

Modélisation des Systèmes Linéaires Continus Invariants

Objectifs du cours :

Après avoir *étudié* l'ensemble de la séquence cours-TD-TP, vous devez être capable de :

- Analyser ou établir le schéma fonctionnel,
- Analyser ou établir le schéma-bloc (domaine de Laplace),
- Déterminer la fonction de transfert du système,
- Prévoir les performances en rapidité d'un système,
- Déterminer la précision en régime permanent,
- Donner une idée de la stabilité (étude des pôles),
- Prévoir les réponses temporelles d'un 1er ordre,
- Prévoir les réponses temporelles d'un 2nd ordre,
- Prévoir les réponses fréquentielles d'un 1er ordre,
- Prévoir les réponses fréquentielles d'un 2nd ordre,
- Identifier un modèle,
- Valider la cohérence du modèle par des résultats expérimentaux,
- Proposer un modèle de connaissance d'un système réel,
- Proposer un modèle expérimental d'un système réel.

Table des matières

1	Introduction à la commande des systèmes	3
1.1	Bref historique	3
1.2	Illustration : Modélisation d'un régulateur de vitesse de véhicule automobile	4
1.2.1	Fonctionnement sans régulation automatique	5
1.2.2	Fonctionnement avec régulation automatique	7
1.3	Définitions et exemples	8
1.4	Caractéristiques d'un système de commande	9
1.5	Performances d'un système asservi	12
1.5.1	En régime permanent	12
1.5.2	En régime transitoire	13
2	Systèmes Linéaires Continus Invariants	14
2.1	Définitions	14
2.2	Modélisation	15
2.2.1	Notions de modélisation	15
2.2.2	Exemples	15
2.2.3	Cas général	17
2.3	Manipulation des schémas blocs	17
3	Réponse temporelle	20
3.1	Système du premier ordre	20
3.1.1	Définition	20
3.1.2	Réponse à un échelon (<i>réponse indicielle</i>)	21
3.1.3	Réponse à une rampe	22
3.1.4	Réponse à un Dirac (<i>réponse impulsionnelle</i>)	23
3.2	Système du second ordre	23
3.2.1	Définition	23
3.2.2	Réponse à un échelon (<i>réponse indicielle</i>)	24
4	Réponse fréquentielle	29
4.1	Introduction à l'analyse fréquentielle	29
4.1.1	Intérêt de l'analyse fréquentielle	31
4.2	Représentation par diagramme de Bode	33
4.2.1	Définition	33
4.2.2	Système du premier ordre	33
4.2.3	Système du second ordre	35
4.2.4	Diagramme de Bode asymptotique	36
4.2.5	Bande passante	38
A	Transformées de Laplace	39
A.1	Définition et propriétés	39
A.2	Distribution de Dirac	41
A.3	Transformées de Laplace usuelles	42
A.4	Application aux systèmes linéaires, continus et invariants	42
A.5	Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples	43

1 Introduction à la commande des systèmes

1.1 Bref historique

Pour compenser son manque de capacité physique, l'homme s'est rapidement attaché à contrôler les sources d'énergie disponibles dans son environnement, comme le vent, l'eau, puis à partir du 18^{ème} siècle, l'énergie mécanique produite par la machine à vapeur.

L'énergie disponible étant généralement variable, dès l'antiquité ont été conçus des systèmes mécaniques permettant de réguler la vitesse des machines. Au 17^{ème} siècle, beaucoup de moulins utilisaient déjà des régulateurs centrifuges.

Au 18^{ème} siècle, la révolution industrielle nécessite des moteurs fournissant une vitesse de rotation constante, pour entraîner les machines de production. Watt transforme la machine à vapeur de Newcomen pour améliorer son rendement, pour transformer le mouvement alternatif en rotation continue et enfin met au point une régulation mécanique à l'aide d'un régulateur centrifuge. Les premiers modèles sont commercialisés en 1776.

Les premières études théoriques sur la régulation sont menées par Maxwell en 1868. Routh et Hurwitz généraliseront ses résultats sur la stabilité des systèmes. Mais c'est seulement en 1927 que Black introduit la notion de boucle de rétroaction. Black travaillait alors dans un tout autre domaine : l'amplification des signaux téléphoniques pour la construction d'une ligne téléphonique transatlantique. Nyquist élaborera ensuite des méthodes d'étude de la stabilité adaptées aux systèmes avec rétroaction.

Au 20^{ème} siècle, la régulation et l'asservissement des systèmes s'est beaucoup développée, aussi bien d'un point de vue théorique que d'un point de vue des applications. On trouve aujourd'hui des asservissements dans des jouets pour enfants comme dans les avions de chasse ou les lanceurs spatiaux.

Les technologies ont beaucoup évolué. Les premières régulations étaient purement mécaniques, avec des temps de réponse relativement lents. Bell travailla sur des rétroactions électriques, rapides mais de faible puissance. Progressivement, les commandes pneumatiques et hydrauliques ont remplacé les composants mécaniques et sont toujours utilisées aujourd'hui. Les progrès actuels en électro-technique permettent de commander de hautes puissances, avec des temps de réponse faibles et des algorithmes de régulation élaborés.

D'un point de vue théorique, l'étude des commandes de systèmes peut se scinder en deux parties : la commande classique et la commande moderne. Seule la commande classique est enseignée en CPGE, la commande moderne étant abordée en école d'ingénieurs.

La commande classique se limite aux systèmes mono-variables (une entrée et une sortie scalaires), décrits à l'aide d'équations différentielles temporelles d'ordre quelconque. L'étude met en oeuvre la transformée de Laplace pour la manipulation des modèles et l'analyse fréquentielle du comportement. La commande classique est largement utilisée pour le contrôle des processus industriels car sa mise en oeuvre est simple et robuste, sa maintenance aisée. Le correcteur le plus fréquemment employé est le PID, qui sera vu en seconde année.

La commande moderne permet d'étudier des systèmes multi-variables (vecteurs de variables d'entrées, de sortie et de variables d'état), décrit par des systèmes d'équations du premier ordre et mettant en oeuvre un formalisme matricielle. Ce type de commande n'est employée que sur des applications pointues.

Les progrès de l'informatique (l'augmentation de la vitesse de traitement de l'information et la baisse des coûts) ont conduit à basculer des commandes analogiques (réalisées en hydraulique, en électrique ou en électronique) en commande numérique, implantée sur microprocesseur. Les composants numériques travaillent avec des signaux échantillonnés et nécessitent en toute rigueur une étude théorique différente (la transformées en Z à la place

de la transformée de Laplace). La difficulté à travailler en même temps sur des composants analogiques (la machine asservie) et des composants numériques (le contrôleur) conduit généralement à mener l'étude dans le domaine analogique, approximation raisonnable tant que la fréquence d'échantillonnage est bien supérieure à la fréquence de coupure de la machine. Le programme de CPGE se limite à l'étude analogique.

