tenseur des contraintes sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}_R \quad (2)$$

La matrice de changement de base pour une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe 3 s'écrit :

$$T_{R \rightarrow R}^\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Pour obtenir la relation de passage inverse, remplacer  $\theta$  par  $-\theta$

### 2.1.4 - Cercle de Mohr

L'utilisation du cercle de Mohr permet de mieux appréhender la notion de tenseur des contraintes. Elle donne, en fonction du repère dans lequel on se situe, la répartition entre les différentes composantes du tenseur. Son utilisation, compte-tenu du déploiement général de logiciels mathématiques (dont Scilab, Matlab, Mathematica, Maple, ...) n'est peut-être plus aussi pertinente que par le passé. Reste que le connaître est un élément culturel important dans le monde de la mécanique.

Supposons une facette de normale  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^t$ . On suppose que la normale  $\vec{n}$  est de norme 1.

La projection du tenseur des contraintes sur cette facette est  $\vec{\sigma} = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$ . Par une simple application du théorème de Pythagore,  $\tau^2 = |\vec{\sigma}|^2 - \sigma^2$ .

On peut enfin montrer que  $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} n_1 \sigma_1 \\ n_2 \sigma_2 \\ n_3 \sigma_3 \end{pmatrix}$

Les expressions ci-dessus peuvent être reprises sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

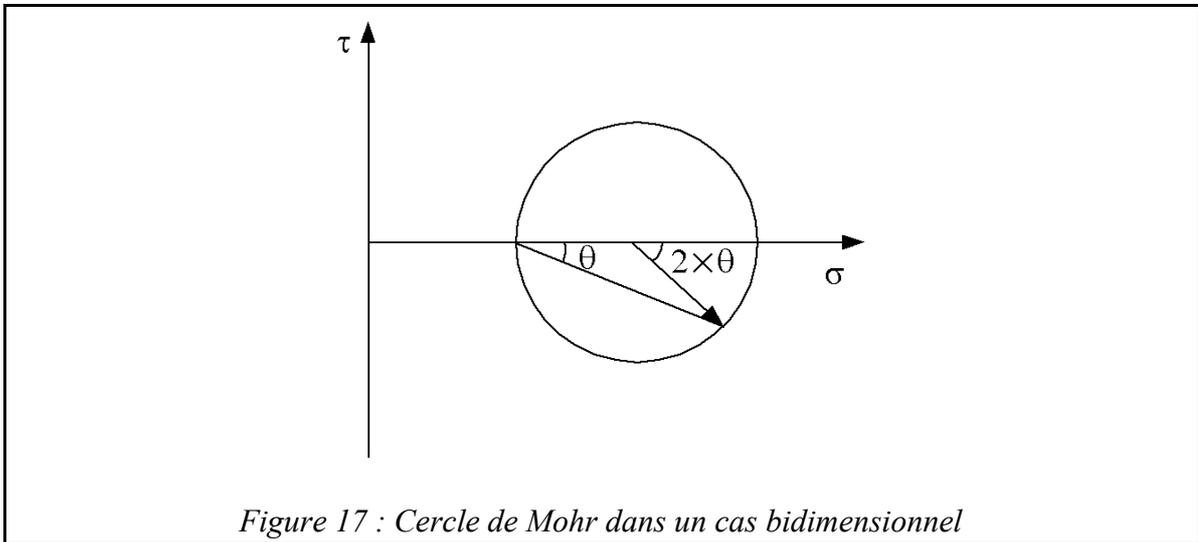
Ainsi, étant donné une normale, on peut calculer un couple  $(\sigma, \tau)$  unique. La question que

l'on se pose est la suivante : quel est le lieu de tous les couples  $(\sigma, \tau)$  pour toutes les orientations données ? La résolution pour le cas tridimensionnel est lourde et peu utile dans le cadre de la mécanique des poutres. On renverra le lecteur par exemple à Bastien[2] pour ce développement.

Nous allons maintenant spécifier la solution pour une déformation plane. On suppose que  $\sigma_3 = 0$  et que  $n_3 = 0$ . Dans ce cas,  $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta)^t$ . En reprenant les équations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\cos 2\theta \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta \end{aligned} \quad (5)$$

Le lieu des points est un cercle centré sur  $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$  de rayon  $\left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|$ .



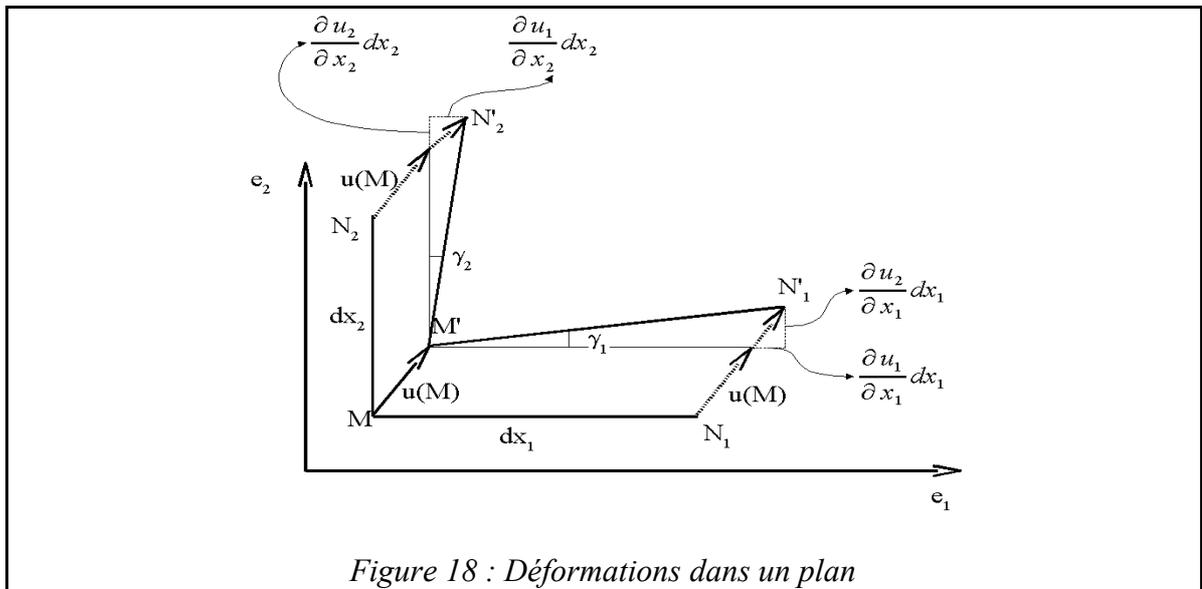
On remarquera, compte tenu des angles reportés sur la figure 17, que le cisaillement maximum est obtenu lorsque  $\theta = \pm\pi/4$ . Ce résultat est particulièrement important car la rupture des matériaux se fait essentiellement par cisaillement.

D'autre part, en cas de chargement hydrostatique,  $\sigma_1 = \sigma_2$ , le rayon du cercle de Mohr est nul. Cela traduit le fait qu'il n'y a pas de cisaillement dans ce cas-là.

## 2.2 - Description des déformations

Nota Bene : on se contente ici de *petites déformations*.

### 2.2.1 - Déformations d'un volume élémentaire



En petites déformations, on note que :

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 \approx \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (6)$$

### 2.2.2 - Définition des déformations

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \epsilon_{12} = \epsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{12} \\ \epsilon_{31} = \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{13} \\ \epsilon_{23} = \epsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{23} \end{aligned} \quad (7)$$

Comme dans le cas des contraintes, le champ de déformations au point M d'un solide est donc un tenseur de rang 2 symétrique noté  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{M})$ . Il y a donc 6 grandeurs représentant les déformations (3 translations et 3 rotations).

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}_R \quad (8)$$

### 2.2.3 - Déformations principales

Il existe un repère dans lequel  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{M})$  est de la forme :  $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}_{R_{princ}}$

Les déformations dans ce repère sont les déformations principales. Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{M})$ . La recherche des déformations principales et du repère principal revient à résoudre l'équation  $([\boldsymbol{\varepsilon}] - \lambda[\mathbf{I}]) = [\mathbf{0}]$ .

### 2.2.4 - Notations pour l'ingénieur

On note le tenseur des déformations sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} = 2\epsilon_{23} \\ \gamma_{13} = 2\epsilon_{13} \\ \gamma_{12} = 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}_R \quad (9)$$

La matrice de changement de base pour une rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe 3 s'écrit :

$$\mathbf{T}_{R \rightarrow R'}^\epsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

Pour obtenir la relation de passage inverse, remplacer  $\theta$  par  $-\theta$

Remarque : l'expression de  $\mathbf{T}_{R \rightarrow R'}^\epsilon$  est différente de  $\mathbf{T}_{R \rightarrow R'}^\sigma$ .

### 2.2.5 - Équations de compatibilité

Les équations (7) traduisent qu'il existe un lien entre déplacements et déformations, et entre les déformations elles-mêmes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -\frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{13}}{\partial x_2} \right)$$

Les équations (11) sont appelées les **équations de compatibilité**.

Questions :

1 – Montrez la symétrie du tenseur des contraintes en faisant l'équilibre sur un élément volumique infinitésimal.

2 – Comment passe-t-on de petites à grandes déformations ?

3 – Qu'en est-il de l'hypothèse de petits déplacements ? Peut-on avoir petites déformations et grands déplacements ?

4 – Comment exprimer le flambage (non linéarité géométrique) en modifiant l'approche de la figure 18 ?

## 2.3 - Relation contrainte / déformation

### 2.3.1 - Courbe expérimentale de chargement

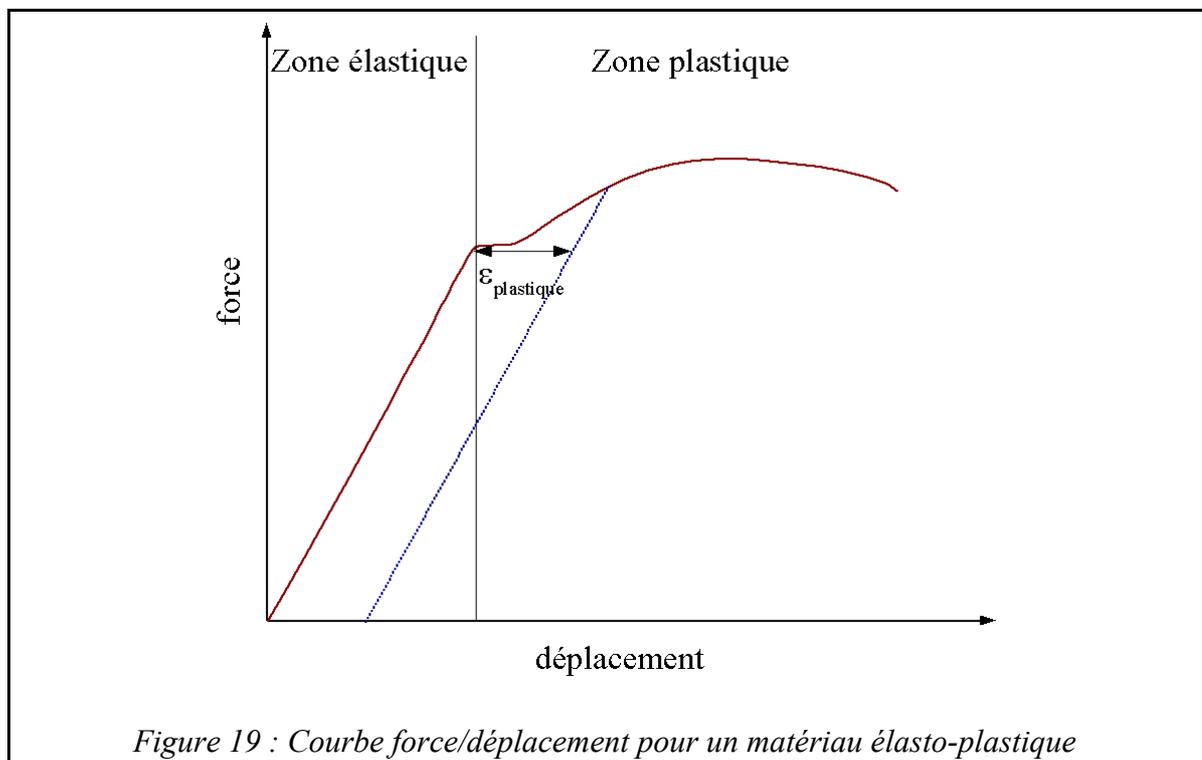
Lors d'un essai de traction sur une éprouvette modèle en métal, avec des matériaux composites structuraux, et pour la plupart des verres, le comportement observé consiste en une zone réversible (zone élastique), puis au delà en une zone de déformation irréversible (zone plastique). La zone de fonctionnement naturelle d'une structure est la zone réversible, sauf cas très particulier (absorbeurs de choc par exemple). Le comportement est assimilable à un comportement linéaire (pour les métaux, les composites structuraux, les céramiques, ...). Mais parfois la linéarité n'est pas admissible (tissus, plastiques, ...). Cette discussion est l'objet du cours de mécanique des matériaux. Quelques valeurs de module d'Young, de coefficients de Poisson et de limite élastique et limite à la rupture sont données tableau ??? à titre indicatif.

<i>Matériau</i>	<i>E (MPa)</i>	<i>ν</i>	<i>R<sub>E</sub> (MPa)</i>	<i>R<sub>p</sub> (MPa)</i>	<i>ρ (g/cm<sup>3</sup>)</i>
Acier de construction (type A36)	210 000	0,3	250	400	7,8
Alliage d'aluminium (type 2014)	69 000	0,33	400	455	2,7
Verre	72 000	0,24	-	-	2,53
Composite carbone/epoxy (direction des fibres)	150 000				
Titane	105000 à 120000	0,34	830	900	4,51
Nylon	3 à 3,5	0,41	45	75	1,14

Tableau 1 : Valeurs mécaniques typiques (d'après Wikipedia)

<i>Matériaux</i>	<i>E (MPa)</i>
Cartilage	24
Cheveux	10 000
Collagène	6
Fémur	17 200
Humérus	17 200
Radius	18 600
Soie d'araignée	60 000
Tibia	18 100
Vertèbre cervicale	230
Vertèbre lombaire	160

Tableau 2 : Quelques données sur les Biomatériaux (d'après Wikipedia)



### 2.3.2 - Loi de Hooke généralisée

Dans le cadre de ce cours, seuls les problèmes élastiques linéaires seront traités. La relation entre contraintes et déformations peut être caractérisée par :

$$\sigma(M) = C(M) \cdot \epsilon(M) \text{ soit :}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & C_{52} & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R \quad (12)$$

ou bien  $\boldsymbol{\epsilon}(M) = \mathbf{S}(M) \cdot \boldsymbol{\sigma}(M)$ , soit :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} & S_{51} & S_{61} \\ S_{12} & S_{22} & S_{32} & S_{42} & S_{52} & S_{62} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{43} & S_{53} & S_{63} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{54} & S_{64} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{65} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_R \quad (13)$$

$\mathbf{C}$  est la matrice de rigidité;  $\mathbf{S}$  la matrice de souplesse.  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{S}$  sont des matrices symétriques : il y a donc 21 constantes de rigidité  $C_{ij}$  ou constantes de souplesse  $S_{ij}$ .

