MATHS 3 - EXAMEN FINAL

22/1/2010

NOM : Key GROUPE :

PRENOM : ENSEIGNANT :

Les livres et les cahiers ne sont pas autorisés.

INSTRUCTIONS : *Il y a 20 exercices pour un total de 200 points. Si vous n'avez pas assez d'espace pour un exercice, écrivez sur le verso de la feuille précedente. Montrez toutes les étapes du calcul. Encadrez votre résultat final. Supportez votre réponse par des explications si nécessaire.*

1. Donnez une formule pour le terme général de la suite $\left\{\frac{3}{1}, -\frac{6}{2}, \frac{9}{6}, -\frac{12}{24}, \frac{15}{120}, \ldots\right\}$.

$a_n = (-1)^{n+1}\frac{3n}{n!}$ 3pt 3pt 3pt

2. Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ converge à l'aide du *Test de l'intégrale.*

$f(x) = e^{-x}$ 1 $\quad a_n = f(n)$ 1 $\quad \int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty e^{-x}dx = -\left[e^{-x}\right]_1^\infty = 1$ 1 1 1 1

$\int_1^\infty f(x)\,dx$ existe (finie) $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ converge 2 2

3. Utilisez le *Test de Comparaison directe* pour déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ converge.

$0 \leq a_n = \frac{1}{1+n^2} < \frac{1}{n^2} = b_n$ 1 1 1 1

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\left(\begin{array}{c}\text{Serie de Riemann}\\ p=2>1\end{array}\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge 2 2 2

4. Utilisez le critère de Cauchy pour déterminer si la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$ converge.

$a_n = \frac{2^n}{n^3} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{2}{1} = 2 > 1$ 2 2 2 2

donc la serie diverge 2

5. Caclulez la somme partielle S_n de la série $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\cdots$. La série converge-t-elle? Si oui, donnez sa somme.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{n+1} = \frac{(\alpha+\beta)n+\alpha}{n(n+1)} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-1\end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac12-\cancel{\frac13}\right)+\left(\cancel{\frac13}-\cancel{\frac14}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac1n}\right)+\left(\cancel{\frac1n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$S_n = \frac12-\frac{1}{n+1}$ $\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac12 \Rightarrow$ la serie converge et Somme $= S = \frac12$

6. Le cosinus de $\theta = 1$ radian est égal à ls somme de la série $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots$. Calculez $\cos 1$ avec une précision de 0.001%. Comparez avec la valeur exacte.

$$\cos 1 = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\cdots$$

serie alternée $\Rightarrow$ erreur $R_n = |a_{n+1}| \Rightarrow$ erreur relative $= \frac{1/(2n)!}{\cos 1} \le 10^{-3}$

$(2n)! > 10^3 > 10^3\cos 1 \Rightarrow 2n \geq 8 \Rightarrow n \geq 4$

$\cos 1 \simeq 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!} = 0.5403$ avec 1 erreur de 0.001%

7. Utilisez le test de votre choix pour déterminer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10n^4}$.

Test 1 terme n: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{10n^4} = \infty$ diverge

ou

Test 2 d'Alembert: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10(n+1)^4}\cdot\frac{10n^4}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^4$

$= \infty > 1$ donc la série diverge

8. Trouvez le polynôme de Taylor d'ordre 3 centré en $a = 1$ pour la fonction $f(x) = \ln x$.

$$P_3(x) = f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$f(x) = \ln x$, $f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f'''(x) = 2x^{-3}$

$f(1) = 0$ $\quad f'(1) = 1$ $\quad f''(1) = -1$ $\quad f'''(1) = 2$

$$P_3(x) = (x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}$$

9. Evaluez $13^{\frac14}$ avec une précision de 10^{-3}

$13^{1/4} = (16-3)^{1/4} = 16^{1/4}\left(1-\frac{3}{16}\right)^{1/4} = 2\left(1+\left(-\frac{3}{16}\right)\right)^{1/4}$ $\quad k=\frac14,\ x=-\frac{3}{16},\ (1+x)^k$

$$13^{1/4} = 2\left(1+\frac14\left(-\frac{3}{16}\right)+\frac{\frac14(\frac14-1)}{2}\left(-\frac{3}{16}\right)^2+\frac{\frac14(\frac14-1)(\frac14-2)}{2\cdot3}\left(-\frac{3}{16}\right)^3+\frac{\frac14(\frac14-1)(\frac14-2)(\frac14-3)}{2\cdot3\cdot4}\left(-\frac{3}{16}\right)^4+\cdots\right)$$

$$= 2\left(1-\frac{3}{64}-\frac{27}{8192}-\frac{189}{524{,}288}-\frac{1701}{33{,}554{,}432}-\cdots\right) \quad a_n \to$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/4-n+1}{n}\left(-\frac{3}{16}\right) \le \frac{3}{16} = r \Rightarrow S_n$ a une erreur $R_n \le \frac{a_{n+1}}{r} = \frac{16}{3}a_{n+1} \le 10^{-3}$

donc $13^{1/4} \simeq 2\left(1-\frac{3}{64}-\frac{27}{8192}-\frac{189}{524\,288}\right) = 1.899$