1.2 Illustration : Modélisation d'un régulateur de vitesse de véhicule automobile

L'illustration s'intéresse à une option récente incorporée dans les véhicules automobiles : le régulateur automatique de vitesse.

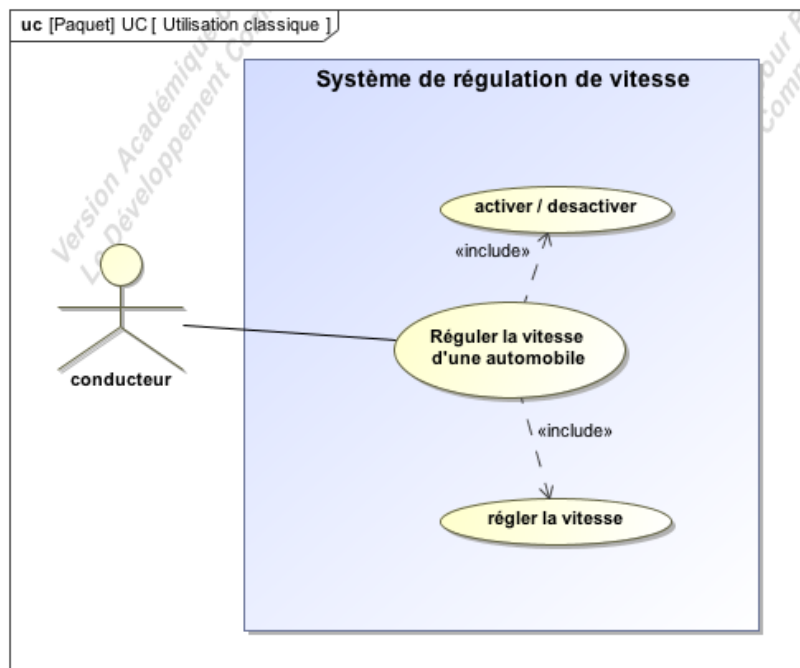


FIGURE 1 – Diagramme de cas d'utilisation d'un régulateur de vitesse.

Grâce à cette option, le conducteur peut régler une vitesse de consigne et ainsi retirer son pied de l'accélérateur : l'ordinateur de bord commande directement le moteur pour respecter la vitesse de consigne. Le système se déconnecte en cas d'action sur la pédale de frein ou d'accélérateur. On propose ainsi un diagramme de cas d'utilisation en figure 1.

Le régulateur de vitesse libère donc le conducteur de la surveillance constante du compteur de vitesse pour adapter la vitesse du véhicule.

Le diagramme de définition de blocs (figure 2) précise les constituants du système de régulation.

L'objectif de cette illustration est de modéliser ce système afin de s'assurer qu'il respecte la consigne de vitesse et qu'il ne puisse pas devenir instable (exemple : une augmentation de la vitesse incontrôlée).

1.2.1 Fonctionnement sans régulation automatique

Jusqu'à présent, la régulation dans un véhicule était effectuée par le conducteur (figure 3). En fonction de l'information de vitesse fournie par le compteur de vitesse, ainsi que de

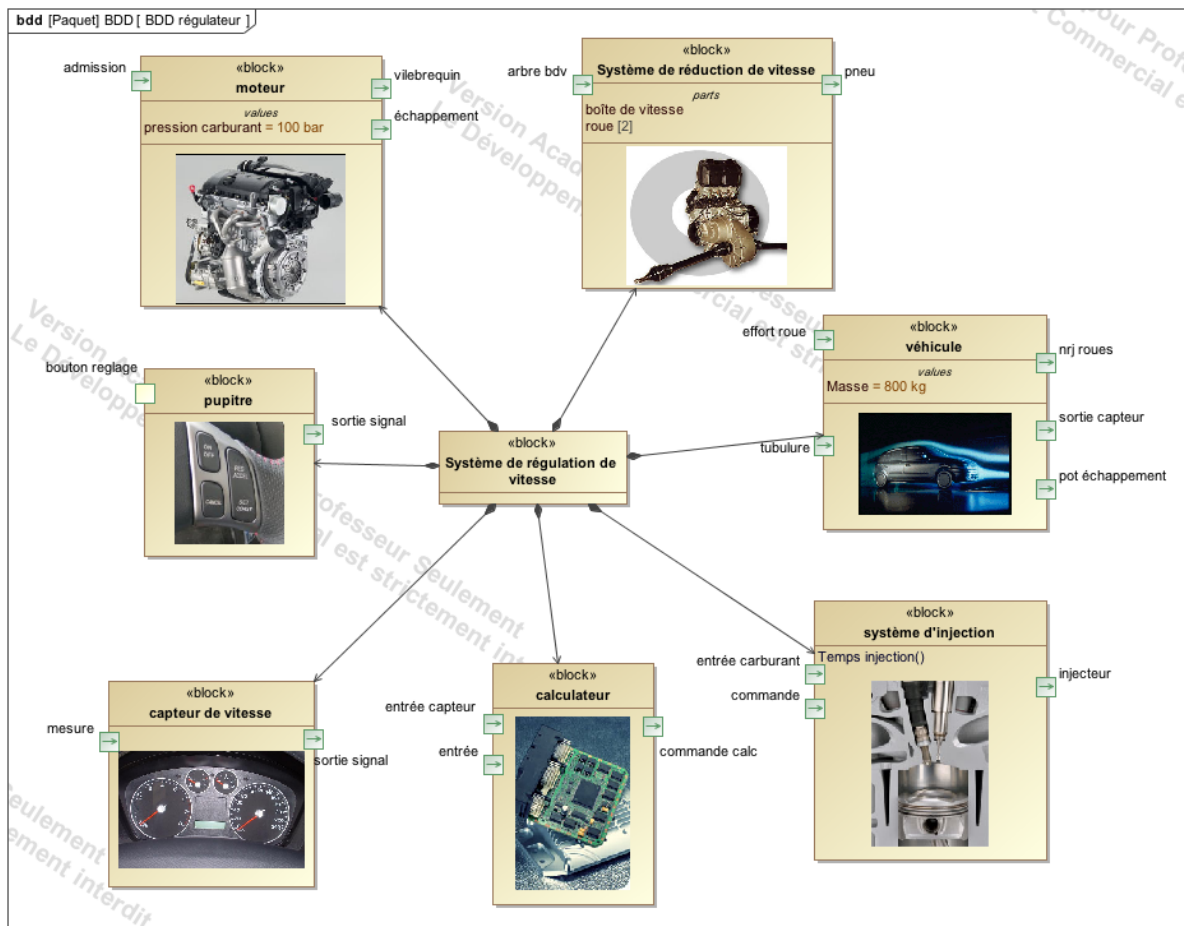


FIGURE 2 – Diagramme de définition de blocs d'un régulateur de vitesse.

l'état de la circulation, le conducteur maintient la vitesse de son véhicule par une action sur la pédale d'accélération.



FIGURE 3 – Schéma de principe sans régulateur automatique.

L'action sur la pédale d'accélération induit un angle variant entre 0 et 30° (0° pas d'accélération, 30° accélération maximale).