### 2.3.3 - Relations de changement de base

On peut exprimer les matrices de rigidité ou de souplesse de différentes manières selon la base choisie.

En reprenant les formules de changement de base précédentes (Équations 3 et 10) et les définitions des matrices (Équations 12 et 13), il vient :

$$C_{R'} = T_{R \rightarrow R'}^\sigma C_R T_{R' \rightarrow R}^\epsilon \quad (14)$$

$$S_{R'} = T_{R \rightarrow R'}^\epsilon S_R T_{R' \rightarrow R}^\sigma \quad (15)$$

### 2.3.4 - Caractérisation de matériaux

#### a - Matériau triclinique

cas général à matrice complète  
21 constantes d'élasticité

#### b - Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie : l'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan.

Supposons le plan  $(e_1, e_2)$  plan de symétrie du matériau. Si l'on utilise les relations de passage (14) entre le repère  $R=(e_1, e_2, e_3)$  et le repère symétrique  $R'=(e_1, -e_2, e_3)$  avec la forme générale (12), on montre que la loi de Hooke se résume à l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_{R_{sym}}$$

13 constantes d'élasticité

### c - Matériau orthotrope

Le matériau orthotrope est un matériau à 3 plans de symétrie orthogonaux deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère ; ce peut être également le cas du matériau bois (en première approximation) ou de certains monocristaux. La même démarche que précédemment conduit aux expressions **dans un repère défini par les axes d'orthotropie** :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_{R_{ortho}}$$

9 constantes d'élasticité

### d - Matériau unidirectionnel

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe  $e_1$ . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope. Il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_{R_{ortho}}$$

5 constantes d'élasticité

Matériau isotrope :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix}_R \quad (19)$$

2 constantes d'élasticité (coefficients de Lamé ou  $E, \nu$ )

Questions :

- 1 – Comment peut-on justifier les formules (14) et (15) ? Pourquoi a-t-on  $\mathbf{T}_{R \rightarrow R'}^\epsilon$  et  $\mathbf{T}_{R' \rightarrow R}^\sigma$  ?
- 2 – A partir des relations de changement de base, mettre en évidence les simplifications obtenues pour un matériau monoclinique.

### 2.3.5 - Expression des constantes $C_{ij}$ d'un matériau orthotrope en fonction des paramètres de l'Ingénieur

#### a - Problème de traction : exemple de l'axe $e_2$

Si l'on exerce une traction selon une direction, par exemple selon  $e_2$ , il vient :  
 $\sigma_2 \neq 0$  et  $\sigma_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 3, 4, 5, 6\}$

La relation (18), écrite selon les paramètres de souplesse devient alors :

$$\begin{array}{lll} \epsilon_1 = S_{12} \sigma_2 & \sigma_2 = \frac{1}{S_{22}} \epsilon_2 & E_2 = \frac{1}{S_{22}} \\ \epsilon_2 = S_{22} \sigma_2 & \text{soit} & \epsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}} \epsilon_2 \quad \text{d'où} \quad \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \\ \epsilon_3 = S_{32} \sigma_2 & & \epsilon_3 = \frac{S_{32}}{S_{22}} \epsilon_2 \quad \nu_{23} = -\frac{S_{32}}{S_{22}} \\ \epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = 0 & & \end{array}$$

#### b - Problème de cisaillement : exemple de l'axe $e_6$

Dans le cas d'un cisaillement, il vient par exemple :  
 $\sigma_6 \neq 0$  et  $\sigma_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

La relation (18) devient alors :

$$\begin{array}{ll} \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_5 = 0 & \text{d'où} \\ \sigma_6 = C_{66} \epsilon_6 & G_{12} = C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \end{array}$$

### c - Matrices de souplesse et de rigidité d'un composite orthotrope exprimées dans les axes d'orthotropie

Si les raisonnements élémentaires mentionnés ci-dessus sont étendus aux différentes sollicitations du matériau, il vient :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_{R_{ortho}} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}_{R_{ortho}} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}_{R_{ortho}}$$

Les constantes de rigidités sont déduites en inversant la matrice de souplesse :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\ C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} &= G_{23} \\ C_{55} &= G_{13} \\ C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (20)$$

avec  $\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2 \nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$

Dans le cas d'un matériau isotrope, les équations (20) se simplifient à :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ C_{12} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \frac{C_{11} - C_{12}}{2} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad (21)$$

### d - Conclusion

- Il existe un lien entre les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson :  $\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}}$
- le comportement élastique est décrit par 9 modules indépendants (matériau orthotrope) :  
3 modules d'Young :  $E_1, E_2, E_3$   
3 coefficients de Poisson :  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$

3 modules de cisaillement :  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$

## 2.4 - Relation Fondamentale de la Dynamique

### 2.4.1 - Démonstration

Un élément de volume  $dV$  est soumis à :

- des forces de volume :  $\vec{f}(M, t)dV$
- des forces de surface :  $\vec{t}(M, t)dS$
- son accélération (dans un repère Galiléen) :  $\rho(M, t)\vec{a}^R dV$

Donc, l'équilibre local s'écrit :  $\vec{f}(M, t)dV + \vec{t}(M, t)dS = \rho(M, t)\vec{a}^R dV$

En intégrant sur un élément de volume :

- équilibre en moment :

$$\iiint_V \vec{OM} \wedge \vec{f}(M, t)dV + \iint_S \vec{OM} \wedge \vec{t}(M, t)dS = \iiint_V \rho(M, t)\vec{OM} \wedge \vec{a}^R dV$$

- équilibre en effort :

$$\iiint_V \vec{f}(M, t)dV + \iint_S \vec{t}(M, t)dS = \iiint_V \rho(M, t)\vec{a}^R dV$$

Si l'on projette l'équation d'équilibre en effort sur chacun des trois axes, et en considérant que l'effort appliqué sur chaque surface  $\vec{t}$  est égal à la contrainte sortant de la surface, soit :

$$t_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$$

$$t_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3$$

$$t_3 = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

$$\iiint_V (f_i - \rho a_i) dV + \iint_S \sigma_{ij} n_j dS = 0$$

En utilisant la formule de Gauss :  $\iint_S \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV$

soit finalement :  $\iiint_V \left( f_i - \rho a_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) dV = 0$  et, en particulier pour chaque partie du domaine :

$$f_i - \rho a_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

## 2.4.2 - Énoncé

Si l'on pose que les efforts de volume exercés sur un solide (champ de gravité, de champ magnétique...) sont  $(f_1, f_2, f_3)$ , et si le repère choisi est galiléen, la Relation Fondamentale de la Dynamique s'écrit localement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (22)$$

## 2.4.3 - Résolution du problème d'élasticité en petites déformations

Le problème d'élasticité est ramené à la résolution simultanée de :

- La loi de Hooke généralisée (12)
- Les relations déformations/déplacements(7)
- Les équations de compatibilité (11)
- La Relation Fondamentale de la Dynamique (22)
- Les conditions aux limites au bord du domaine solide (en déplacement, déformations, ou contraintes)

La résolution d'un tel problème fait appel à des techniques numériques complexes qui ne seront pas abordées ici (éléments finis, éléments frontières, méthode de Rayleigh, ...)

## 2.4.4 - Méthodes variationnelles, méthode de Rayleigh-Ritz

Tous les problèmes mécaniques n'ont pas de solution analytique connue.

En l'absence de dissipation, l'énergie élastique accumulée est égale à la somme des énergies mise en jeu dans le système, notamment l'énergie cinétique et le travail des forces extérieures.

$$\begin{aligned} U &= U_d - (W_{ext} + W_{vol} + E_c) \\ E_c &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dV \\ W_{ext} &= \sum F_{ext} u_{ext} \\ W_{vol} &= \iiint_V f_{vol} u_i dV \\ U_d &= \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \end{aligned} \quad (23)$$

Pour formuler des solutions réalistes, une méthode consiste à minimiser la différence entre l'énergie apportée au système et l'énergie élastique stockée, appelée l'énergie potentielle totale. Cette minimisation est possible pour des fonctions de forme données. Nous cherchons donc une solution  $\tilde{u}(M)$  satisfaisant au mieux les conditions physiques de la fonction

$u(M)$  .

Supposons que la fonction se décompose sur une base selon :  $\tilde{u}(M) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(M)$  . Les paramètres permettant la minimisation sont les variables  $a_i$  appelées *coordonnées généralisées*. Les fonctions de forme choisies  $\Phi_i$  doivent satisfaire aux conditions aux limites.

La minimisation de U suppose que  $\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0 \quad \forall i \in [1..n]$

La solution approchée  $\tilde{u}(M)$  tend vers la solution exacte  $u(M)$  si la base  $\phi_i(M)$  est complète. Les solutions sont cherchées en générale parmi les séries de Fourier (sin et cos) ou les fonction polynômes, par exemple la base orthogonale de Tchebychev<sup>1</sup>. Une autre approche consiste à trouver une minimisation par des fonctions simples (linéaires ou quadratiques) sur des zones de faible étendue, et assurer la continuité entre ces zones. C'est la base d'une approche aux éléments finis.

---

<sup>1</sup>  $T_0(x) = 1,$   
 $T_1(x) = x,$   
 $T_2(x) = 2x^2 - 1,$   
 $T_3(x) = 4x^3 - 3x,$   
 $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$   
 $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$   
...

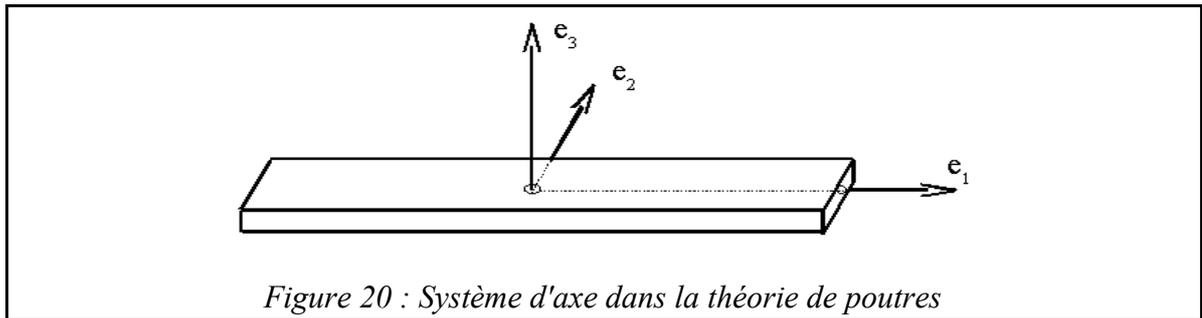
### 3 - Théorie de poutres

#### 3.1 - Étude d'une couche unique dans le cas d'un matériau orthotrope

##### 3.1.1 - Contexte

Dans ce chapitre, nous nous intéressons plus particulièrement aux poutres. Le type de section pourra être défini ensuite au cas par cas.

Une poutre se définit comme une structure pour laquelle deux dimensions sont notablement plus faibles que la troisième. Nous allons considérer dans la suite qu'il s'agit des directions 2 et 3.



##### 3.1.2 - État de contraintes

L'état de contraintes d'une poutre est un état de contraintes planes dans deux directions. On a donc  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$  et  $\sigma_{23} = 0$ . Le tenseur correspondant s'écrit donc :

$$\sigma(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & 0 & 0 \\ \tau_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}_R \quad (24)$$

on note que l'équilibre sur un élément infinitésimal impose :  $\tau_{12} = \tau_{21}$ ,  $\tau_{13} = \tau_{31}$ .

##### 3.1.3 - Lois de comportement

Pour matériau anisotrope dont un des axes d'anisotropie est  $e_3$ , par exemple un tissu ou un matériau unidirectionnel, la loi de Hooke généralisée, exprimée dans un repère quelconque du plan de la plaque, s'exprime par :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ 0 \end{pmatrix}_R = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_R \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix}_R$$

Il vient donc que :

$$\begin{aligned}
\epsilon_2 &= -\frac{(C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23})}{(C_{22}C_{33} - C_{23}^2)} \epsilon_1 \\
\epsilon_3 &= -\frac{(C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23})}{(C_{22}C_{33} - C_{23}^2)} \epsilon_1 \\
\sigma_1 &= \left[ C_{11} - \frac{(C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23})}{(C_{22}C_{33} - C_{23}^2)} - \frac{(C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23})}{(C_{22}C_{33} - C_{23}^2)} \right] \epsilon_1
\end{aligned} \tag{25}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma_4 &= C_{44} \epsilon_4 \\
\sigma_5 &= C_{55} \epsilon_5 \\
\epsilon_6 &= 0
\end{aligned}$$

### 3.1.4 - Modules d'élasticité

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left[ C_{11} - \frac{(C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23})}{(C_{22}C_{33} - C_{23}^2)} - \frac{(C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23})}{(C_{22}C_{33} - C_{23}^2)} \right]^{-1} \\
\nu_{12} &= \frac{(C_{12}C_{33} - C_{13}C_{23})}{(C_{22}C_{33} - C_{23}^2)} \\
\nu_{13} &= \frac{(C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23})}{(C_{22}C_{33} - C_{23}^2)} \\
G_{13} &= C_{44} \\
G_{23} &= C_{55}
\end{aligned} \tag{26}$$

## 3.2 - Expression des déformations dans le cadre de la théorie de poutres

### 3.2.1 - Développement limité des déplacements selon $x_2$ et $x_3$

Dans la mesure où  $x_2$  et  $x_3$  sont petits, le comportement de la poutre peut être ramené à l'axe moyen, contenant les centres de gravité de chaque section, et à une variation autour de cet axe selon un développement limité.

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1(x_1, 0, 0) + x_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, 0, 0) + x_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, 0, 0) \\
u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2(x_1, 0, 0) + x_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, 0, 0) + x_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, 0, 0) \\
u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3(x_1, 0, 0) + x_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, 0, 0) + x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, 0, 0)
\end{aligned} \tag{27}$$

En considérant un schéma au premier degré, l'expression (27) devient :

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, x_2, x_3) &= u_1^0(x_1) + x_2 \varphi_1^2(x_1) + x_3 \varphi_1^3(x_1) \\
u_2(x_1, x_2, x_3) &= u_2^0(x_1) + x_2 \epsilon_{22}^0(x_1) + x_3 \varphi_2^3(x_1) \\
u_3(x_1, x_2, x_3) &= u_3^0(x_1) + x_2 \varphi_3^2(x_1) + x_3 \epsilon_{33}^0(x_1)
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } u_1(x_1, 0, 0) &= u_1^0(x_1) \quad , & u_2(x_1, 0, 0) &= u_2^0(x_1) \quad , & u_3(x_1, 0, 0) &= u_3^0(x_1) \\
\epsilon_{22}^0(x_1) &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_1, 0, 0) \quad , & \epsilon_{33}^0(x_1) &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x_1, 0, 0) \quad , \\
\varphi_1^2(x_1) &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, 0, 0) \quad , & \varphi_1^3(x_1) &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, 0, 0) \quad , \\
\varphi_2^3(x_1) &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x_1, 0, 0) \quad , & \varphi_3^2(x_1) &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_1, 0, 0) \quad .
\end{aligned}$$

Cette hypothèse est parfois levée pour étudier le gauchissement de section. On peut par exemple faire l'hypothèse d'une variation de déplacement sous forme de polynôme d'ordre 4.