10. Déterminez le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-1)^n}{n}$

$|a_n| = \frac{|x-1|^n}{n}$ on utilise d'Alembert: $R = 1$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{|x-1|^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}|x-1|\cdot\frac{n}{n+1} = |x-1| < 1$$

si $-1 < x-1 < 1$ ou $x \in (0,2)$

11. Donnez les 4 premiers termes de la série de MacLaurin pour la fonction $f(x) = \frac{\cos x}{e^x}$.

$$f(x)\,e^x = \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

$$a_0 + \underbrace{(a_0 + a_1)}_{0}x + \underbrace{\left(\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2\right)}_{-1/2}x^2 + \underbrace{\left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2} + a_2 + a_3\right)}_{0}x^3 + \dots = 1 + 0x - \frac{x^2}{2} + 0x^3 + \dots$$

Calculs $\longrightarrow$ $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $f(x) = 1 - x + \frac{x^3}{3}$

12. Trouvez la série de MacLaurin de $\frac{1}{1+x^2}$. Utilisez votre résultat pour déterminer la série de $g(x) = 3\tan^{-1} x$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \dots + (-x^2)^n + \dots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

$$\tan^{-1}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots\right)dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$\tan^{-1}0 = C = 0$ donc

$$g(x) = 3\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right)$$

13. Utilisez les séries pour évaluer $\lim_{x\to\infty} x^{1/3}\left(e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1\right) = L$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad e^{-x^{-1/2}} = 1 + (-x^{-1/2}) + \frac{(-x^{-1/2})^2}{2} + \frac{(-x^{-1/2})^3}{6} + \dots + \frac{(-x^{-1/2})^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x^{-1/2}} = 1 - x^{-1/2} + \frac{x^{-1}}{2} - \frac{x^{-3/2}}{6} + \dots + (-1)^n\frac{x^{-n/2}}{n!} + \dots$$

$$L = \lim_{n\to\infty} x^{1/3}\left(-x^{-1/2} + \frac{x^{-1}}{2} - \frac{x^{-3/2}}{6} + \dots\right) = \lim_{n\to\infty} -x^{-1/6} + \frac{1}{2x^{2/3}} - \frac{1}{6x^{7/6}} + \dots = 0$$

14. Evaluez l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ avec une précision de 10^{-4}.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right)dx = \int_0^1\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right)dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^5}{5!\,5} - \frac{x^7}{7!\,7} + \dots\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3!\,3} + \frac{1}{5!\,5} - \frac{1}{7!\,7} + \dots$$

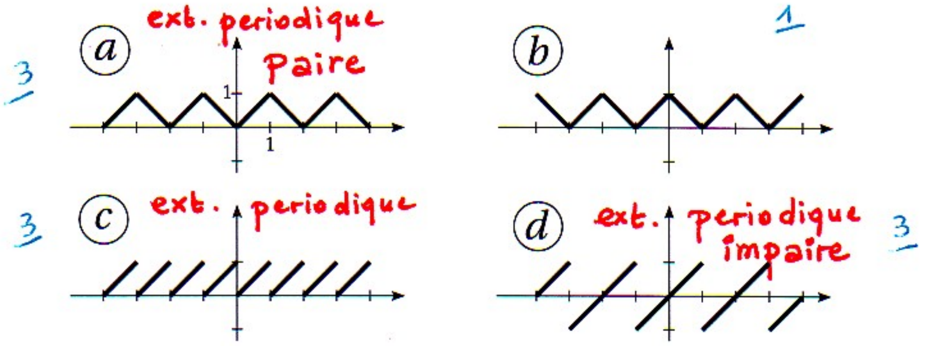
Erreur $= R_N = \frac{1}{n!\,n}$ n impair

n	1	3	5	7
$n!\,n$	1	18	600	35280

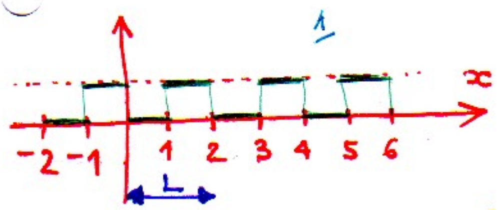
$\checkmark < 10^{-4}$ donc

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \simeq 1 - \frac{1}{3!\,3} + \frac{1}{5!\,5} = 0{,}9461$$

15. Le graphe ci-dessous représente les extensions périodiques possible de la fonction $f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$. Indiquez l'extension périodique paire, l'extension périodique impaire, et l'extension périodique de $f(x)$.