L'information d'angle issue de la pédale d'accélération est transmise à un calculateur qui est chargé de définir la quantité de mélange carburant-air à fournir au moteur. Plus précisément, cet ordre se traduit par un temps d'ouverture T compris entre 0 et 5 ms (millisecondes) de chaque injecteur au cours d'un cycle de combustion.

L'injecteur a pour fonction de libérer le mélange carburant-air dans la chambre de com-

bustion.

Chaque injecteur s'ouvre durant la période T , ce qui induit une quantité de carburant (un volume) de carburant admis, par injection, dans chaque cylindre. Au final, tout cela rapporté au taux de rotation du moteur, le système d'injection fournit un débit moyen Q (en L/s) de carburant au moteur.

Durant le temps T , le carburant sous pression (de l'ordre de 100 *bars* pour les moteurs essence) est pulvérisé dans la chambre de combustion à un débit de $4\,800\text{ mm}^3/s$.

Remarque, un moteur 4 temps de voiture « classique » comporte 4 cylindres (4 chambres de combustion) et une combustion est réalisée tous les deux tours de moteur. Il y a un injecteur par cylindre.

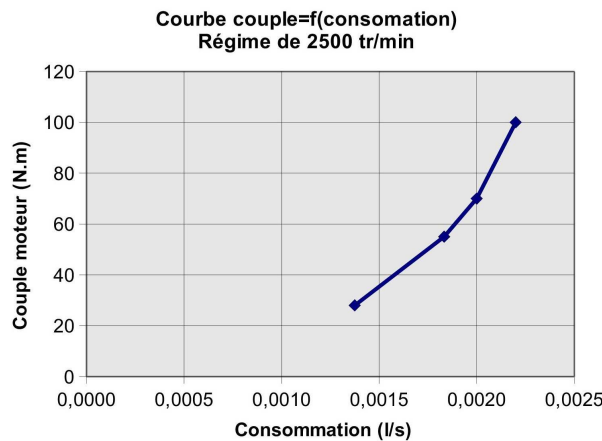


FIGURE 4 – Courbe de comportement du moteur.

Au niveau du moteur, l'effort disponible en sortie est une fonction croissante du débit de carburant. Une courbe indiquant le couple du moteur (effort disponible en sortie pour un ensemble en rotation, unité : $N.m$) en fonction de la consommation est présentée figure 4. Cette courbe a été tracée pour une régulation voisine de 100 km/h soit un régime moteur de 2500 $tour/min$.

La boîte de vitesse diminue la vitesse de rotation du moteur avant de transmettre le mouvement aux roues. Ceci a pour conséquence d'augmenter le couple dans la même proportion.

Les roues adhèrent au sol et exercent un effort moteur F tel que pour un couple moteur C de 1 $N.m$ (Newton mètre), F vaut 10 N (Newton).

Le véhicule subit la force de poussée F du moteur et peut subir une force extérieure perturbatrice F_{pert} comme une montée par exemple ;

De plus, le véhicule subit l'action de résistance de l'air. Cette action aérodynamique peut être représentée par une force proportionnelle à la vitesse V du véhicule : $F_{air} = -f_v.V$. On donne $f_v = 20\text{ N.s/m}$ et la masse du véhicule $m = 800\text{ kg}$.

Afin de pouvoir simuler le comportement du véhicule, il est nécessaire de modéliser (caractériser) le comportement de chacun des blocs. Les lois proposées seront linéaires. On modélise plusieurs blocs par des gains purs (coefficient de proportionnalité entre l'entrée et la sortie).

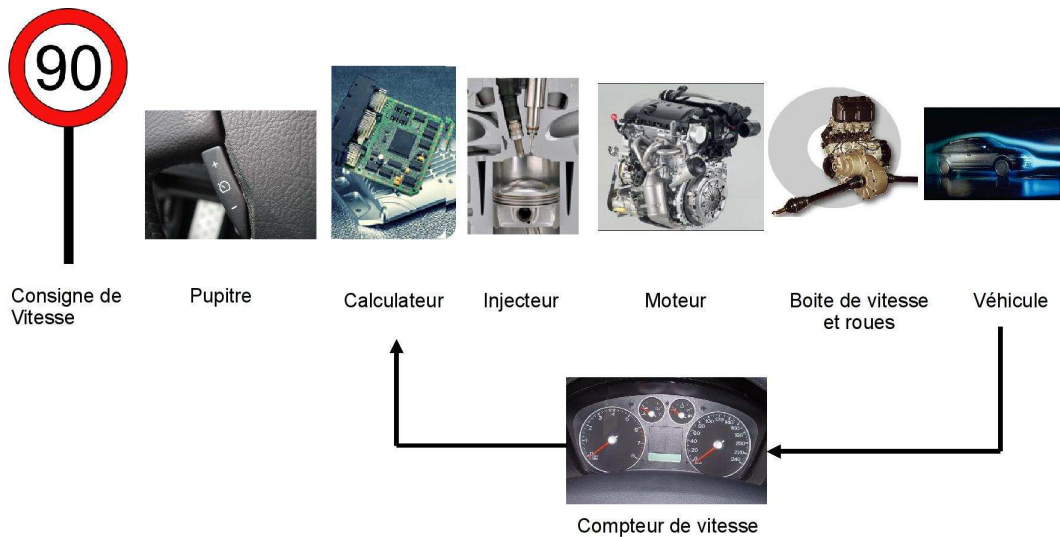


FIGURE 5 – Schéma de principe avec régulateur automatique.