La formulation donnée ici est proche plus riche que la formulation classique de Hencky-Medlin. Celle-ci suppose de surcroît que les termes  $\epsilon_{22}^0$  ,  $\epsilon_{33}^0$  ,  $\varphi_2^3$  et  $\varphi_3^2$  sont nuls.

La conséquence de ce schéma au premier degré est qu'une section droite reste droite (voir figure 21). On ne pose pas a priori dans l'expression (28) d'hypothèse sur les angles  $\varphi$ . Si l'on suppose de surcroît que le cisaillement est négligeable, alors une section normale au plan du stratifié reste normale au plan après déformation. Cette hypothèse de cisaillement nul est connue sous le nom d'hypothèses de Love-Kirchhoff.

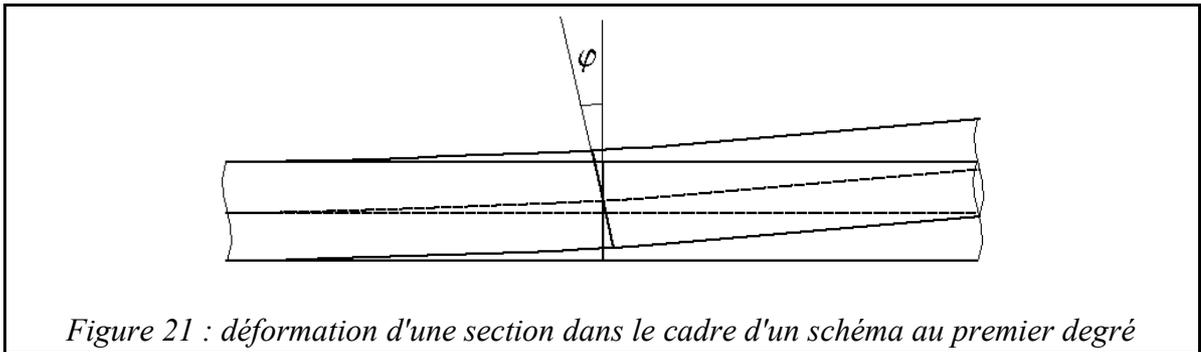


Figure 21 : déformation d'une section dans le cadre d'un schéma au premier degré

### 3.2.2 - Expression des déformations

En appliquant les équations (7) et (28), l'expression des déformations devient :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial x_1} \\
\epsilon_{22} &= \epsilon_{22}^0 \\
\epsilon_{33} &= \epsilon_{33}^0 \\
\gamma_{23} &= 2 \cdot \epsilon_{23} = \frac{\partial \varphi_3^2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_2^3}{\partial x_2} = 0 \\
\gamma_{12} &= 2 \cdot \epsilon_{12} = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \varphi_1^2 + x_2 \frac{\partial \epsilon_{22}^0}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \varphi_3^2}{\partial x_1} = \gamma_{12}^0 + x_2 \delta_{22}^0 + x_3 \kappa_3^0 \\
\gamma_{13} &= 2 \cdot \epsilon_{13} = \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} + \varphi_1^3 + x_2 \frac{\partial \varphi_2^3}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \epsilon_{33}^0}{\partial x_1} = \gamma_{13}^0 + x_2 \kappa_2^0 + x_3 \delta_{33}^0
\end{aligned} \tag{29}$$

Les équations (29) montrent que :

- Sous les hypothèses de Hencky-Medlin, les déformations transverses de la poutre

sont a priori nulles. On constate que cette hypothèse est en contradiction avec l'hypothèse exprimée sur le champ de contraintes. Cette contradiction peut être levée, mais aux prix de calculs plus lourds que l'on ne développe en général pas en résistance des matériaux.

- Le cisaillement  $\gamma_{23}$  est nul.
- Le cisaillement varie linéairement dans les sections, ce qui indique qu'une section droite reste droite. Sous les hypothèses de Hencky-Medlin, les autres cisaillements sont constants dans la section : une section normale à l'axe courant reste normale.
- la déformation dans la direction de la poutre se décompose en deux contributions : une constante  $\epsilon_{11}^0$  et une partie variable au long de la section.

### 3.3 - Expression des contraintes et des efforts résultants

#### 3.3.1 - Expression des efforts résultants

Objectif : estimer l'effort sur une section complète.

Les efforts résultants, ramenés au centre de gravité de la section, sont dans le cas d'une poutre dans l'espace, un effort normal de traction ou compression  $N_{11}$ , un effort de cisaillement projeté selon ses deux composantes  $T_{12}$  et  $T_{13}$ , deux moments de flexion  $M_f^2$  et  $M_f^3$  et un moment de torsion  $M_t$ .

Les efforts auxquels est soumise la plaque sont donc les sommes intégrales des contraintes exercées sur la face. En supposant que le matériau est un stratifié multicouche, dont chacune des  $n$  couches est indicée  $k$  :

Les efforts normaux et tranchants sont :

$$N(x_1) = \begin{pmatrix} N_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \end{pmatrix} = \sum_1^n \iint_{S^k} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} dS \quad (30)$$

De même, on définit les moments de flexion  $M_{11}$  et  $M_{22}$  et de torsion  $M_{12}$  :

$$M(x_1) = \begin{pmatrix} M_f^2 \\ M_f^3 \\ M_t \end{pmatrix} = \sum_1^n \iint_{S^k} \begin{pmatrix} x_3 \sigma_{11} \\ x_2 \sigma_{11} \\ x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12} \end{pmatrix} dS \quad (31)$$

Les grandeurs  $N(x_1)$  sont exprimées en N et les grandeurs  $M(x_1)$  sont exprimées en N.m.

#### 3.3.2 - Loi de comportement d'une poutre

En utilisant les formes simplifiées de la loi de comportement donnée équation (25), il vient :

$$\mathbf{N}(x_1) = \begin{pmatrix} N_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \end{pmatrix} = \sum_1^n \iint_{S^k} \begin{pmatrix} E_1^k \left( \epsilon_{11}^0 + x_2 \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial x_1} \right)^k \\ \frac{G_{12}^k}{2} (\gamma_{12}^0 + x_2 \delta_{22}^0 + x_3 \kappa_3^2) \\ \frac{G_{13}^k}{2} (\gamma_{13}^0 + x_2 \kappa_2^3 + x_3 \delta_{33}^0) \end{pmatrix} dS \quad (32)$$

soit encore :

$$\mathbf{N}(x_1) = \begin{pmatrix} N_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 \sum_1^n E_1^k S^k + \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial x_1} \sum_1^n E_1^k \iint_{S^k} x_2 dS + \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial x_1} \sum_1^n E_1^k \iint_{S^k} x_3 dS \\ \frac{\gamma_{12}^0}{2} \sum_1^n G_{12}^k S^k + \frac{\delta_{22}^0}{2} \sum_1^n G_{12}^k \iint_{S^k} x_2 dS + \frac{\kappa_3^2}{2} \sum_1^n G_{12}^k \iint_{S^k} x_3 dS \\ \frac{\gamma_{13}^0}{2} \sum_1^n G_{13}^k S^k + \frac{\kappa_2^3}{2} \sum_1^n G_{13}^k \iint_{S^k} x_2 dS + \frac{\delta_{33}^0}{2} \sum_1^n G_{13}^k \iint_{S^k} x_3 dS \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{M}(x_1) = \begin{pmatrix} M_f^2 \\ M_f^3 \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 \sum_1^n E_1^k \iint_{S^k} x_3 dS + \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial x_1} \sum_1^n E_1^k \iint_{S^k} x_2 x_3 dS + \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial x_1} \sum_1^n E_1^k \iint_{S^k} x_3^2 dS \\ \epsilon_{11}^0 \sum_1^n E_1^k \iint_{S^k} x_2 dS + \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial x_1} \sum_1^n E_1^k \iint_{S^k} x_2^2 dS + \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial x_1} \sum_1^n E_1^k \iint_{S^k} x_2 x_3 dS \\ \frac{\gamma_{13}^0}{2} \sum_1^n G_{13}^k \iint_{S^k} x_2 dS - \frac{\gamma_{12}^0}{2} \sum_1^n G_{12}^k \iint_{S^k} x_3 dS + \frac{\kappa_2^3}{2} \sum_1^n G_{13}^k \iint_{S^k} x_2^2 dS \dots \\ \dots - \frac{\kappa_3^2}{2} \sum_1^n G_{12}^k \iint_{S^k} x_3^2 dS + \frac{\delta_{33}^0}{2} \sum_1^n G_{13}^k \iint_{S^k} x_2 x_3 dS - \frac{\delta_{22}^0}{2} \sum_1^n G_{12}^k \iint_{S^k} x_3 x_3 dS \end{pmatrix} \quad (34)$$

Les expressions ci-dessus montrent la dépendance des résultantes aux déformations moyennes, sur l'axe de la poutre, et au gradients de déformation dans les directions transverses. On est donc passé d'une expression où il est nécessaire de connaître tous les termes des tenseurs de déformation et de contrainte à une expression condensée au point le plus caractéristique.

Les sommes, intégrales ou discrètes, sont représentatives de la géométrie et des matériaux, ce qu'on pourrait appeler l'architecture de la poutre. On n'est clairement plus dans une propriété intrinsèque du matériau : c'est une particularité de la mécanique.

Cette forme générale, adaptée à un milieu hétérogène à l'échelle mésoscopique n'est pas d'un usage très simple. Nous allons particulariser les solutions au cas de poutres homogènes. De fait, nous ne nous intéressons plus aux stratifiés, dont les propriétés varient de couche en couche, ni aux contreplaqués, ou aux matériaux sandwich, ni aux bétons armés, dont le comportement est encore plus complexe.

### 3.3.3 - Cas d'une poutre homogène

Les expressions dans ce cas se simplifient à

$$\mathbf{N}(x_1) = \begin{pmatrix} N_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^0 ES \\ \frac{\gamma_{12}^0}{2} GS \\ \frac{\gamma_{13}^0}{2} GS \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{M}(x_1) = \begin{pmatrix} M_f^2 \\ M_f^3 \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial x_1} E \iint_S x_3^2 dS \\ \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial x_1} \sum_1^n E \iint_S x_2^2 dS \\ \frac{\kappa_2^3 G}{2} \iint_S x_2^2 dS - \frac{\kappa_3^2 G}{2} \iint_S x_3^2 dS \end{pmatrix} \quad (36)$$

Les expressions intégrales  $\iint_S x_3^2 dS$  et  $\iint_S x_2^2 dS$  sont les moments de flexion de la structure.

Questions :

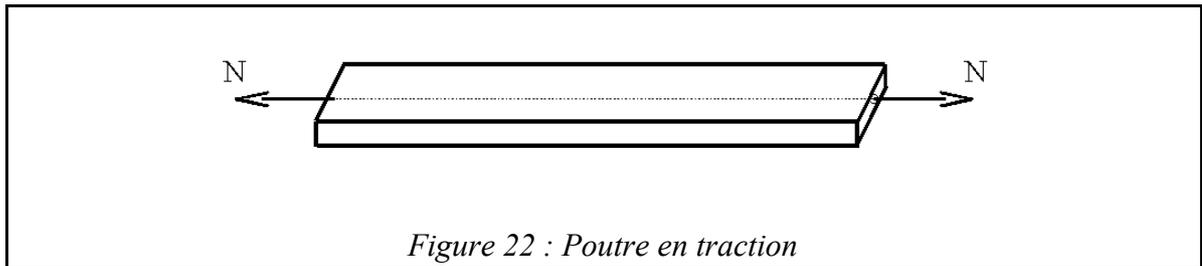
1 – Que devient l'équation (29) si les cisaillements sont négligeables ? En déduire l'expression des hypothèses de Love- Kirchhoff dans le cas général, puis sous les hypothèses de Hencky-Medlin.

## 4 - Etude de sollicitations simples

Dans cette partie, consacrée à l'étude de poutres droites, on reprendra les différents types de sollicitation classiques traction, flexion, cisaillement et torsion. L'analyse réalisée est basée sur l'équilibre d'un élément de poutre. Même si l'on n'utilise pas explicitement le passage 3D 1D décrit ci-dessus, il en est la justification théorique. L'analyse développée vise à donner des réflexes de modélisation utilisables sur des structures plus complexes (poutres à fortes courbures, cordes, ...)

