MATHS 3 - EXAMEN FINAL

8/1/2012

NOM : CLé GROUPE :

PRENOM : ENSEIGNANT :

Les livres et les cahiers ne sont pas autorisés.

INSTRUCTIONS : *Il y a 19 exercices pour un total de 200 points. Si vous n'avez pas assez d'espace pour un exercice, écrivez sur le verso de la feuille précedente. Montrez toutes les étapes du calcul. Encadrez votre résultat final. Supportez votre réponse par des explications si nécessaire.*

1. Polynôme de Taylor (*20 pts*) Sachant que $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, donnez (sans calculs) les polynômes de Taylor d'ordre 1, 2, et 3 en $a = 0$ pour $f(x)$.

$P_1(x) = 1 + x$ 3/

$P_2(x) = 1 + x + x^2$ 3/

$P_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ 3/

5/

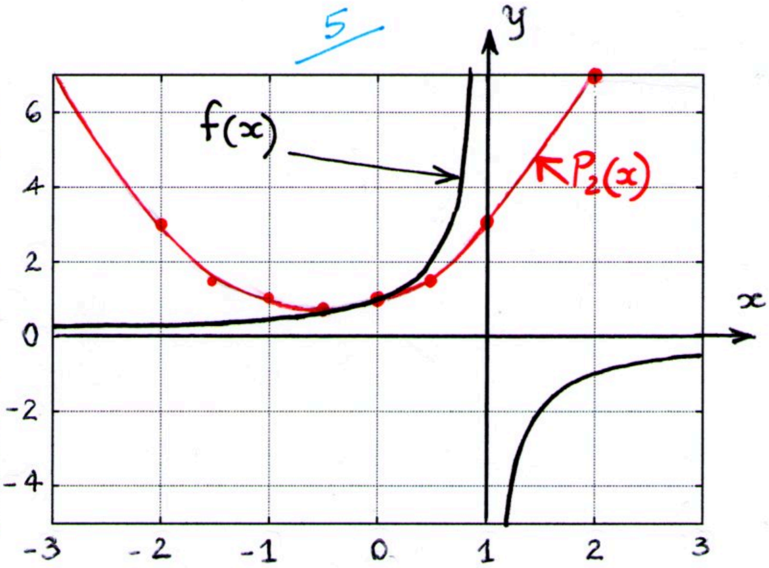
Complétez le tableau ci-dessous et représentez le graphe du polynôme $P_2(x)$ sur la figure ci-contre.

3/

x	-2	-1.5	-1	-0.5
$P_2(x)$	3	1.75	1	0.75

3/

x	0	0.5	1	2
$P_2(x)$	1	1.75	3	7



2. Complétez l'égalité ci-dessous:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n-5)!} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{e^{\boxed{n-3}}}{\boxed{(n-8)!}}$$

4

2

4

3. Calculez la somme partielle $S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$ pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. La série converge-t-elle? Si oui, calculez sa somme S.

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} \Longrightarrow 1 = \alpha(n+1) + \beta n$

$n = -1 \Longrightarrow \beta = -1$, $n = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$ d'où $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 2/

$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{N-2} + a_{N-1} + a_N$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$ 2/ 2/

$S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$ $\lim_{N \to \infty} S_N = 1 = S$ donc la série converge et sa somme $S = 1$

2/ 2/

4. Déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}}$ converge.

$a_n = \frac{n^{1/3}}{n^{3/2} n^{1/2}} = \frac{1}{n^{3/2 + 1/2 - 1/3}} = \frac{1}{n^{5/3}} \Longrightarrow$ serie de Riemann avec $p = \frac{5}{3} > 1$

1 2 1 2 1

donc la série converge 3

5. Utilisez le *test de l'intégrale* pour déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\tan^{-1} n}}{n^2+1}$ converge.