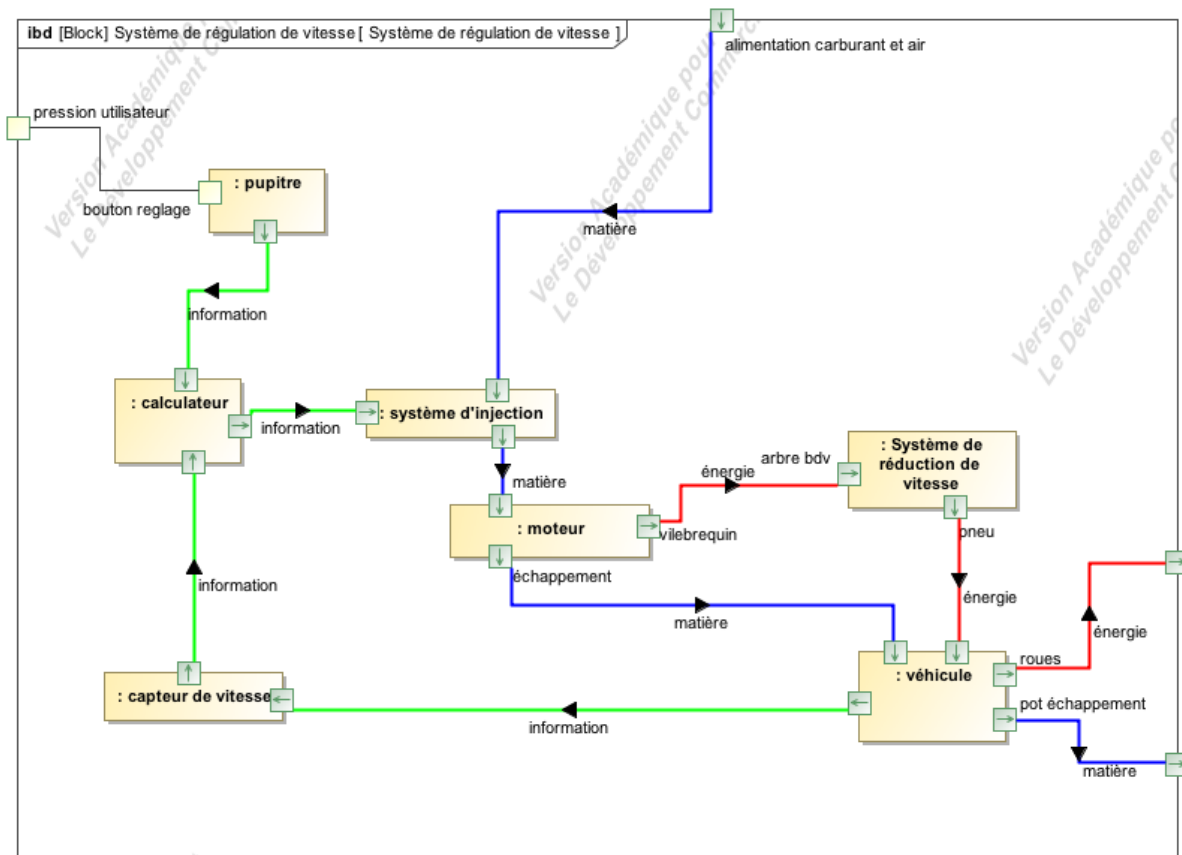


FIGURE 6 – Diagramme de blocs internes d'un régulateur de vitesse.

1.2.2 Fonctionnement avec régulation automatique

Le système de régulation s'adapte sur la chaîne directe précédente de part le remplacement du sous-système pédale par le pupitre, le calculateur et le retour d'information issue du capteur de vitesse (figure 5). Le diagramme de blocs internes de la figure 6 précise les

flux échangés entre les sous-systèmes :

- Le conducteur entre une consigne de vitesse à l’aide d’un pupitre situé au niveau du volant.
- Le calculateur récupère cette consigne ainsi que la vitesse réelle du véhicule issue d’un capteur de vitesse. Les deux informations sont comparées puis ensuite traitées par le calculateur afin d’établir un temps d’ouverture de chaque injecteur. Le gain du calculateur s’établit de la manière suivante : un écart de 10 km/h entraîne un temps d’ouverture de $0,0025 \text{ s}$ par injecteur
- La suite se déroule de la même manière que sans régulation (voir partie 1.2.1).

Une fois que l’ensemble des blocs est identifié, il est possible de simuler le comportement du système, d’imposer une vitesse de consigne, des perturbations, et de tester différents dispositifs de commande.

1.3 Définitions et exemples

Un *système* est un ensemble de composants interagissant entre eux en vue de réaliser des fonctions. Un *système de commande* est un système dont la fonction principale est de commander une grandeur de sortie selon une consigne d’entrée. Un *système automatisé* est un système dont la fonction principale est d’assurer une tâche sans intervention humaine.

L’automatique

c’est la discipline scientifique traitant de la caractérisation des systèmes automatisés et du choix, de la conception, de la réalisation du système de commande.

Buts à atteindre :

- Réaliser des tâches trop complexes ;
- Accomplir des tâches trop répétitives ou trop dures physiquement ;
- Accroître la précision.

Quelques exemples :

– Réfrigérateur

Un réfrigérateur est un système de commande ayant pour fonction de réguler la température interne à une consigne donnée.

– Chasse d’eau

C’est un système de commande ayant pour fonction de réguler le niveau d’eau dans le réservoir. Le fait de vider le réservoir constitue une perturbation pour le système.

– Lanceur Ariane

Il comporte un système de commande ayant pour fonction de suivre la trajectoire théorique. C’est aussi un système automatisé, dont le fonctionnement ne nécessite pas l’intervention humaine.

– Pilote automatique de bateau

Le pilote automatique est un système de commande automatisé : les actions sur la barre sont issues du traitement algorithmique effectué par la carte électronique comparant les informations de cap choisi et de cap réel (observation/boussole), et tiennent donc compte des perturbations dues aux vagues et aux courants. Les actions sont exercées par un vérin (qui est actionneur).

– Pelleteuse

C’est un système commandé mais pas automatisé : l’homme indique la consigne par les manettes de commande.

– Avion

C'est un système de commande qui peut être automatisé lorsqu'il est utilisé en mode "pilotage automatique".

– Portail de métro

C'est un système automatisé non commandé. Le fonctionnement est logique et séquentiel : l'utilisateur passe ou ne passe pas, le ticket est codé en binaire, le fonctionnement est décrit par une suite d'actions (avaler le ticket, lire le ticket, si valide débloquent le tourniquet, rebloquer...)

Système continu

Lorsque le comportement est décrit par des grandeurs continues, une modélisation sous forme de *système continu* est adoptée. C'est souvent le cas pour des systèmes de commande. Cette modélisation est l'objet de ce cours.

Systèmes logiques, numériques, ou à événements discrets

Lorsque le comportement est décrit par des grandeurs logiques binaires (0 ou 1) et par une succession d'actions, une modélisation sous forme de *système logique combinatoire* (si les actions dépendent uniquement de l'état des entrées à l'instant considéré) ou *système à événements discrets* (si l'évolution des états du système est fonction de l'évolution de séquences d'événements d'entrée) est adoptée. Cela fera l'objet d'un cours en seconde semestre.

1.4 Caractéristiques d'un système de commande

Un système de commande est caractérisé par un processus (ou partie opérative) impliquant généralement des énergies importantes, qui agit sur la matière d'œuvre, et une *commande*, nécessitant peu d'énergie, qui pilote le processus (figure 7).

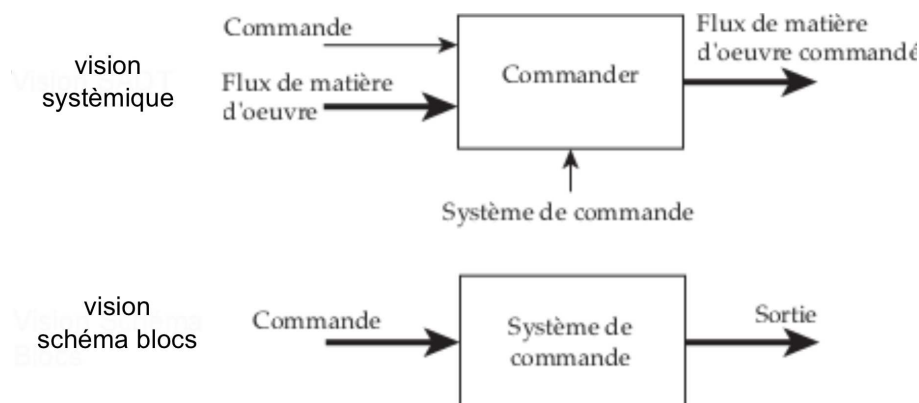


FIGURE 7 – Description d'un système de commande.