### 4.1 - Traction

#### 4.1.1 - Modélisation



Loin de discontinuités de géométrie et de chargement, une poutre en traction pure est soumise à un tenseur résultant se réduisant à une unique composante non nulle :

$$N(x_1) = \begin{pmatrix} N_{11} \\ T_{12} \\ T_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(x_1) = \begin{pmatrix} M_f^2 \\ M_f^3 \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On a donc :

$$\begin{aligned} N_{11} &= \sigma_{11} S = \epsilon_{11}^0 ES \\ \epsilon_{22}^0 &= -\nu \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{33}^0 &= -\nu \epsilon_{11}^0 \end{aligned} \quad (37)$$

L'énergie élastique emmagasinée par unité de volume est :  $\frac{dU_d}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2E} \times \left( \frac{N_{11}}{S} \right)^2$

La poutre, lorsqu'elle est en traction, pose peu de problèmes. Si elle est soumise à la compression, on pensera toujours au problème de flambement. Un critère de dimensionnement conservatif est le suivant :

$$0 \leq \sigma_{11} \leq \frac{\sigma_{0,2}}{k} \quad (38)$$

- $\sigma_{0,2}$  est la limite élastique conventionnelle
- $k$  est le coefficient de sécurité

### 4.1.2 - Cas des enveloppes minces

Hypothèses :

- épaisseur faible devant les autres dimensions
- pression uniforme appliquée ( $P_{int}-P_{ext}$ ) = P

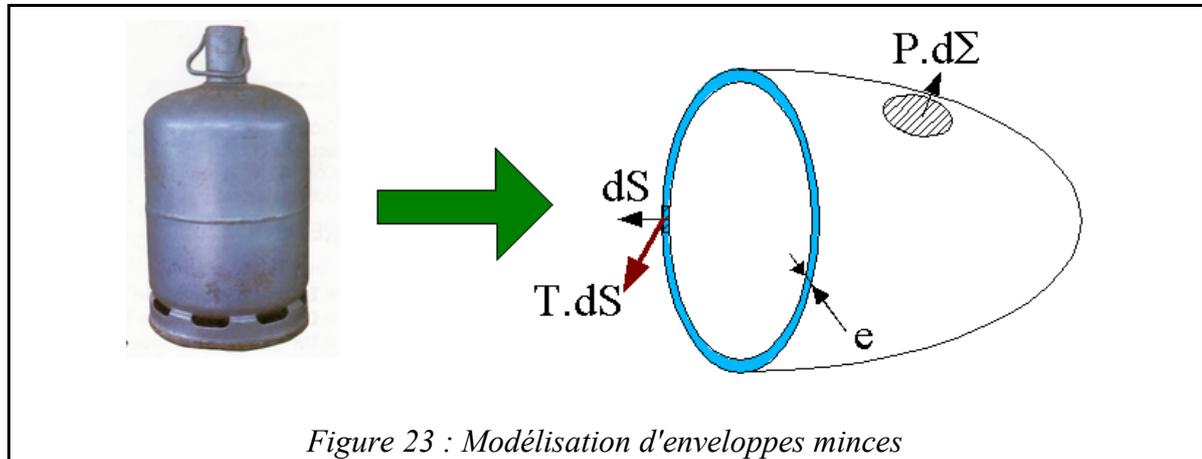


Figure 23 : Modélisation d'enveloppes minces

Equilibre sur la demi-enveloppe :  $\iint_{\Sigma} \vec{P} d\Sigma + \iint_S \vec{T} dS = \vec{0}$

Projeté sur l'axe horizontal x,  $\iint_{\Sigma} P \cos\beta d\Sigma - \iint_S T \cos\alpha dS = 0$

- $dA = \cos\beta d\Sigma$  est la projection sur le plan de normale x de  $d\Sigma$ ,
- $\sigma_N = T \cos\alpha$  est la composante normale de la résultante. Il vient donc l'équation :

$$\iint_A P dA - \iint_S \sigma_N dS = 0 \quad (39)$$

Si la pression exercée provient d'un gaz,  $P = cste$ .

Si  $e \ll$  aux autres dimensions,  $\sigma_N$  est constante sur S.

Il vient alors la relation classique des enveloppes minces :

$$\sigma_N \times S = P \times A \quad (40)$$

### 4.1.3 - Treillis articulé

Une application les plus courantes des problèmes de poutres en traction et compression est l'application aux treillis articulés. Ces treillis sont des ensembles isostatiques de poutres dont les liaisons sont des articulations cylindriques. Les efforts sont donc transmis, mais les moments sont nuls.

### a - Exemple de treillis articulés

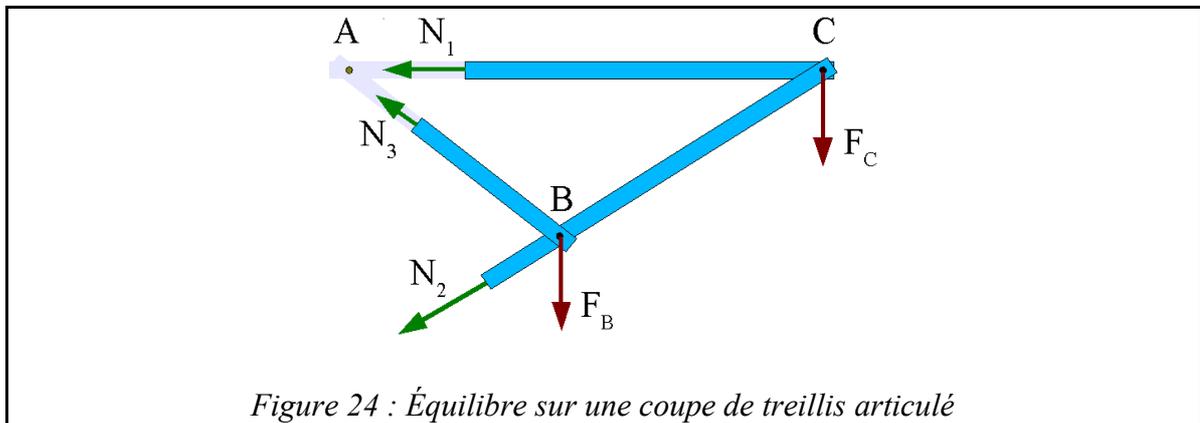
- ponts métalliques,
- structure de gratte-ciels,
- pylônes (électricité, transport par câble, ...),
- tour Eiffel,
- ...

### b - Méthode analytique de Ritter

On procède par coupes partielles de la structure, au niveau des barres, mais jamais au niveau des noeuds. La règle est de ne pas couper plus de trois barres de torseur inconnu simultanément.

Ensuite, on écrit l'équilibre en moments à chacun des points de la coupe.

Exemple :



L'écriture du moment en A donne :  $\vec{AB} \wedge \vec{F}_B + \vec{AC} \wedge \vec{F}_C + \vec{AG}_2 \wedge \vec{N}_2 = \vec{0}$  .

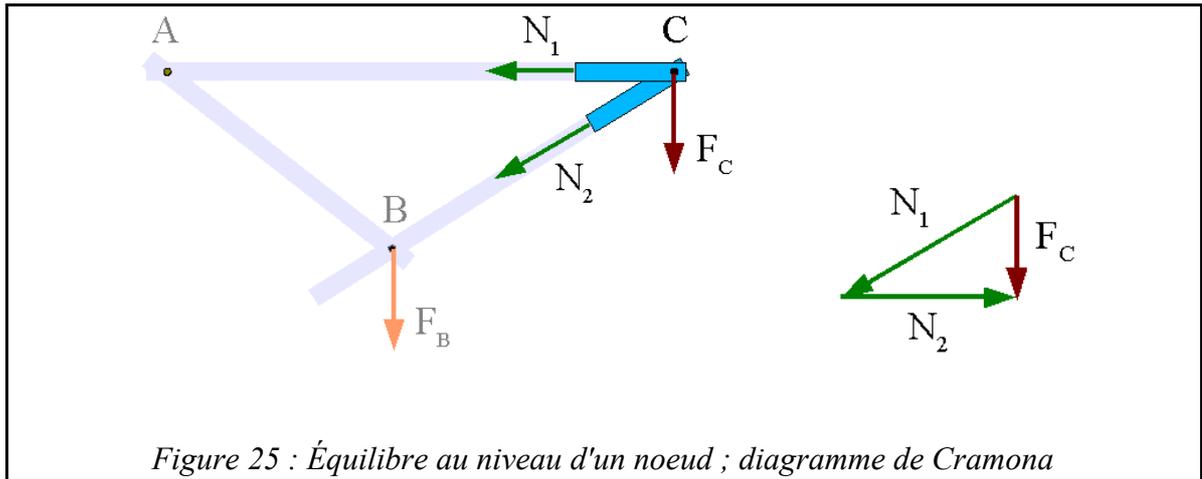
L'écriture du moment en B donne :  $\vec{BC} \wedge \vec{F}_C + \vec{BG}_1 \wedge \vec{N}_1 = \vec{0}$  .

L'écriture du moment en C donne :  $\vec{CB} \wedge \vec{F}_B + \vec{CG}_3 \wedge \vec{N}_3 = \vec{0}$  .

On observe que chaque équation a une seule inconnue, si la géométrie ne subit pas de changement notable (hypothèse déjà posée des petits déplacements). On peut donc résoudre de proche en proche et trouver le torseur résultant de chaque section. Compte-tenu de la pratique indiquée de la normale sortante de la section,  $N_i \geq 0$  correspond une poutre en traction, et  $N_i \leq 0$  à une poutre en compression.

### c - Méthode de Cramona

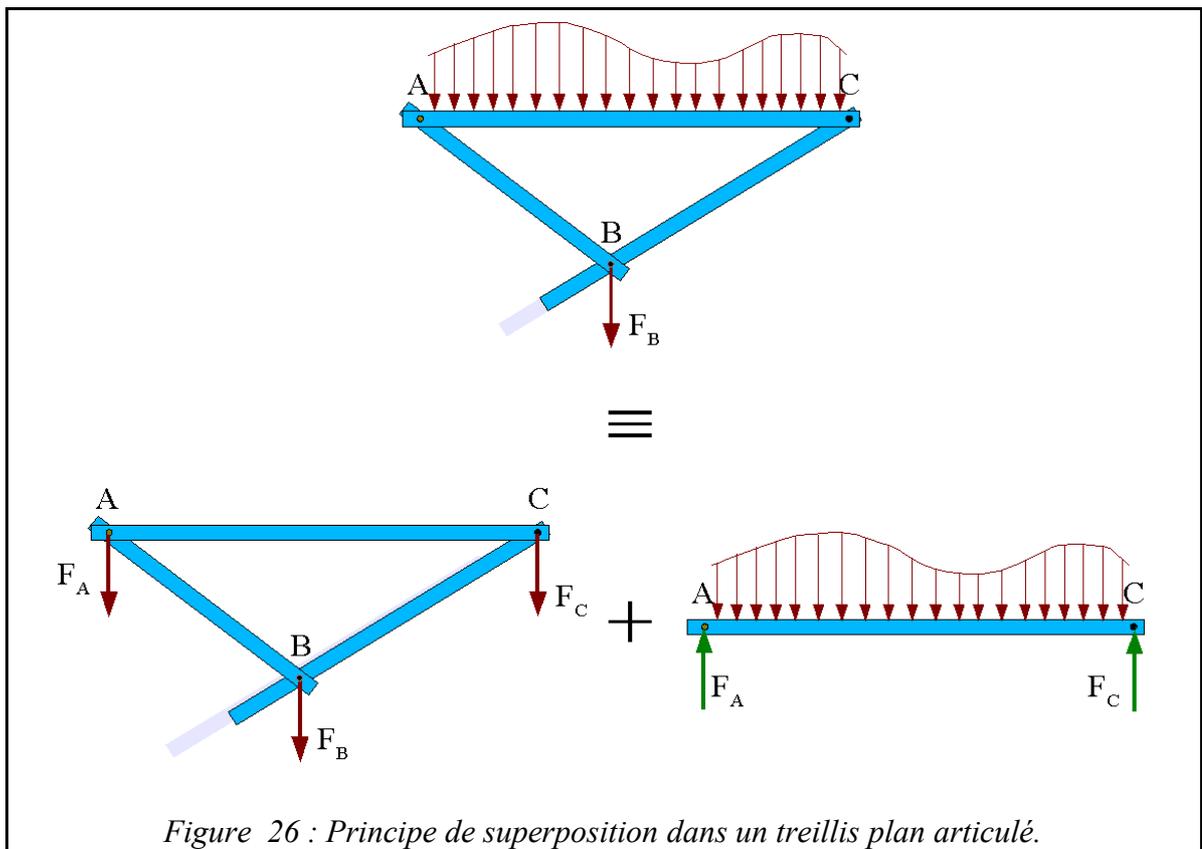
On fait l'équilibre des forces sur un noeud, en se limitant aux noeuds ayant deux inconnues seulement.



La méthode de Cramona, simple et rapide, se prête remarquablement bien à un prédimensionnement graphique.

**d - Problème d'efforts non appliqués aux noeuds**

On applique alors le théorème de superposition. Les problèmes suivants sont équivalents :



La formulation réalisée montre que l'on peut traiter séparément le problème du treillis plan

et celui de la flexion d'une de ses barres.

Les forces  $F_A$  et  $F_C$  sont déterminées en faisant l'équilibre en effort et en moment sur la poutre seule en flexion. Compte-tenu de la direction donnée au champ de pression  $p(x)$ ,

En écrivant le moment en A :  $\int p(x) \times AM(x) dx = F_C \times AC$

En écrivant l'équilibre des forces :  $\int p(x) dx + F_C + F_A = 0$

En particulier, si l'effort est un effort concentré  $F$  à une distance  $l_A$  de A et  $l_C$  de C,

$$F_C = F \frac{l_A}{l_A + l_C} \quad \text{et} \quad F_A = F \left( 1 - \frac{l_A}{l_A + l_C} \right)$$

#### 4.1.4 - Équation de la Chaînette

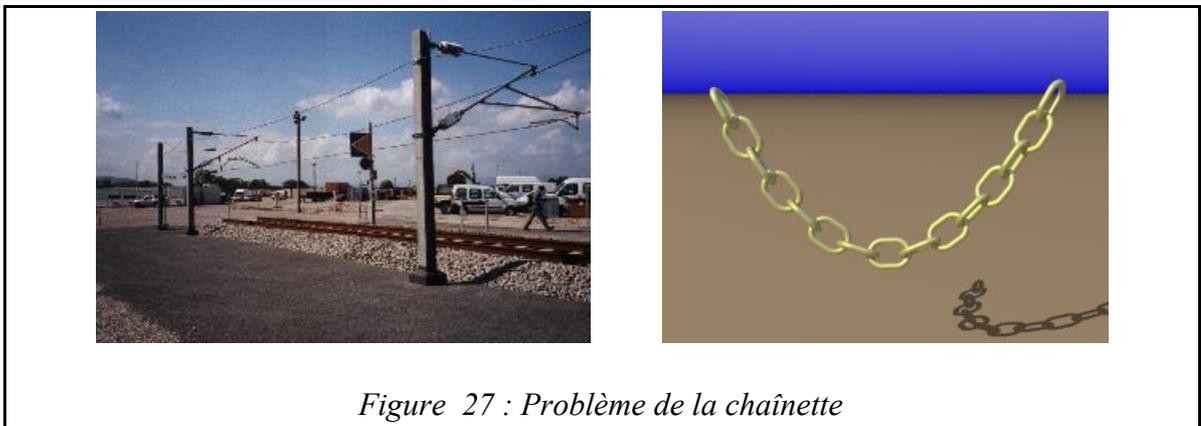


Figure 27 : Problème de la chaînette

La courbe de la chaînette est la courbe que prend spontanément un câble fin soumis à son propre poids. Dans ces conditions, chaque élément de la chaînette est en traction pure.