16. Donnez la série de Fourier de l'extension périodique de la fonction suivante:



$$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ 2 < x < 3 \\ 1, & si\ 3 \le x < 4 \end{cases}$$

extension periodique complète sur $[0,2]$ avec $L = 2$ 1

$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 0\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 1.dx = \frac{1}{2}$ 1

$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^2 f(x)\cos(n\pi x) = \int_1^2 \cos(n\pi x) = 0$ 1

$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = \int_0^2 f(x)\sin(n\pi x) = \int_1^2 \sin(n\pi x) = -\frac{1}{n\pi}\left[\cos(n\pi x)\right]_1^2$

$= -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(2\pi n) - \cos(\pi n)\right) = -\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ -\frac{2}{n\pi} & n \text{ impair} \end{cases}$ 1

$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1}\sin\left((2k+1)\pi x\right)$ 2

17. Déterminez si chacune des fonctions suivantes est périodique et indiquez sa période:

3 (1) $f(x) = \tan(\pi x)$ $\tan X \to$ periode π

$x=0 \Rightarrow X = \pi x = 0$
$x=1 \Rightarrow X = \pi x = \pi$ } 1 periode $\Rightarrow$ $f(x)$ periodique et $\boxed{T=1}$ 1

3 (2) $g(x) = \sin(2x) + \cos(3x)$ Multiples: $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$

$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi,$ 1

donc $\boxed{T = 2\pi}$ fonction periodique 1

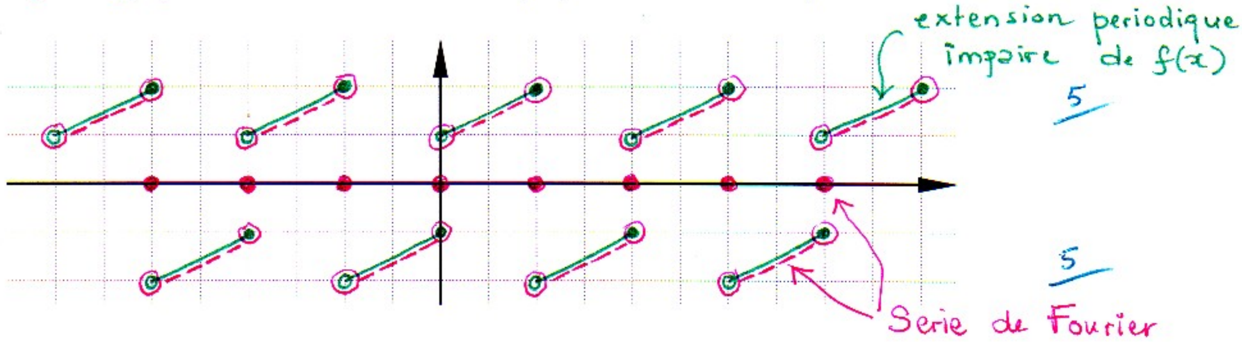
3 (3) $h(x) = \sin(\pi x) + \cos x$

$T_1 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ 1 $T_2 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

pas de multiple commun 1

donc non la fonction n'est pas périodique 1

18. Représenter l'extension périodique impaire de la fonction $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x$ définie sur $[0, 2]$ ainsi que le graphe de sa série de Fourier (en couleur différente).



19. Dites si la fonctions admet ou non une séerie de Fourier. Expliquez.

3 (1) L'extension périodique de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, $0 < x < 1$. sin(1/x)

non → nombre infini d'extrema dans [0,1]

3 (2) $f(x) = \tan 2x$

non → discontinuité infinie

3 (3) L'extension périodique de la fonction $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1, & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$, $x \in [0, 4]$

non → nombre infini de points de discontinuité dans [0,4]

20. Donnez la formule pour cacluler les coefficients de la série de Fourier de l'extension périodique paire de la fonction $f(x) = e^x$, $x \in [0, 8]$. Ne calculez pas les coefficients! Indiquez la forme de la série.

$L = 8$ 2

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)$$ 1 1

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^8 e^x\,dx$$ 1 2

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{4}\int_0^8 e^x \cos\left(\frac{n\pi x}{8}\right)dx$$ 1 2