Le système de commande se distingue d'un système de transformation d'énergie pour lequel la "commande" fournit toute l'énergie nécessaire à la sortie. Sur terre, seul l'homme a développé cette compétence à commander des phénomènes à grande énergie malgré ses faibles capacités physiques !

Principe de Causalité

"Tout effet a une cause et les mêmes causes dans les mêmes conditions produisent les mêmes effets".

Les systèmes de commande sont étroitement liés au principe de causalité. Ainsi l'évolution de la sortie ne peut dépendre que de l'état du système et de la consigne aux temps précédents, en l'absence de toute autre cause.

Dans le cadre de l'illustration, on comprend que chaque composant répond au principe de causalité et qu'il est possible d'établir une loi liant l'évolution de la sortie en fonction de l'évolution de l'entrée.

Commande en chaîne directe

Un système fonctionne en "chaîne directe" si il n'y a pas de contrôle sur la manière dont la commande a été exécutée (Figure 8).



FIGURE 8 – Commande en chaîne directe.

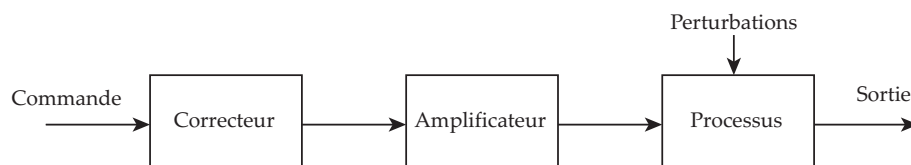
Le fonctionnement classique d'un véhicule (sans régulateur) constitue un système en boucle ouverte. L'action du conducteur sur l'accélérateur permet de modifier la vitesse mais le véhicule n'effectue aucun contrôle de la vitesse atteinte.

En cas de perturbations (vent de face, montée ou descente, etc), la vitesse va varier même si la pédale d'accélération reste fixe.

Perturbation

Une perturbation est une autre cause agissant sur le système (c'est une grandeur d'entrée), qui n'est pas contrôlée par l'utilisateur.

Sa description par schéma bloc est :



Le vent ou la pente de la route constituent des perturbations pour le véhicule. Pour assurer une vitesse constante, il faut adapter la puissance du moteur en fonction de l'écart éventuel avec la vitesse de consigne. Cette opération est un asservissement.

Asservissement du système de commande : commande en Boucle Fermée (BF)

Un système fonctionne en "boucle fermée" si une mesure de la sortie est réalisée afin de la comparer à la consigne et d'agir sur le système en conséquence (Figure 10).

Les trois fonctions essentielles accomplies par un asservissement sont :

- Observation,
- Réflexion (ou traitement algorithmique),
- Action.

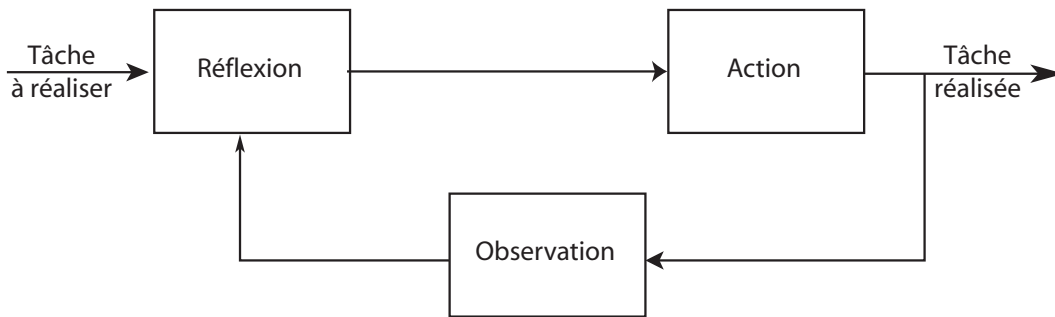


FIGURE 9 – Fonctions générales d'un asservissement.

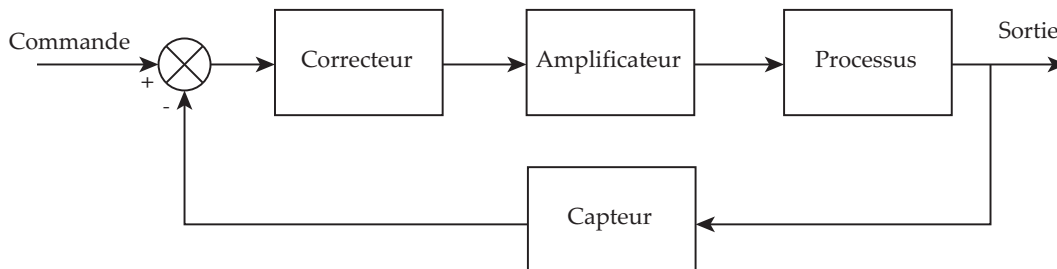


FIGURE 10 – Commande en boucle fermée.

L'asservissement du système de commande consiste à mesurer la sortie et utiliser cette information pour corriger la grandeur d'entrée du processus. Dans beaucoup d'exemples de la vie courante, l'homme réalise lui-même l'asservissement.

Systèmes asservis régulateurs et suiveurs

On distingue généralement les *systèmes régulateurs*, où la consigne est constante (l'asservissement corrige les effets des perturbations) et les *systèmes suiveurs*, où la consigne évolue continuellement (l'asservissement suit la consigne).

Le régulateur de vitesse est supposé maintenir une vitesse constante malgré le vent et la pente de la route : il s'agit d'un système régulateur. Le lanceur Ariane doit suivre une trajectoire théorique qui n'est pas une valeur constante : il s'agit d'un système suiveur.

Description par schémas blocs

Les systèmes de commande sont généralement décrits par des schémas blocs (Figure 11).

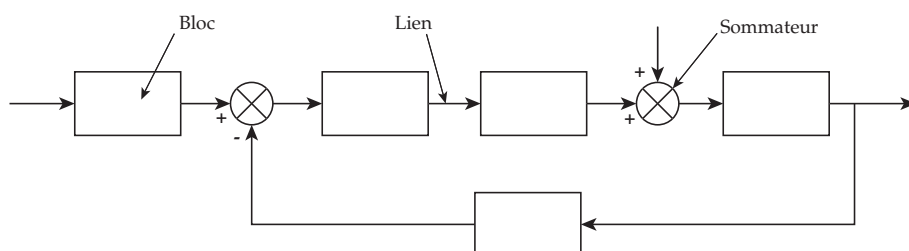


FIGURE 11 – Description générale par schémas blocs d'un système asservi.