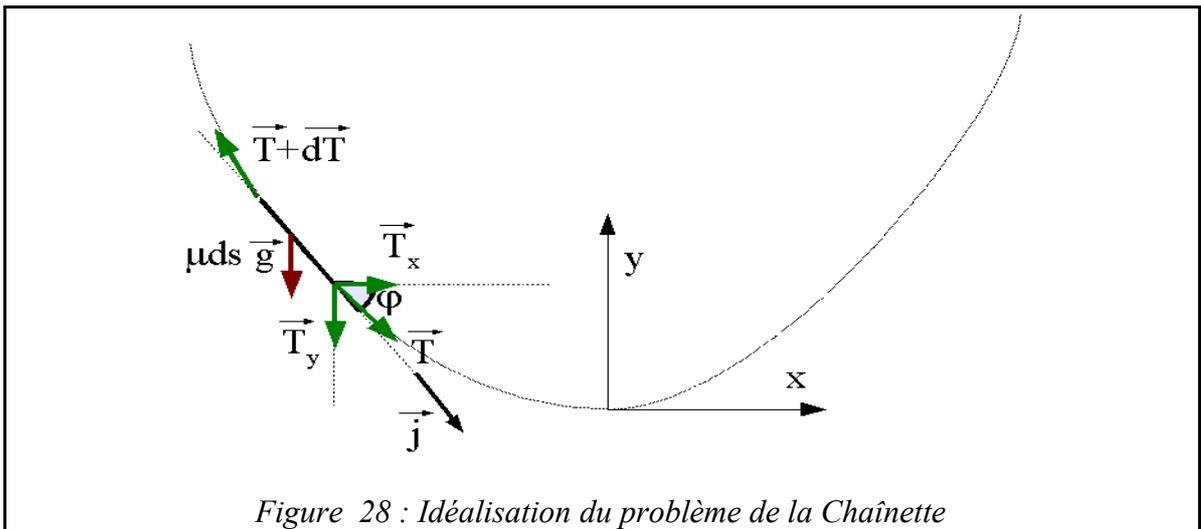


Figure 28 : Idéalisation du problème de la Chaînette

L'équilibre sur un élément du câble donne :  $d\vec{T} + \mu ds \vec{g} = \vec{0}$

Du fait que la chaînette ne peut pas supporter de moment de flexion,  $\frac{T_y}{T_x} = \tan \varphi$  .

En projetant selon x et selon y,

$$\begin{aligned} \frac{dT_x}{dl} &= 0 \\ \frac{dT_y}{dl} &= \mu g \end{aligned} \quad (41)$$

l'intégration de ces deux équations différentielles conduit à :

$$\begin{aligned} T_x &= T_{x0} \\ T_y &= \mu g l \end{aligned}$$

Le problème consiste maintenant à exprimer la variable  $l$  dans le repère cartésien et à exprimer les variations de hauteur  $y$  en fonction de  $x$ .

D'après ce qui précède,

$$\frac{T_y}{T_x} = \tan \varphi = \frac{\mu g l}{T_{x0}} \quad (42)$$

or,  $\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = y'$  . En utilisant le théorème de Pythagore,  $dl$  s'exprime :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} ,$$

$$\text{donc } l = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (43)$$

De (42) et (43) on tire :  $l = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{T_{x0}}{\mu g} y'$  , ce qui conduit après dérivation à l'Equation de la Chaînette.

$$x \sqrt{1 + y'^2} = \frac{T_{x0}}{\mu g} y'' = a y'' \quad (44)$$

Finalement, la solution de cette équation est  $y = a \{ \text{ch}(x/a) - 1 \}$  . On considère dans ce cas que le point le plus bas de chaînette, pour lequel la composante  $T_y$  est nulle, est également le centre du repère.

Enfin, il faut évaluer la tension  $T$  que subit le câble en tout point.

Géométriquement, on a  $T = \frac{T_{x0}}{\cos \varphi}$  , soit, en utilisant la définition de  $y'$ ,  $T = T_{x0} \sqrt{1 + y'^2}$  .

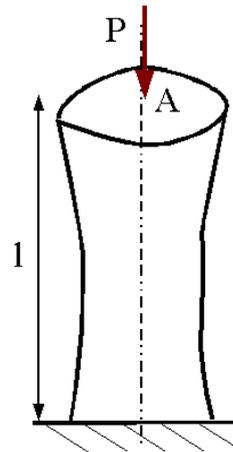
En dérivant le résultat de (44), et en utilisant les propriétés des fonctions sinus et cosinus hyperbolique,

$$T = T_{x0} \text{ch}(x/a) , \text{ soit encore : } T = \mu g a \text{ch}\left(\frac{x}{a}\right) = \mu g y .$$

## 4.1.5 - Exercices

### a - Exercice 1

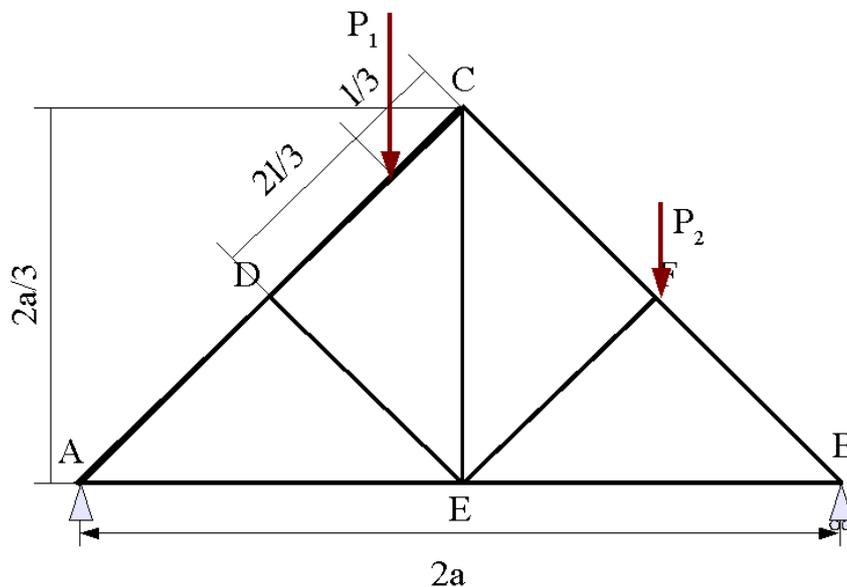
Trouver comment faire évoluer la section  $S$  d'une tour pour qu'il soit possible de l'élever à une hauteur quelconque  $l$ , et ceci en employant au mieux la matière nécessaire à son édification (poids volumique  $\mu$ , résistance pratique  $R_p$ ). Une charge extérieure  $P$  est concentrée au sommet au point A. De combien se déplace le point A ?



### b - Exercice 2

Soit le système articulé ABCDEF. Déterminer les efforts dans les barres par la méthode de Ritter.

Les charges ont pour valeur  $P_2=500$  daN,  $P_1 = 1500$  daN. On donne  $a = 3$  m.



### c - Exercice 3

Soit un câble d'acier de diamètre 5 mm. Ce câble est tendu entre deux poteaux distants de

50 m et d'une hauteur de 3 m. On donne  $E=210 \text{ kN/mm}^2$  et  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ m/m/}^\circ\text{K}$ .

- 1- Donner l'expression littérale de la flèche maximale.
- 2- Quelle tension est-il nécessaire d'appliquer sur le câble pour que sa flèche soit inférieure à 5 fois la hauteur ?
- 3- Quelle est la longueur de câble entre les poteaux ? Donnez-en d'abord une expression littérale.
- 4- Quelle est alors la contrainte maximale ? Comparez-la à la contrainte d'usage ( $235 \text{ N/mm}^2$ ). Considérant l'expression de la contrainte maximale, commentez la validité du modèle proposé.
- 5- On suppose une variation de température de  $-40 \text{ }^\circ\text{C}$  ( $-10 \text{ }^\circ\text{C}$  l'hiver,  $+30 \text{ }^\circ\text{C}$  l'été). Quelle est alors la longueur du câble ? Que peut-il se passer en pratique? Comment peut-on dimensionner ce problème ?

## 4.2 - Cisaillement

### 4.2.1 - Modélisation

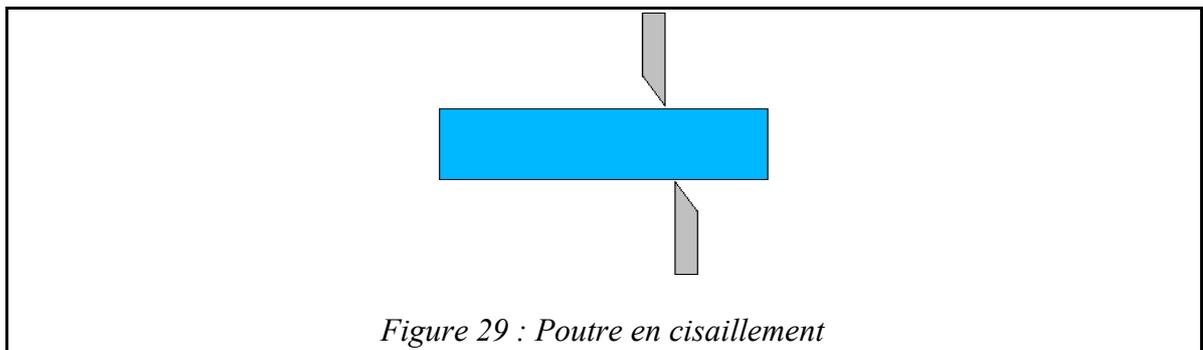


Figure 29 : Poutre en cisaillement

$N, M_f, M_t = 0, T \neq 0$ .

La loi de comportement se réduit donc à :

$$T_{13} = \frac{\gamma_{13}^0}{2} G S \quad (45)$$

La contrainte de cisaillement est bien  $\sigma_{13} = \frac{T_{13}}{S}$  et la limite de résistance  $|\sigma_{13}| \leq R_p$ .

L'énergie élastique emmagasinée par unité de volume est :  $\frac{dU_d}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \times \left( \frac{T_{13}}{S} \right)^2$

Le cisaillement pur est très rare. Il est prépondérant dans les opérations de poinçonnage, dans les liaisons rivetées, clavetées, ou encore vissées. Attention, on n'oublie pas que de la traction pure induit à  $45^\circ$  du cisaillement !

Les matériaux, comme on le verra par la suite, cassent en général à cause du cisaillement, comme le montre la figure 30.

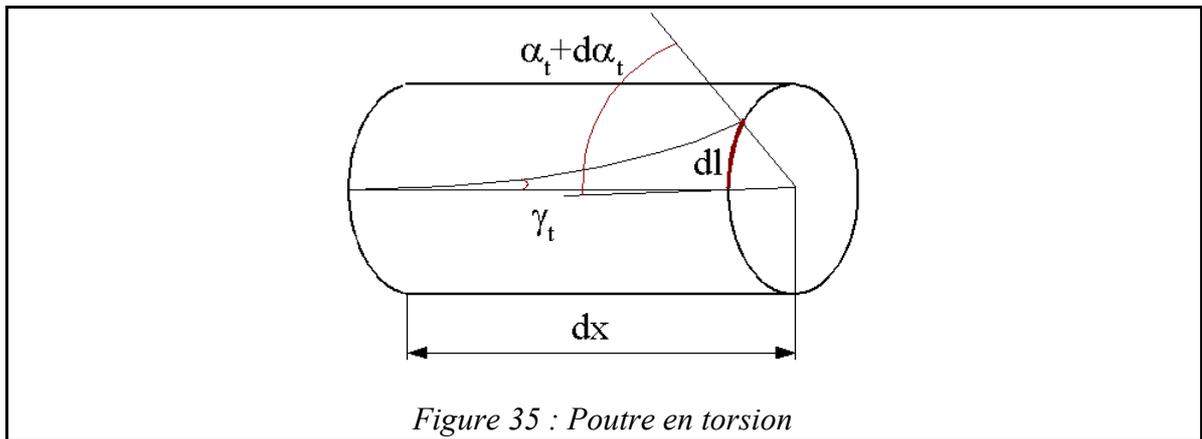


#### 4.2.2 - Essais de cisaillement classiques

Les essais de cisaillement ne sont pas très utiles pour les matériaux isotropes. Un essai de traction suffit à les caractériser. En revanche, si le matériau est anisotrope, toutes les composantes doivent être déterminées indépendamment. On utilise alors des tests spécifiques, tels que présentés Figure 31 à 33.

<p>Figure 31 : Essai sur rectangle articulé (Géomécanique, tissus)</p>	<p>Figure 32 : Essai d'Iosipescu (composites, bois...)</p>
<p>Figure 33 : Essai de « Short beam shear test » (composites)</p>	<p>Figure 34 : Essai de tenue d'une colle au cisaillement (essai ASTM)</p>





$\frac{d \alpha_t}{dx}$  est la variation angulaire par unité de longueur.

$\gamma_t$  est l'angle de cisaillement unitaire. Il s'agit de la déformation en torsion.

L'objectif de cette modélisation est d'exprimer le moment de torsion par rapport à l'angle unitaire  $\theta$ ; ce sont les paramètres de la structure en torsion.

Le moment de torsion dans un repère cylindrique devient :

$$M_t = \iint_S x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12} dS = \iint_S \tau r dS$$

soit, sachant que  $\tau = G \gamma$  et en considérant que la déformation en cisaillement augmente linéairement avec le rayon (non-gauchissement de la surface), soit  $\gamma = r \theta$ ,

$$M_t = G \theta \iint_S r^2 dS = G \theta I_t \quad (46)$$

$I_t$  est l'inertie de torsion de la section réduite au centre de gravité.

Compte tenu des équations précédentes,

$$\tau = G \theta r = M_t \frac{r}{I_t} \quad (47)$$

Le dimensionnement d'une poutre en torsion fait donc appel au cisaillement maximum, comme précédemment. Cependant, pour les machines tournantes, le critère vibratoire est beaucoup plus important.

L'énergie élastique par unité de volume emmagasinée par la torsion s'écrit :

$$\text{est : } \frac{dU_d}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{G I_t}$$

Les expressions précédentes sont valables pour une poutre circulaire. Elles restent acceptables dans le cas des sections symétriques (rectangulaires, elliptiques ou en I), mais

donnent des résultats erronés pour toutes les sections dissymétriques (L,T, U ou ailes). Dans ces cas-là, le centre de torsion et le centre d'inertie ne sont pas confondus.

### 4.3.2 - Exercices

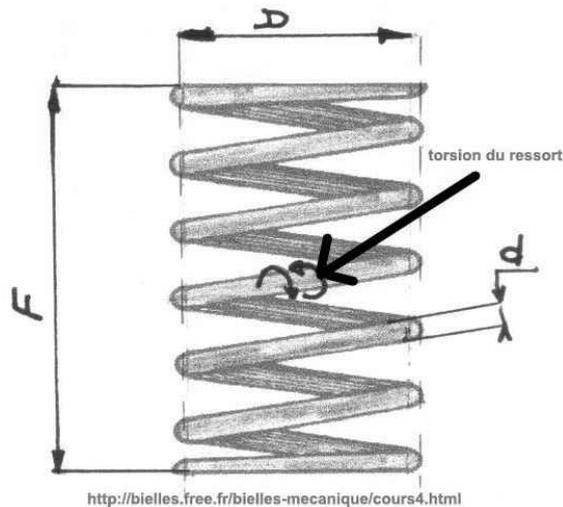
#### a - Calcul d'inertie de torsion

Donnez l'inertie de torsion d'une poutre circulaire à section pleine, puis celle d'un tube. Considérant un tube dont l'épaisseur est égale à  $2/10$  du diamètre, quel est le gain de poids relatif par rapport à la section pleine de même rigidité ?