$a_n = \frac{e^{\tan^{-1} n}}{n^2+1} = f(n)$ avec $f(x) = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{x^2+1}$ 1 1

pour x large, $e^{\tan^{-1} x}$ est $\simeq$ constant $= \frac{\pi}{2}$. Donc $f(x)$ est decroissante, de plu positive 1

$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} e^{\tan^{-1} x} dx = \left[e^{\tan^{-1} x} \right]_1^{\infty} = \lim_{\alpha \to \infty} \left(e^{\tan^{-1} \alpha} - e^{\tan^{-1} 1} \right)$

1 1 1

$= e^{\pi/2} - e^{\pi/4}$ 1

$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ existe donc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

1 2

6. Utilisez le *test de d'Alembert* pour déterminer si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}$ converge. La série converge-t-elle absolument?

$a_n = \frac{(-1)^n n}{(n+1)e^n}$ 1 $\quad |a_n| = \frac{n}{(n+1)e^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ 2 $= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(n+2)e^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)e^n}{n}$ 1 $= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$ 1 1 $= \frac{1}{e} < 1$ 1

donc $\sum |a_n|$ converge 1

donc $\sum a_n$ converge absolument 1 $\Longrightarrow$ donc $\sum a_n$ converge 1

7. Utilisez le test de votre choix pour déterminer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n+2}$.

$0 \leqslant a_n = \frac{1}{n^n+2} \leqslant \frac{1}{n^n} = b_n$ 2

Cauchy : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$ 1 $= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}$ 1 $\frac{1}{n} = 0$ 1 < 1 1 donc $\sum b_n$ converge 1

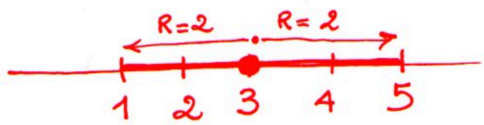
d'après le test de comparaison directe, 1 $\sum a_n$ converge 2

8. Déterminez le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(x-3)^n$. Donnez l'intervalle de convergence.

$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ 1

$\frac{1}{R} =$ 2 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}$ 1 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, donc $R = 2$ 1

intervalle de convergence :



$(1, 5)$ 1

1 $\boxed{x=1}$ la serie s'écrit $\sum \frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n} = \sum \frac{2^n}{2^n} = \sum 1 = 1+1+1+\cdots$ diverge

1 $\boxed{x=5}$ la série s'écrit $\sum (-1)^n \frac{2^n}{2^n} = \sum (-1)^n = -1+1-1+1-1\cdots$ diverge

donc intervalle de convergence $= (1, 5)$ 2

9. Utilisez la formule de Taylor pour trouver la série entière de la fonction $\dfrac{1}{1-x}$ en $a = 2$.

$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \dfrac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dfrac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \dfrac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 + \cdots$ 2

5 $\begin{cases} f(x) = (1-x)^{-1} & f'(x) = (1-x)^{-2} & f''(x) = 2(1-x)^{-3} & f'''(x) = 6(1-x)^{-4} & f^{(4)}(x) = 24(1-x)^{-5} \\ f(2) = -1 & f'(2) = 1 & f''(2) = -2 & f'''(2) = 6 & f^{(4)}(2) = -24 \end{cases}$

$f(x) = -1 + (x-2) - (x-2)^2 + (x-2)^3 - (x-2)^4 + \cdots$ 3

10. Trouvez une série pour la fonction $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{\cos x}$

1 2

$f(x)\cos x = e^{x^2} \iff (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \cdots\right) = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{6} + \cdots$

	1	0	$-\frac{x^2}{2}$	0	$\frac{x^4}{24}$	0
a_0	a_0	0	$-\frac{a_0}{2}x^2$	0	$\frac{a_0}{24}x^4$	0
a_1x	a_1x	0	$-\frac{a_1}{2}x^3$	0	$\frac{a_1}{24}x^5$	
a_2x^2	a_2x^2	0	$-\frac{a_2}{2}x^4$	0		
a_3x^3	a_3x^3	0	$-\frac{a_3}{2}x^5$			
a_4x^4	a_4x^4	0				
a_5x^5	a_5x^5					