Un *bloc* caractérise un sous-ensemble du système. Il sous-entend une *relation* entre la grandeur de sortie et la grandeur d'entrée.

Un *lien* représente une *grandeur physique* identifiée comme grandeur de sortie d'un sous-ensemble et grandeur d'entrée d'un autre sous-ensemble.

Les *sommateurs* additionnent ou retranchent les grandeurs qui doivent bien entendu être du même type !

1.5 Performances d'un système asservi

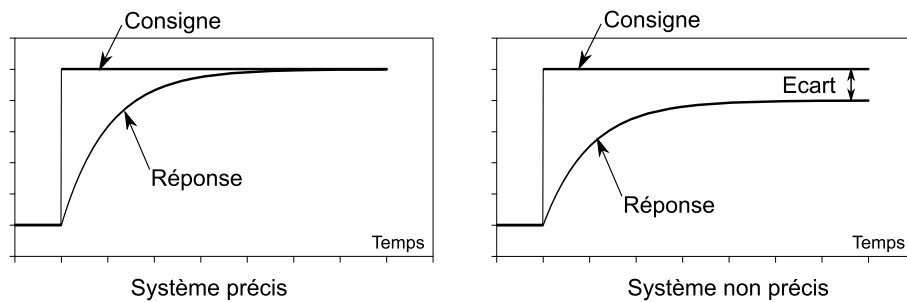
L'asservissement d'un système de commande est évalué suivant différents critères de performances : précision, rapidité, amortissement et stabilité.

1.5.1 En régime permanent

Le régime permanent correspond au moment où le signal de sortie est établi.

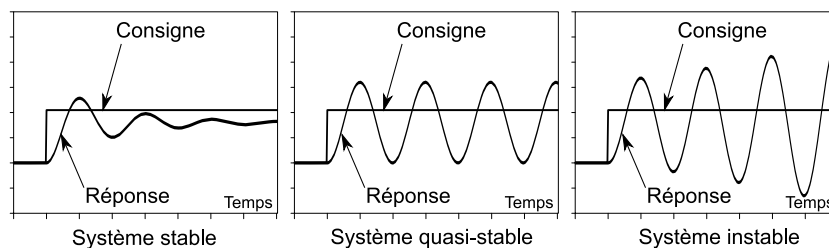
Précision

La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée. Elle est mesurée par l'écart entre la réponse permanente (limite quand $t \rightarrow +\infty$) et la consigne.



Stabilité

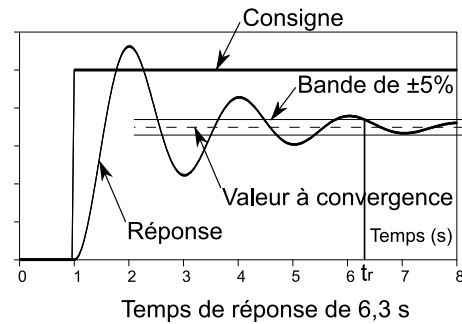
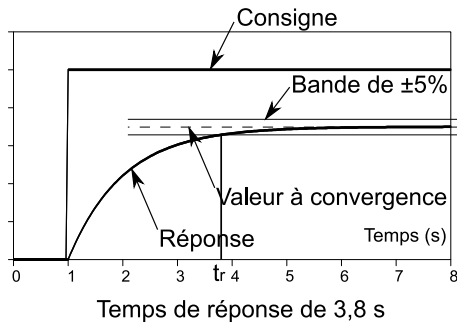
La stabilité est la capacité du système à converger vers une valeur constante lorsque $t \rightarrow +\infty$.



1.5.2 En régime transitoire

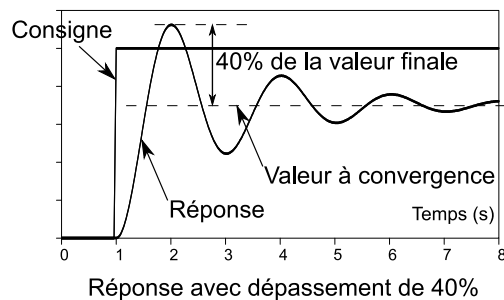
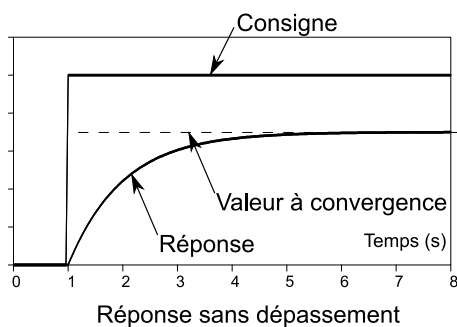
Rapidité

La rapidité qualifie l'aptitude du système à réagir à une variation de la grandeur d'entrée. En pratique, on utilise le temps de réponse à 5%, c'est le temps mis par le système pour atteindre sa valeur de régime permanent à $\pm 5\%$ près et y rester.



Dépassements

La réponse d'un système présente des dépassements si elle dépasse la valeur à convergence avant de converger.



Dans certaines applications comme l'usinage, les dépassements sont à proscrire car si la consigne est dépassée, l'outil taille la pièce trop profondément et la dimension n'est pas satisfaite même si l'asservissement est précis.

2 Systèmes Linéaires Continus Invariants

2.1 Définitions

Nous nous intéresserons, dans le cadre du programme, aux systèmes *linéaires, continus invariants et monovariables*.

Système monovisible

Un système monovisible est un système ne possédant qu'une seule entrée et une seule sortie.

Si un système étudié fonctionne avec plusieurs entrées (ou une entrée et des perturbations), il sera possible, grâce à l'hypothèse de linéarité, d'étudier séparément la relation entre la sortie et chacune des entrées, puis de superposer les effets de chaque entrée.

Systèmes linéaires

Un modèle est dit linéaire s'il satisfait au théorème de superposition, c'est à dire si l'effet de la somme e des grandeurs d'entrées e_i est égale à la somme y de leurs effets y_i .

Si y_i est la réponse à l'entrée e_i et y la réponse à l'entrée e telle que : $e = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e_i$

Le principe de superposition est vérifié ssi :

$$y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot y_i$$

La relation de comportement d'un système linéaire peut se mettre sous la forme d'une *équation différentielle linéaire à coefficients constants*. Cette propriété sera à la base des développements ultérieurs.