#### b - Ressort de torsion

L'objectif de ce calcul très classique est d'évaluer la raideur d'un ressort à spirale (ressort de torsion, sous la forme  $F=kx$ ).

On considère  $n$  spires complètes.  $R=D/2$  le rayon d'enroulement,  $d$  le diamètre du fil, et  $\beta$  l'inclinaison des spires, supposées petites.



1- Faire une coupe et écrire le torseur résultant ( $N$ ,  $T$ ,  $M_r$  et  $M_t$ ) en conservant la partie haute du ressort.

2- Linéariser les relations sachant que  $\beta$  est petit.

On supposera par la suite que  $N$ ,  $T$  et  $M_r$  ont un effet négligeable devant  $M_t$ .

3- Écrire la variation de hauteur  $\Delta f$  sur une spire en fonction de l'angle de torsion  $\theta$ .

4- Substituer à  $\theta$ ,  $M_t$  puis  $F$  dans l'écriture de  $\Delta f$ .

5- Exprimer enfin la flèche  $f$  en fonction de  $F$ . En déduire la raideur du ressort.

## 4.4 - Flexion

### 4.4.1 - Modélisation

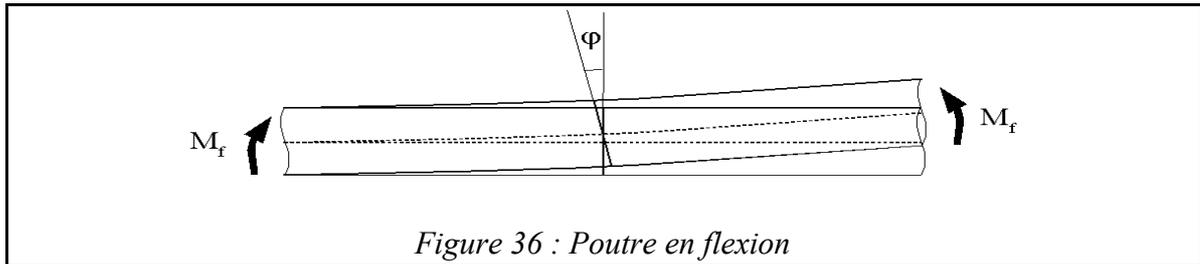


Figure 36 : Poutre en flexion

le modèle le plus simple de flexion concerne la flexion plane de poutres droites à faible courbure. D'après la description donnée ci-avant,

$$M_f = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} E \iint_S x_3^2 dS = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} E I_f$$

$I_f$  est l'inertie de flexion de la poutre. En l'absence de cisaillement, l'angle  $\varphi$  est lié au déplacement vertical :

$$\gamma_{13} = 2 \cdot \epsilon_{13} = \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} + \varphi_1^3 + x_2 \frac{\partial \varphi_2^3}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \epsilon_{33}}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1^3 = -\frac{\partial u_3^0}{\partial x_1}$$

Il vient la relation classique de flexion :

$$M_f = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} E I_f \quad (48)$$

La déformation induite par la flexion est  $\epsilon_{11} = x_3 \frac{\partial \varphi_1^3}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}$  et la contrainte

$$\sigma_{11} = -E \times x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = x_3 \frac{M_f}{I_f} \quad .$$

La contrainte est extrémale sur le bord de la structure. Le critère dimensionnant associé peut être en contrainte maximale ou minimale, mais aussi, puisqu'on a de la compression, en flambement local ou global.

La flexion induit des déplacements importants. Ce peut être un critère dimensionnant (arbre frottant sur un carter, angle de rotulage des paliers, ...).

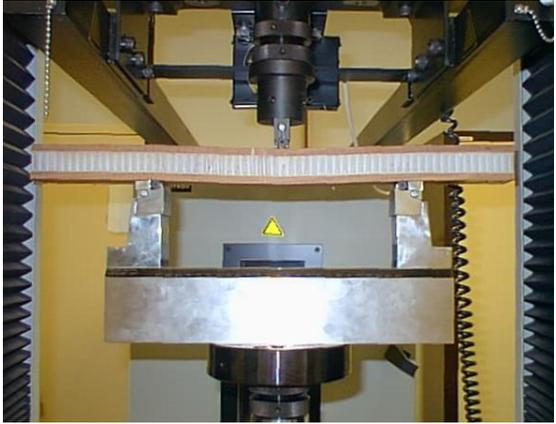
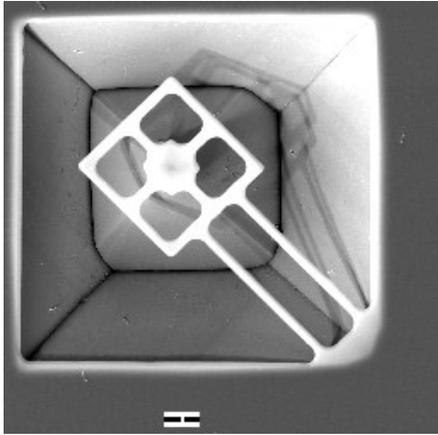
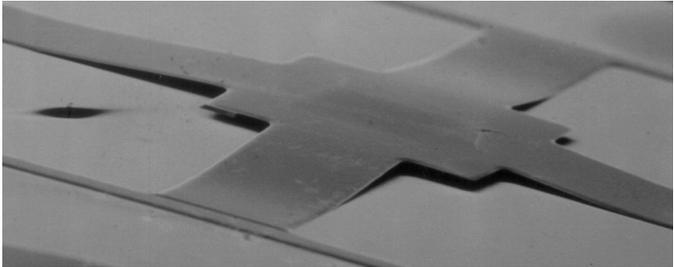
On notera que contrairement au cas de la traction, le volume affecté par la contrainte maximale est plus faible (théoriquement nul). Si la rupture est fragile, ce volume est essentiel puisque la rupture fragile repose sur l'occurrence d'un défaut dans la zone sollicitée. On est amené à définir un volume équivalent, c'est-à-dire une épaisseur à la peau en sollicitation maximale.

Le dimensionnement à la flexion est essentiel pour les structures de génie civil. On remarquera la plus grande complexité du problème car le béton a une résistance à la compression mais pas à la traction c'est pourquoi il est armé. On n'a plus de matériau homogène et l'écriture de la loi de comportement est changée.

L'énergie élastique par unité de volume emmagasinée par la flexion s'écrit :

$$\frac{dU_d}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{EI_f}$$

#### 4.4.2 - Exemples

	
<p>Flexion d'une poutre béton</p>	<p>Essai de flexion sur sandwich</p>
	
<p>Obturbateur pour micro-fluidique</p>	<p>Micro-interrupteur pour portable</p>

#### 4.4.3 - Introduction du cisaillement

Comme il a été présenté au chapitre 1, l'équilibre en moment sur un élément de poutre donne :  $T = -\frac{dM_f}{dx}$ . Il y a donc du cisaillement dès lors qu'il y a gradient du moment de flexion.

Le cisaillement varie en fonction de la hauteur à laquelle on se situe dans la poutre. En l'absence de cohésion, la poutre se déformerait comme sur la figure 37. C'est donc bien le

cisaillement qui assure la cohésion de l'ensemble. L'écriture des cisaillements réciproques sur une face horizontale ou verticale conduit à la modélisation proposée figure 38. On coupe un élément  $\delta x$  dans sa longueur. Le cisaillement est nul sur le bord libre. Le cisaillement à la cote  $z_0$  est donné par l'écriture de l'équilibre selon  $x$  :

$$\iint_{S'} \sigma_{xx}(x+\delta x) dx dz - \iint_{S'} \sigma_{xx}(x) dx dz - \iint_{S'} \tau_{z_0} dx dy = 0$$

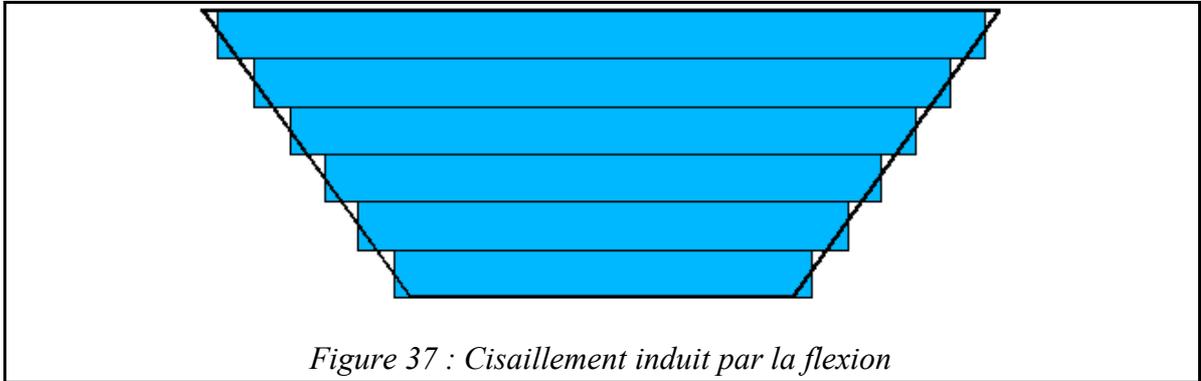


Figure 37 : Cisaillement induit par la flexion

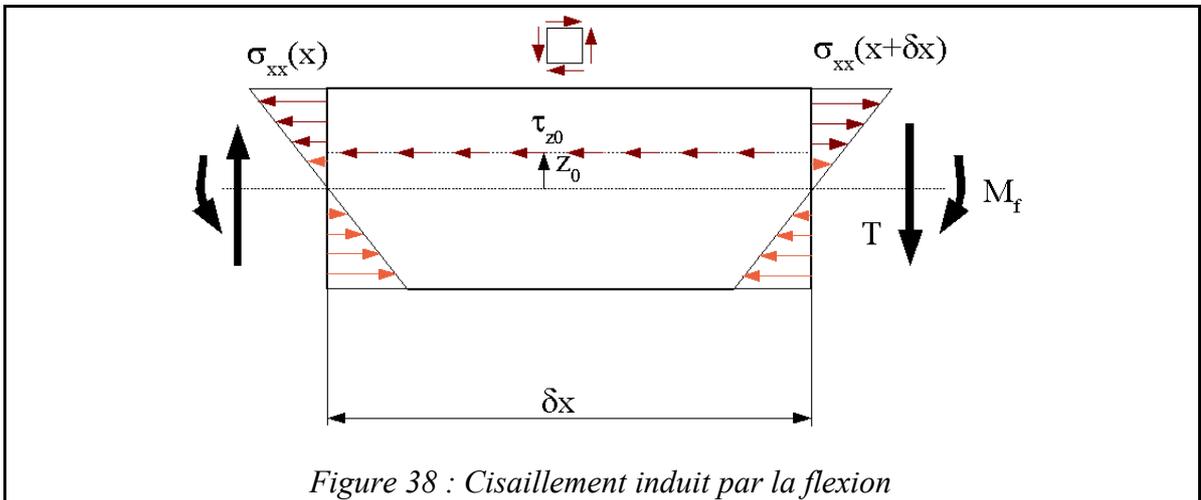


Figure 38 : Cisaillement induit par la flexion

En supposant le cisaillement constant sur la surface  $S''$ ,  $\iint_{S'} \tau_{z_0} dx dy = \tau_{z_0} b(z_0) \delta x$  .

Si l'on exprime les contraintes avec le moment de flexion,  $\iint_{S'} \sigma_{xx}(x+\delta x) dx dz - \iint_{S'} \sigma_{xx} dx dz = \iint_{S'} \frac{M_f(x+\delta x) - M_f(x)}{I} dx dz$  .

La variation du moment de flexion par unité de longueur est égale et opposée au cisaillement. Il vient donc :

$$\iint_{S'} \frac{M_f(x+\delta x) - M_f(x)}{I_f} z dx dz = \iint_{S'} \frac{T \delta x}{I_f} z dx dz = -\frac{T \delta x}{I_f} \iint_{S'} z dx dz$$

Ainsi, on déduit le cisaillement moyen en  $z_0$  :

$$\tau_c(z_0) = -\frac{T}{b(z_0) \cdot I_f} \iint_{S'} z dx dz \quad (49)$$

### **Application : poutres rectangulaires de hauteur $h$ et de largeur $b$**

$$\tau_c(z_0) = -\frac{3 \cdot T}{2 \cdot S} \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot z_0}{h} \right)^2 \right]$$

la variation de cisaillement est donc parabolique et sa valeur maximale  $\tau_c(0) = -\frac{3 \cdot T}{2 \cdot S}$ . On notera que l'approche 3D->1D présentée auparavant n'est pas assez riche pour décrire une telle variation, et ne permettrait pas le respect de la condition aux limites de cisaillement nul sur le bord supérieur ou inférieur de la poutre.

#### **4.4.4 - Extension de la flexion plane sur poutre droites à faible courbure**

- La flexion déviée se produit sur les structures chargées en dehors de leurs axes principaux. Il faut revenir alors à l'écriture de la théorie de poutre et aux intégrales de l'équation (34).
- Les poutres à faibles courbures sont étudiées de la même manière que les poutres planes. On considère la courbure faible si la hauteur de la poutre est inférieure au quart du rayon de courbure. Dans le cas contraire, on parle de poutres à fortes courbures ; il faut alors ré-écrire les équations d'équilibre en tenant compte de la courbure.
- Enfin, la stabilité des poutres en flexion peut être remise en cause par des phénomènes de flambement : supposons une poutre dont la hauteur est plus grande que la largeur chargée verticalement. En fonction de la portée de la poutre, elle peut basculer sur sa largeur, beaucoup moins rigide et entraîner la destruction de l'ouvrage.

#### **4.4.5 - Exercices**

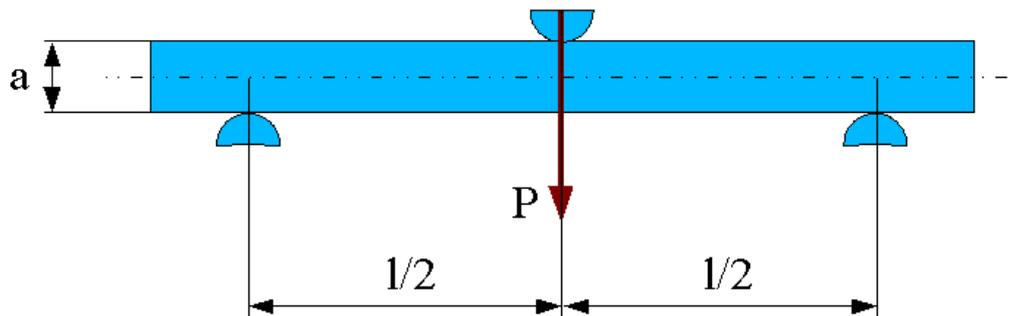
##### **a - Exercice 1 : Calcul d'inertie**

- 1 – Calculer l'inertie de flexion pour une poutre rectangulaire pleine puis creuse et pour une circulaire pleine puis creuse.
- 2 – Soit une poutre circulaire en acier de diamètre  $D$ . Calculer sa masse et sa rigidité de flexion.
- 3 – Soit une poutre circulaire creuse de diamètre moyen  $D'$  et d'épaisseur  $D'/10$ . Donnez sa rigidité de flexion et sa masse.
- 4 – Quel devrait être le diamètre  $D$  de la poutre pleine pour que sa rigidité soit la même que celle de la poutre creuse ?
- 5 – Quelle est alors la masse de la poutre pleine ? Exprimer le gain de poids en prenant un tube.
- 6 – Donnez les rigidités en traction de chacune des poutres. Que peut-on dire de l'utilisation de poutre creuses ?
- 7 – Quels risques spécifiques peut présenter une structure creuse ?