2

$a_0 + a_1x + \left(a_2 - \dfrac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(a_3 - \dfrac{a_1}{2}\right)x^3 + \left(a_4 - \dfrac{a_2}{2} + \dfrac{a_0}{24}\right)x^4$

2 $= 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{6} + \cdots$

par identification

$a_0 = 1$ $\quad a_1 = 0$

$a_2 - \dfrac{a_0}{2} = 1 \Rightarrow a_2 = \dfrac{3}{2}$

$a_3 - \dfrac{a_1}{2} = 0 \Rightarrow a_3 = 0$ 2

$a_4 - \dfrac{a_2}{2} + \dfrac{a_0}{24} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a_4 = \dfrac{29}{24}$

...

donc $\quad f(x) = 1 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{29}{24}x^4 + \cdots$ 1

11. Approximez $\sin(0.25)$ à l'aide du polynôme de Taylor $P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$. Estimez l'erreur.

1 2

$\sin(0.25) \simeq 0.25 - \dfrac{(0.25)^3}{3!} = 0.247{,}396$

2 1

erreur $\quad R_3(x) = \dfrac{f^{4}(\xi)}{4!}x^4 \qquad \xi \in [0, x] = [0, 0.25]$

$|R_3(0.25)| = |\sin(\xi)|\,\dfrac{(0.25)^4}{24} \leq \dfrac{(0.25)^4}{24} = 1.6 \times 10^{-4}$

1 1 2

12. Trouvez une série entière pour la fonction $f(x) = -\ln|\cos x|$ sachant que l'on a $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$. (Quelle relation y-a-t'il entre les deux fonctions?)

$$f'(x) = \tan x \Rightarrow f(x) = \int \tan x \, dx$$

donc $f(x) = \int x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 \ldots \, dx = C + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{2}{90}x^6 + \frac{17}{2520}x^8 + \ldots$

$x = 0 \Rightarrow f(x) = -\ln(\cos 0) = 0 = C$ donc

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{2}{90}x^6 + \frac{17}{2520}x^8 + \cdots$$

13. Utilisez les séries pour évaluer $\lim_{s\to\infty} s^2 \left[\cos\left(\frac{1}{s}\right) - 1\right]$

$$\cos X = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \cdots \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{s}\right) = 1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{24s^4} - \frac{1}{720s^6} + \cdots$$

$$\lim_{s\to\infty} s^2\left(\cos\frac{1}{s} - 1\right) = \lim_{s\to\infty} s^2\left(1 - \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{24s^4} + \cdots - 1\right) = \lim_{s\to\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{24s^2} + \cdots = -\frac{1}{2}$$

14. Evaluez l'intégrale $\int_0^{0.1} xe^{-x^3}\,dx$ avec une précision de 10^{-6}.

$$I = \int_0^{0.1} xe^{-x^3}dx = \int_0^{0.1} x\left[1 - x^3 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{12}}{24} \cdots\right]dx = \int_0^{0.1}\left(x - x^4 + \frac{x^7}{2} - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{13}}{24} \cdots\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^8}{16} - \frac{x^{11}}{66} + \cdots\right]_0^{0.1} = \frac{(0.1)^2}{2} - \frac{(0.1)^5}{5} + \underbrace{\frac{(0.1)^8}{16}}_{\text{erreur} \leq 10^{-6}} - \frac{(0.1)^{11}}{66} + \cdots$$

Serie alternée

donc on garde les 2 premiers termes

$$I \simeq \frac{(0.1)^2}{2} - \frac{(0.1)^5}{5} = 0.004998$$

15. Trouvez la solution du problème suivant en utilisant les séries:

On pose

$$y' + y = 0 \qquad \text{avec} \qquad y(0) = 1$$

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n + \cdots$ / $y(0) = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$