Remarque : linéarisation d'un système non linéaire :

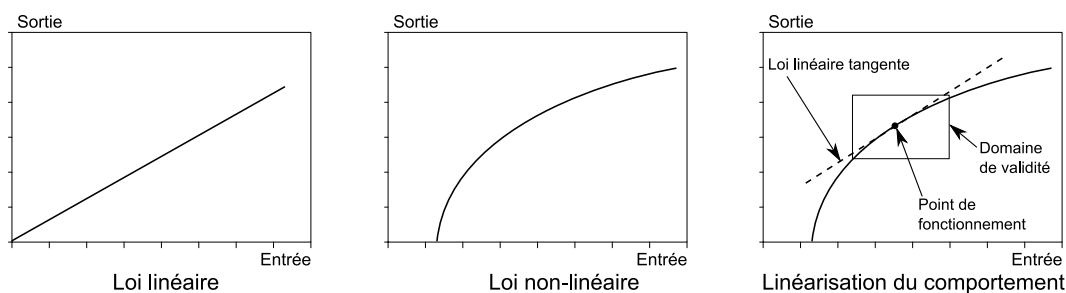
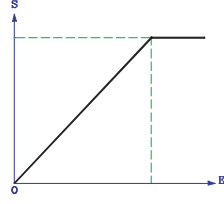
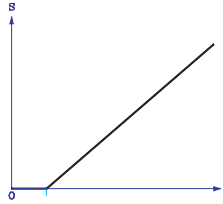
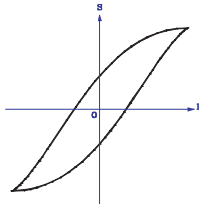


FIGURE 12 – Linéarisation d'un système non linéaire au voisinage d'un point.

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'application. Cependant, lorsque le système est utilisé dans une zone réduite du domaine d'application, il est possible de *linéariser* la réponse du système dans cette zone (figure 12).

Remarque : non linéarités remarquables :

Dénomination	Saturation	Seuil	Hystérésis
Schéma			
Exemples	Butée mécanique, aimantation, moteur électrique	frottement	Jeux mécaniques, matériaux (élastomère)

Système continu

Un système est continu si les fonction d'entrée et de sortie sont définies pour tout instant t . Les signaux sont dits *analogiques*

Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée informatiquement, ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. Ce sont *des systèmes et des signaux discrets*.

Système invariant

Les caractéristiques de comportement d'un système invariant sont indépendantes du temps.

Si une même entrée se produit à deux instants distincts (t_1 et t_2), alors les deux sorties temporelles ($s_1(t)$ et $s_2(t)$) seront identiques.

2.2 Modélisation

2.2.1 Notions de modélisation

La modélisation d'un système asservi se fait en plusieurs étapes :

1. Isoler le système étudié en positionnant la frontière,
2. Effectuer une décomposition en sous-systèmes plus facilement exploitable,
3. Établir un modèle de connaissance ou de comportement pour chaque sous-système,
4. Si besoin, regrouper les modèles des sous-systèmes pour répondre au problème posé.

Un **modèle de connaissance** est un modèle obtenu à partir de lois physiques. Cette modélisation est *analytique* et possède un sens physique fort.

Un **modèle de comportement** est un modèle dans lequel le sous-système est remplacé par une boîte noire. Le comportement réel est *identifié* au mieux à partir de *résultats expérimentaux*.

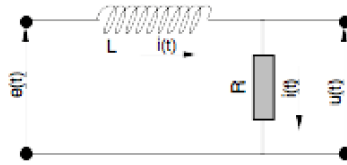
Remarque : Les systèmes automatisés réels ne sont ni continus, ni invariants, ni linéaires. On se ramène au cas des SLCI en faisant des *hypothèses* simplificatrices. La comparaison du modèle avec la réalité permettra de valider ou non les hypothèses proposées.

2.2.2 Exemples

Premier ordre : circuit R-L

On s'intéresse à un circuit RL (résistance + bobine). Hypothèses : la tension $e(t)$ est l'entrée,

la sortie est $u(t)$.



Moteur pas à pas se comportant comme un circuit RL

Les équations électriques nous donnent :

$$e(t) = L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t)$$

$$u(t) = Ri(t)$$

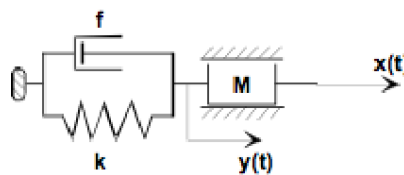
On obtient alors une équation différentielle reliant l'entrée à la sortie :

$$\frac{L}{R} \frac{du}{dt}(t) + u(t) = e(t)$$

On note $\tau = \frac{L}{R}$ la constante de temps du système.

Second ordre : ressort + amortisseur

On s'intéresse au mouvement d'une roue par rapport au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et ressort. Ce système peut être modélisé par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur montés en parallèle.



Doubles amortisseurs dans un mini-quad

On note $x(t)$ la force exercée sur la masse M et $y(t)$ la position de cette masse par rapport à l'équilibre. En appliquant le principe fondamentale de la dynamique sur la masse M soumise à l'action du ressort ($-ky(t)$), de l'amortisseur ($-f y'(t)$) et à la force $x(t)$, on obtient l'équation :

$$x(t) - ky(t) - f \frac{dy}{dt}(t) = M \frac{d^2y}{dt^2}(t)$$

On pose : $2\xi\omega_0 = \frac{f}{M}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ et $K\omega_0^2 \frac{1}{M}$, et ω_0 est appelée pulsation propre non amortie du système et est donnée en $rad.s^{-1}$, ξ est appelé coefficient d'amortissement et est sans unité.

2.2.3 Cas général

De manière générale, le modèle mathématique (ou dynamique) de comportement d'un système monovariable, linéaire, continu et invariant peut être décrit par l'équation différentielle suivante :

$$a_0.s(t) + a_1.\frac{ds}{dt}(t) + \dots + a_d.\frac{d^d s}{dt^d}(t) = b_0.e(t) + b_1.\frac{de}{dt}(t) + \dots + b_n.\frac{d^n e}{dt^n}(t)$$

Remarquons que $n < d$, condition nécessaire pour le bon respect du principe de causalité. Les transformations de Laplace permettent de travailler aisément avec ce type d'équation.

Après transformation de Laplace, l'équation devient (sous réserve de conditions initiales nulles) :

$$(a_0 + a_1.p + \dots + a_d.p^d).S(p) = (b_0 + b_1.p + \dots + b_n.p^n).E(p)$$

Fonction de transfert

On appelle fonction de transfert ou transmittance la fonction $H(p)$:

$$\boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}} \quad \text{ou encore} \quad S(p) = H(p).E(p)$$

$H(p)$ représente le comportement du système indépendamment du signal d'entrée. Le schéma bloc figure 24, dans le domaine de Laplace, définit le modèle mathématique du système.

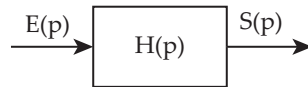


FIGURE 13 – Schéma bloc dans le domaine de Laplace.

$H(p)$ s'écrit, sous sa *forme canonique*, comme un quotient de deux polynômes :

$$\boxed{H(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_n.p^n}{\sum_{j=0}^d b_d.p^d}}$$

On définit :

- Les *pôles* : les racines du dénominateur,
- Les *zéros* : les racines du numérateur,
- α la *classe* du système : si $\alpha \neq 0$ alors $sp = 0$ est un pôle du dénominateur. On dit que le système comporte α intégrateurs,
- K le *gain* du système.