### **b - Exercice 2 : Flexion 3 points**

On considère une poutre appuyée sur deux demi-cylindres. Un demi-cylindre supérieur permet d'appliquer un déplacement et de mesurer l'effort produit.

- 1 – Calculer le moment de flexion en tout point de la structure
- 2 – Donnez les conditions aux limites, puis les réactions au niveau des supports.
- 3 – Donnez la flèche en fonction de la charge exercée.
- 4 – Quelle est la contrainte  $\sigma_{II}$  maximale ?
- 5 – Évaluez le cisaillement dans chaque section. Que vaut le cisaillement maximum ?
- 6 – La rupture en flexion apparaît si  $\sigma_{II} = R_p$  et que la rupture en cisaillement apparaît si  $\tau_c = R_p' = 2/3 R_p$ . Quel rapport d'élancement permet une rupture en cisaillement de la poutre ?
- 7 – l'essai de flexion 3 points à bords rapprochés est un essai normalisé permettant la mesure du cisaillement ultime. Discutez de la validité de ce test notamment en considérant les rayons de courbure des appuis.



## 5 - Approches énergétiques

### 5.1 - Principe

Les approches énergétiques sont nécessaires pour la résolution de problèmes hyperstatiques. Mais ces approches sont très utiles également dans les cas de chargements complexes pour lesquels une solution analytique exacte est trop difficile à établir. On obtient alors une solution approchée dont il faut vérifier la pertinence.

L'approche décrite ci-après reprend les hypothèses géométriques de la RDM, auxquelles on ajoute :

1. la loi de comportement est élastique,
2. la réversibilité de la transformation : les états de chargement successifs ne dépendent pas du chemin de chargement, et l'accélération est négligeable,
3. l'état est dit « naturel » ou « quasi-naturel », ce qui signifie que l'énergie avant chargement est nul.

Dans ces conditions, la solution est unique.

L'énergie  $U$  emmagasinée par une structure élastique est la somme de toutes les énergies appliquées au système pour le déformer depuis son état initial jusqu'à son état final. C'est aussi le travail  $W_e$  des forces extérieures appliquées  $P_i$  effectué sur les déplacements correspondants  $\delta_i$ , pris dans le sens de  $P_i$ .

Par conséquent,

- $U \geq 0$ ,
- $U$  ne dépend pas des états intermédiaires,
- compte-tenu des hypothèses, il n'y a pas de perte, par exemple par frottement,
- l'énergie cinétique est nulle.

En supposant un ensemble de sollicitations composées,

$$U = \frac{1}{2} \int_s \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS_R} + \frac{M_f^2}{EI_f} + \frac{M_t^2}{GI_t} ds = \sum P_i \delta_i \quad (50)$$

On note :

- $S$  la section soumise à la traction,
- $S_R$  est la section affectée par le cisaillement,
- $s$  la coordonnée curviligne de la barre,
- $I_f$  et  $I_t$  les inerties de flexion et de torsion,
- $N$ ,  $T$ ,  $M_f$  et  $M_t$  les éléments de réduction sur la section courant,
- $P_i$  et  $\delta_i$  les efforts extérieurs à la barre et les déplacements induits.

## 5.2 - Théorème de Maxwell Betti

### 5.2.1 - Coefficient d'influence

Supposons un chargement  $P_j$  à une distance  $l_{ij}$  du point  $A_i$  où a lieu un autre effort.  $P_i$  induit un déplacement  $\delta_i$ .

$$\delta_i = a_{ij} P_j$$

$a_{ij}$  est le coefficient d'influence de la force  $P_j$  au point  $A_i$ .

Si  $n$  forces sont appliquées sur le système, le principe de superposition permet d'écrire :

$$\delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} P_j$$

L'énergie emmagasinée est donc :

$$U = \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N a_{ij} P_j P_i \quad (51)$$

### 5.2.2 - Réciprocité

Le théorème de Maxwell Betti énonce que le déplacement du point d'application de  $P_i$  le long de sa droite d'action lorsque la structure est chargée par une force  $P_j$  unitaire est égal au déplacement du point d'application de  $P_j$  le long de sa droite d'action lorsque la structure est chargée par une force  $P_i$  unitaire.

Ce qui signifie que  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Démonstration : calculons le travail effectué par les charges  $P_i$  et  $P_j$  dans les deux cas suivants :

- La structure est chargée par  $P_i$  puis  $P_j$ .

Lors du chargement de  $P_i$  : le travail de  $P_i$  est  $\frac{1}{2} P_i \delta_i^i$  et  $P_j = 0$  donc ne travaille pas.

Lors du chargement de  $P_j$  :  $P_i$  est constant et son travail est  $P_i \delta_j^i$  et le travail de  $P_j$  est  $\frac{1}{2} P_j \delta_j^j$ .

$$\text{Nous avons donc : } W_I = \frac{1}{2} P_i \delta_i^i + P_i \delta_j^i + \frac{1}{2} P_j \delta_j^j .$$

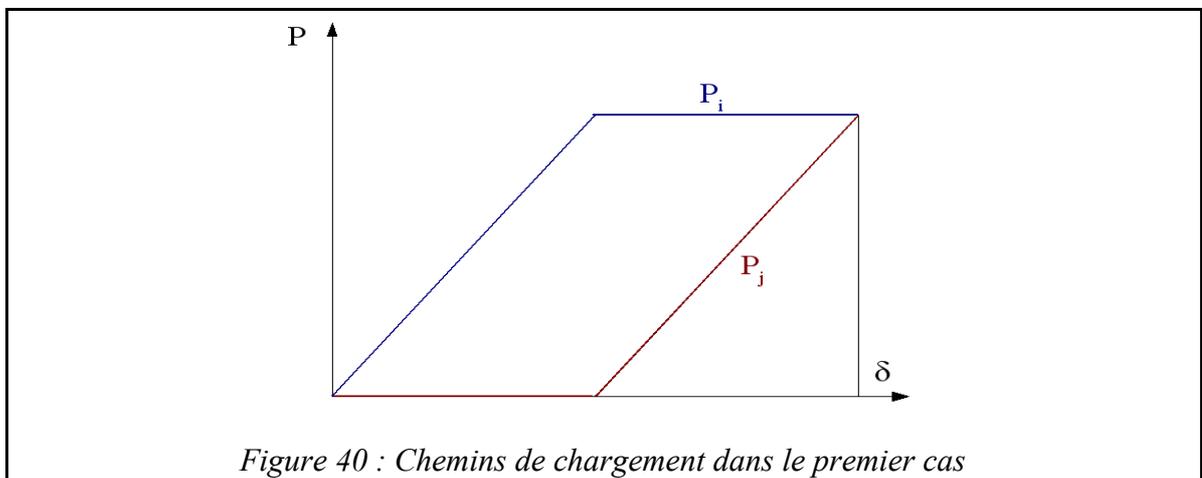
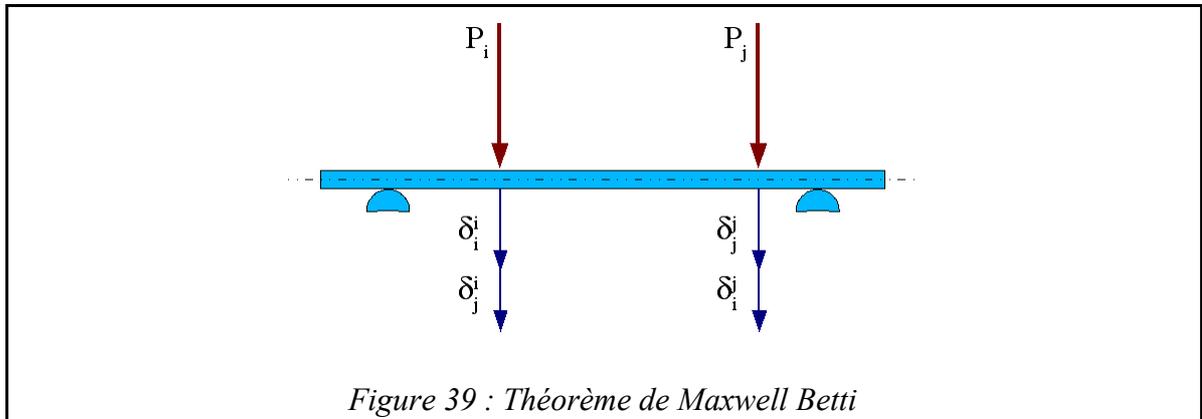
- La structure est chargée par  $P_j$  puis  $P_i$ ,

$$\text{De la même manière, } W_{II} = \frac{1}{2} P_i \delta_i^i + P_j \delta_i^j + \frac{1}{2} P_j \delta_j^j .$$

La structure étant élastique et les processus étant tous réversibles, on peut affirmer que

$$W_I = W_{II}, \text{ soit : } \frac{1}{2} P_i \delta_i^i + P_i \delta_i^j + \frac{1}{2} P_j \delta_j^j = \frac{1}{2} P_i \delta_i^i + P_i \delta_i^j + \frac{1}{2} P_j \delta_j^j .$$

Il vient  $P_i \delta_i^j = P_j \delta_j^i$ , soit  $\frac{P_i}{\delta_j^i} = \frac{P_j}{\delta_i^j}$  et finalement  $a_{ij} = a_{ji}$ .



### 5.3 - Théorème de Castigliano

#### 5.3.1 - Énoncé

En tout point  $k$  d'un système élastique où est appliquée une force  $P_k$ , le déplacement  $\delta_k$  dans la direction de cette force est égal à la dérivée partielle de l'énergie interne de ce système par rapport à  $P_k$ .

Démonstration :

$$\text{D'après (51), } \frac{\partial U}{\partial P_k} = \frac{1}{2} \sum (a_{ik} + a_{ki}) P_i = \sum a_{ik} P_i = \delta_k$$

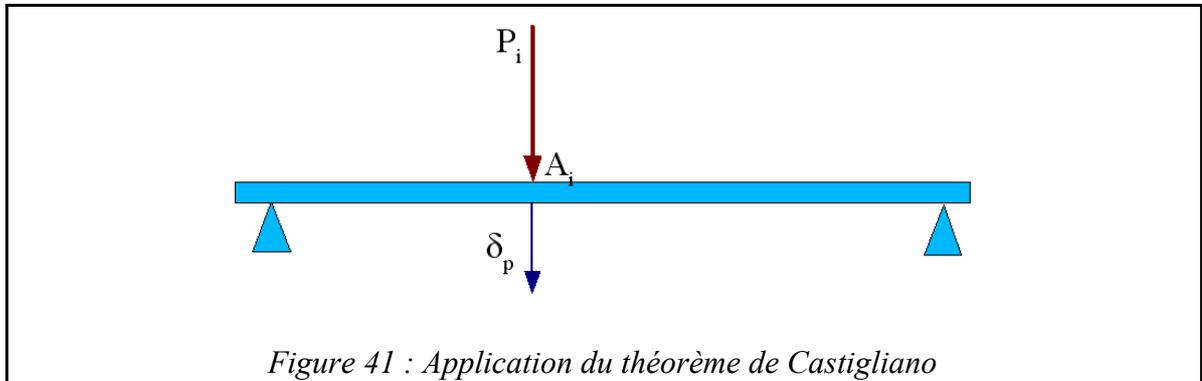
Les conditions d'application de ce théorème sont les mêmes que précédemment. Il faut de plus que le système soit statiquement admissible, c'est à dire que toutes les réactions soient prises en compte.

Remarque : on peut également montrer que  $\frac{\partial U}{\partial \delta_k} = P_k$ .

### 5.3.2 - Calcul de déplacements

La méthode générale consiste à faire la liste des sollicitations et donc des éléments de réduction par poutre, écrire l'énergie élastique emmagasinée, puis écrire les dérivées par rapport à chaque effort.

#### a - Exemple



$$U = U_1 + U_2 = \int \frac{1}{2} \frac{M_f^2}{EI}$$

le déplacement en  $A_i$  est donné par  $\frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{EI} \frac{\partial M_f^2}{\partial P_i} ds$

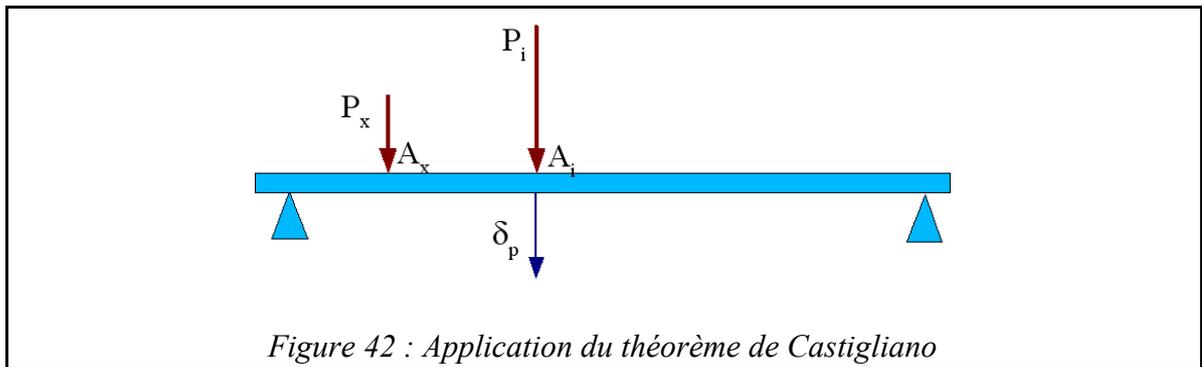
Sur la première partie,  $M_f = P_i x \frac{l_2}{l_1 + l_2}$  et  $\frac{\partial M_f}{\partial P_i} = x \frac{l_2}{l_1 + l_2}$

Sur la seconde,  $M_f = P_i (l_1 + l_2 - x) \frac{l_1}{l_1 + l_2}$  et  $\frac{\partial M_f}{\partial P_i} = (l_1 + l_2 - x) \frac{l_1}{l_1 + l_2}$