$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} +$

$y + y' = 0 \Leftrightarrow (a_0 + a_1) + (a_1 + 2a_2)x + (a_2 + 3a_3)x^2 + (a_3 + 4a_4)x^3 + \cdots + (a_{n-1} + na_n)x^n + \cdots = 0$

On identifie :

$a_0 + a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = -1}$

$a_1 + 2a_2 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

$a_2 + 3a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}}$

$a_3 + 4a_4 = 0 \Rightarrow \boxed{a_4 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}}$

$\vdots$

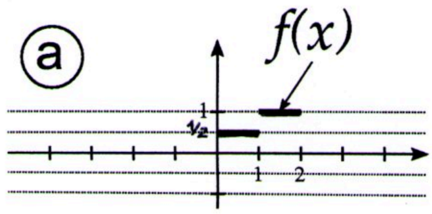
$a_{n-1} + na_n = 0 \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$

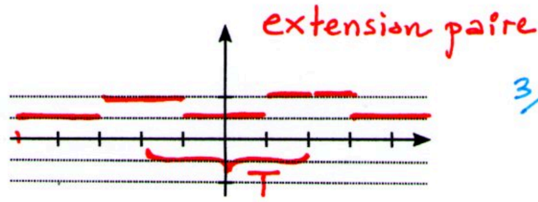
donc

$$y = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{-x}$$

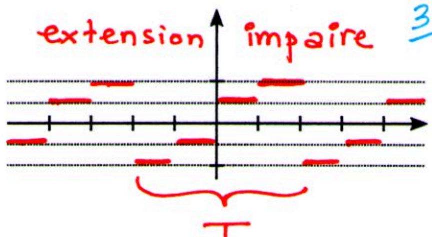
$$y = e^{-x}$$

16. Représentez l'extension périodique, l'extension périodique paire, et l'extension périodique impaire de la fonction $f(x)$ ci-dessous:

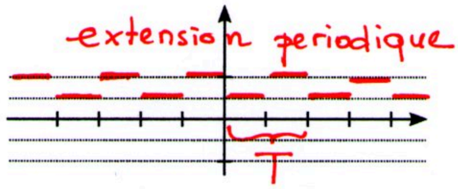




3



3



4

17. Déterminez si chacune des fonctions suivantes est périodique et indiquez sa période:

(1) $f(t) = \text{sh}\,(3t)$ non periodique

(2) $g(s) = \cos(3s) + \tan(2s)$

$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$

PPMC

$\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$ 2π ...

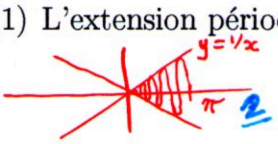
$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$ 2π $\frac{8\pi}{3}$ ...

donc periodique $T = 2\pi$

18. Dites si la fonctions admet ou non une série de Fourier. Expliquez.

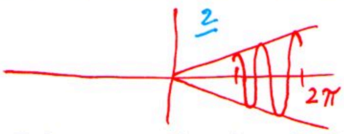
(1) L'extension périodique de la fonction $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\quad 0 < x < \pi$.

non



il y a un nombre infini d'extrema locaux dans une periode

(2) L'extension périodique de la fonction $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\quad \pi < x < 2\pi$.



Oui car i) la fonction est periodique
ii) $\int |f(x)|dx$ existe
iii) nbre fini d'extrema · iv) Continue par morceaux

19. Déterminez la série de Fourier de l'extension périodique impaire de la fonction dans l'exercice 16 précédent.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Serie de Fonction en Sinus

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 1 \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_1^2$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right) - \frac{2}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{n\pi}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2(-1)^n + 1\right)}$$

$b_1 = \frac{3}{\pi}$ $\quad b_2 = -\frac{1}{\pi}$ $\quad b_3 = \frac{1}{\pi}$ $\quad b_4 = 0$ ...

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \cdots}$$