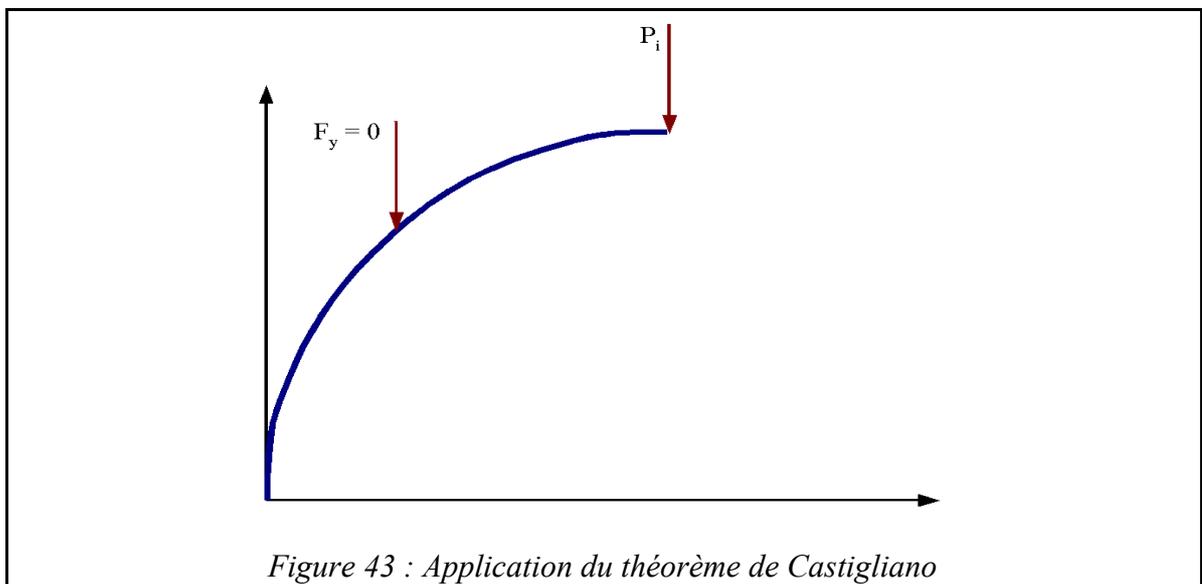
$$\text{Donc } \delta_i = \frac{1}{EI} \left( \int_0^{l_1} P_i x^2 \left( \frac{l_2}{l_1 + l_2} \right)^2 dx + \int_{l_1}^{l_1 + l_2} P_i (l_1 + l_2 - x)^2 \left( \frac{l_1}{l_1 + l_2} \right)^2 dx \right)$$

$$\text{soit : } \delta_i = \frac{P_i}{3EI} \frac{l_1^2 l_2^2}{(l_1 + l_2)}$$

Si l'on souhaite connaître le déplacement en un point quelconque, il suffit de déclarer en ce point une force dont la direction est celle du déplacement que l'on souhaite connaître et dont l'intensité est nulle.



**b - Cas particulier : Treillis circulaire**



La poutre est supposée en flexion pur. Dans ce cas, entre A et M, le moment de flexion lié à  $P_y$  est :

Zone	$M_f$	$\partial M_f / \partial P_x$
AM	$-P_i R \cos \phi - P_y R (\cos \theta - \cos \phi)$	$-R (\cos \theta - \cos \phi)$
MB	$-P_i R \cos \phi$	0

Le déplacement du point M est donné par :  $\delta_M = \frac{\partial U}{\partial F_y} \Big|_{F_y=0}$

$$\delta_M = \int_{s_A}^{s_M} \frac{M_f|_{AM}}{EI_f} \partial \frac{M_f|_{AM}}{\partial F_y} ds + \int_{s_M}^{s_B} \frac{M_f|_{MB}}{EI_f} \partial \frac{M_f|_{MB}}{\partial F_y} ds$$

En substituant  $M_f$  et  $\partial M_f / \partial P_x$  à leurs expressions respectives, il vient :

$$\delta_M = \int_{s_A}^{s_M} \frac{P_x R \cos \phi + P_y R (\cos \theta - \cos \phi)}{EI_f} R (\cos \theta - \cos \phi) ds$$

la variable d'intégration doit être reformulée :  $ds = R d\phi$  avec  $\phi$  variant de 0 à  $\theta$ .  
d'autre par,  $P_y = 0$ .

$$\delta_M = \int_0^\theta \frac{P_x R \cos \phi}{EI_f} R (\cos \theta - \cos \phi) R d\phi$$

L'intégration de  $\delta_M$  donne finalement :

$$\delta_M = \frac{P_x R^3}{2EI_f} \left[ \theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]$$

## 5.4 - Systèmes hyperstatiques

### 5.4.1 - Méthode générale

- On écrit le schéma de calcul, puis on détermine l'ordre d'hyperstaticité.  $N_{HS} = n_R - n_E$ .
- On choisit les inconnues hyperstatiques  $R_j$ .
- On écrit l'équilibre global, c'est à dire les réactions en fonction des efforts appliqués et des inconnues hyperstatiques.

On a donc  $N_H$  relations linéaires de la forme :  $[a_{ij}][R_j] = [B_i]$

- On écrit les éléments de réduction  $N$ ,  $T$ ,  $M_f$  et  $M_t$  en fonction des efforts extérieurs et des inconnues hyperstatiques.
- On choisit une méthode pour déterminer les inconnues hyperstatiques
  - méthode énergétique (théorème de Menabrea)
  - méthode de la déformée (explicitation des conditions aux limites en déplacement)
  - formules de Bresse (non développée ici)
  - principe de superposition
- On reporte les inconnues hyperstatiques dans l'expression des éléments de réduction. Le problème est alors équivalent à un problème isostatique.

### 5.4.2 - Théorème de Menabrea

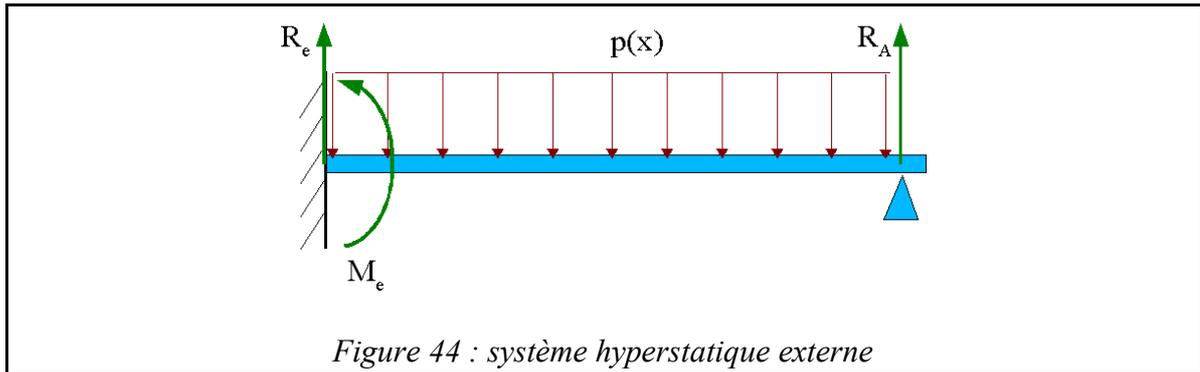
#### a - Énoncé

Dans un système hyperstatique à liaisons rigides, les inconnues hyperstatiques  $R_j$  prennent des valeurs telles que l'énergie du système soit minimal par rapport à ces inconnues. Il vient donc :

$$\frac{\partial U}{\partial P_k} = 0 = \delta_k$$

L'inconnue hyperstatique ne travaille donc pas, et le déplacement est nul, conformément aux conditions aux limites.

## b - Application



- Réactions :  $R$ ,  $R_e$ ,  $M_e$
- hyperstaticité :  $3-2 = 1$   
on choisi  $R_A$  comme inconnue hyperstatique. Elle est maintenant considérée comme une force extérieure comme les autres.

- Équilibre global :  $R_e - p(x) L + R_A = 0 \Rightarrow R_e = p(x) L - R_A$   
et  $M_e + R l - p l/2 = 0$

- Éléments de réduction :

$$M_f + R_A(l-x) - \int_x^l p(\lambda)(l-x) d\lambda = 0$$

$$\text{soit } M_f = \frac{p}{2}(l-x)^2 - R_A(l-x)$$

- Application du théorème de Menabrea

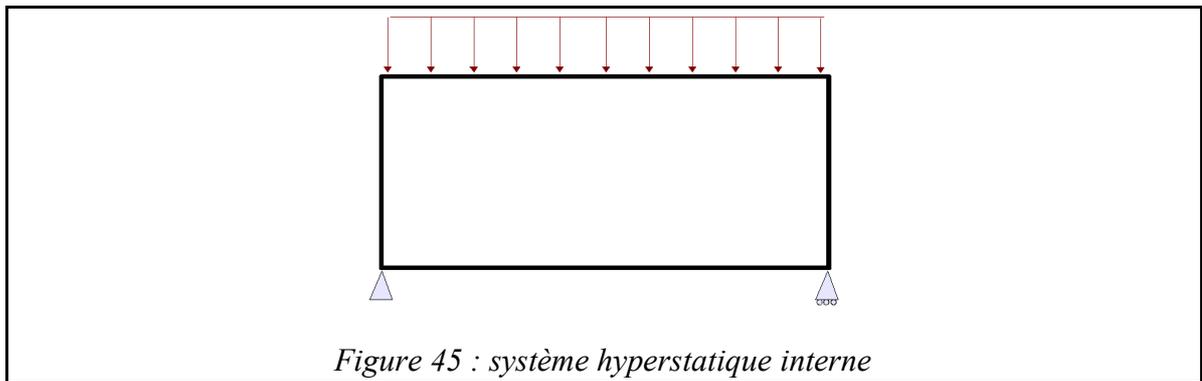
$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^l \frac{M_f}{EI_f} \frac{\partial M_f}{\partial R_A} dx$$

$$\frac{\partial M_f}{\partial R_A} = -(l-x)$$

$$\text{la résolution de } \frac{\partial U}{\partial R_A} = 0 \text{ conduit à } R_A = \frac{3}{8} pl$$

### 5.4.3 - Hyperstaticité interne

L'hyperstaticité telle que vue précédemment est dite *externe* car liée à l'application de plus de conditions aux limites que nécessaire à l'équilibre. Il existe également une hyperstaticité *interne* liée à un système élastique redondant.



Le degré d'hyperstaticité n'est pas connu a priori. On va dans ce cas faire des coupes permettant de relacher chacun des éléments de réduction. Ces coupes sont appelées *coupures simples*. Elles peuvent être symbolisées par :

- une glissière longitudinale pour annuler  $N$
- une articulation pour annuler  $M_f$
- une glissière transversale pour annuler  $T$
- une butée pour annuler  $M_t$

La coupe réelle est la superposition de ces 4 coupes. Pour connaître le degré d'hyperstaticité, il faut faire successivement chacune des coupes jusqu'à rompre l'équilibre des barres coupées.

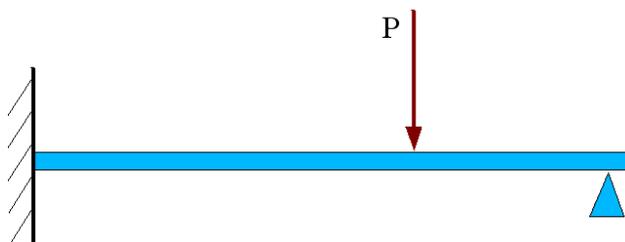
Les éléments de réduction ainsi libérés sont ré-introduits comme chargements extérieurs, puis la résolution se fait comme précédemment en écrivant la continuité de la matière, soit :

$$\frac{\partial U}{\partial N}=0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial T}=0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial M_f}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial M_t}=0$$

## 5.5 - Exercices

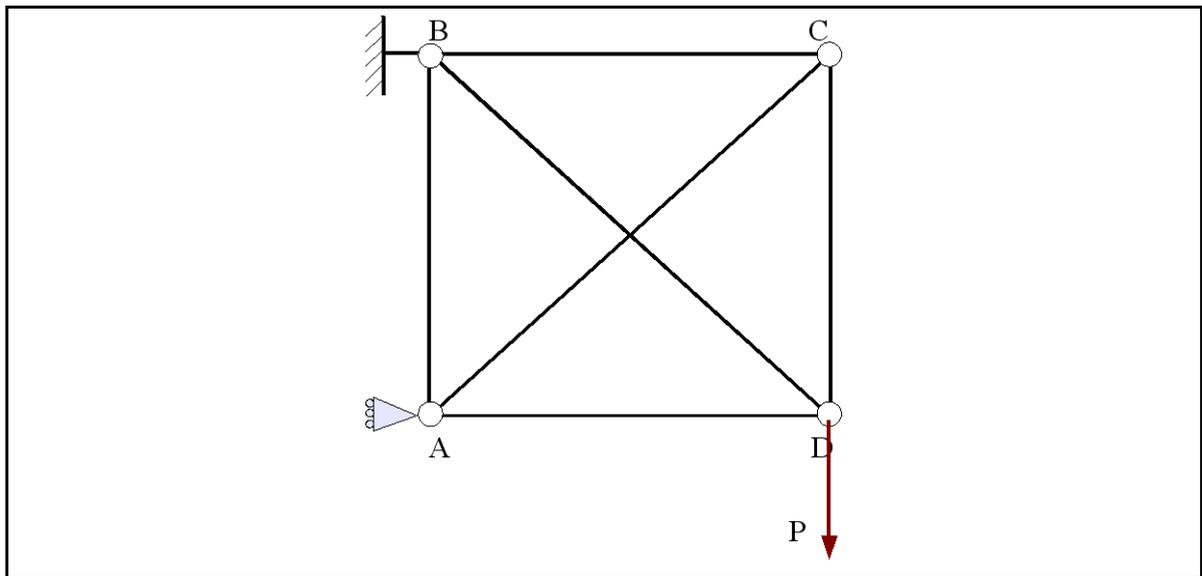
### a - Exercice 1

Calculer les réactions du système hyperstatique suivant, puis donnez la flèche en tout point.



### b - Exercice 2

Soit le système articulé plan suivant :



- 1- Donnez le degré d'hyperstaticité externe puis interne.  
On suppose une coupe sur l'une des barres diagonales.
- 2- Donner les résultantes en fonction des efforts externes P et  $N_0$ .
- 3- Pour un treillis carré de côté  $l$ , donnez l'expression des efforts vus par les poutres restantes.
- 4- Écrire l'énergie élastique du système. En déduire  $N_0$ .

## **6 - Dimensionnement de structures élastiques**

### ***6.1 - Critères de Tresca et Von Mises***

### ***6.2 - Concentration de contraintes***

### ***6.3 - Problèmes d'endurance***

### ***6.4 - Flambement de structures***



## **7 - Annexes**

### **7.1 - Bibliographie**

- [1] Timoshenko, Résistance des Matériaux, Ed. Beranger et Dunod, 1945
- [2] J. Bastien, Introduction à la résistance des matériaux, <http://www.librecours.org>