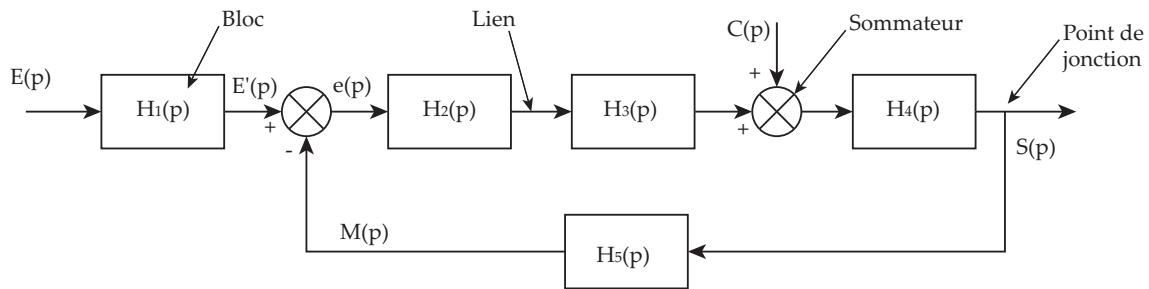
2.3 Manipulation des schémas blocs

Éléments de base

Les blocs : Ils contiennent une fonction de transfert ($H(p)$) caractérisant la relation entre l'entrée et la sortie.

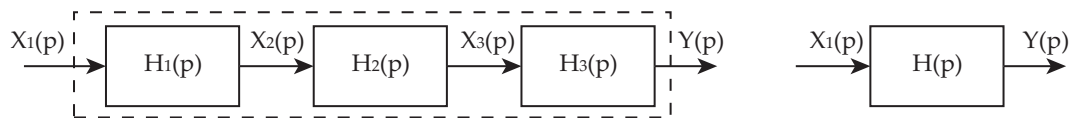
Les liens : Ils représentent une grandeur ($U(p)$) dans le domaine de Laplace.

Les points de jonction : Une jonction permet de transmettre une grandeur en entrée de plusieurs blocs ou sommateurs.



Les sommateurs : Ils additionnent (ou soustraient selon le signe) les différentes entrées. Ils n'ont qu'une sortie.

Association de blocs en série

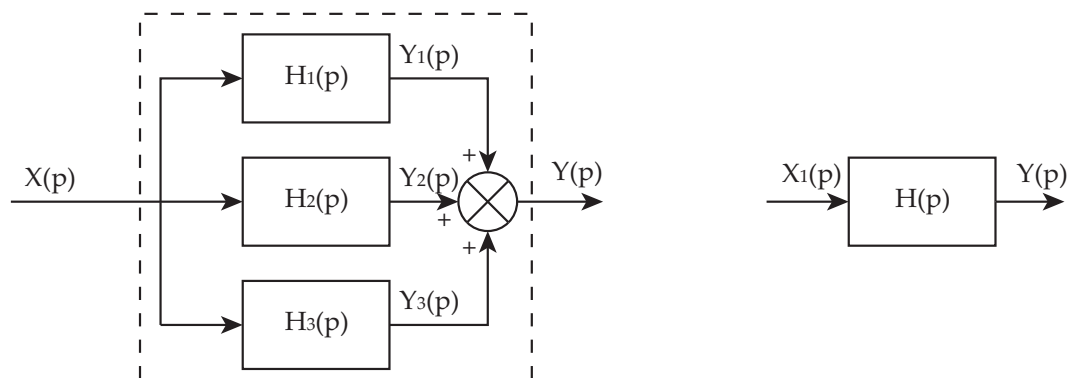


$$\left. \begin{aligned} X_2(p) &= H_1(p) \cdot X_1(p) \\ X_3(p) &= H_2(p) \cdot X_2(p) \\ Y(p) &= H_3(p) \cdot X_3(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot X_1(p)$$

La fonction de transfert globale s'écrit donc :

$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)$$

Association de blocs en parallèle

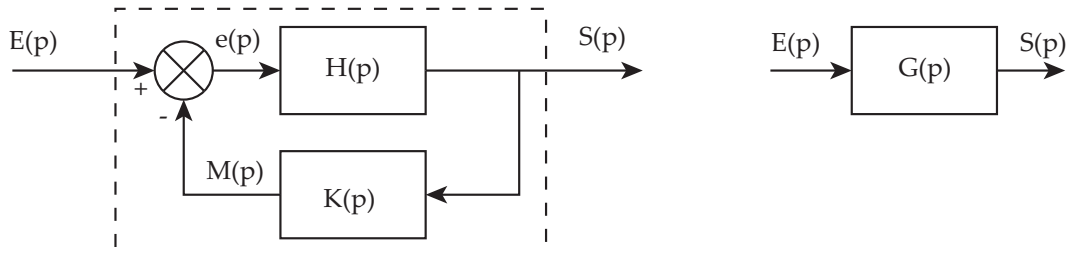


$$\left. \begin{aligned} Y_1(p) &= H_1(p) \cdot X(p) \\ Y_2(p) &= H_2(p) \cdot X(p) \\ Y_3(p) &= H_3(p) \cdot X(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(p) = [H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)] \cdot X(p)$$

La fonction de transfert globale s'écrit donc :

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$$

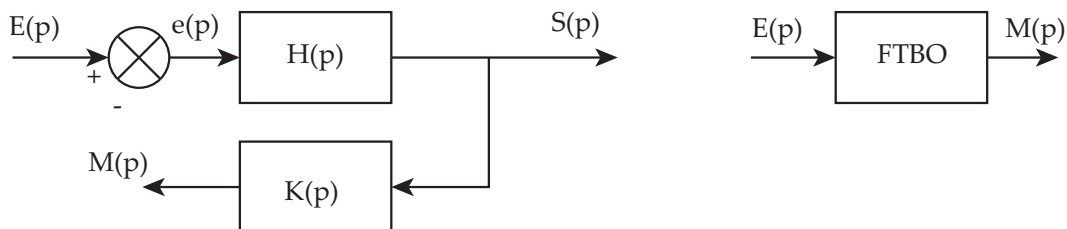
Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) d'un système bouclé



$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon(p) = E(p) - K(p).S(p) \\ S(p) = H(p).\varepsilon(p) \end{array} \right\} \Rightarrow G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1 + H(p).K(p)} \quad (\text{formule de Black})$$

Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) d'un système bouclé

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme la fonction de transfert du système lorsque le retour sur le sommateur est coupé. Elle comprend la chaîne d'action et la chaîne de mesure.



$$FTBO = \frac{M(p)}{E(p)} = H(p).K(p)$$

Déplacement des points de jonction et des sommateurs

Les schémas blocs peuvent subir des modifications en vue de les simplifier. La Figure 14 montre quelques schémas équivalents. L'inconvénient à modifier la structure du schéma est de perdre le lien entre les entrées/sorties du schéma et les grandeurs physiques du système étudié.

Remarque : Le système bouclé de la Figure 2.3 peut être transformé en système à *retour unitaire* (Figure 15).

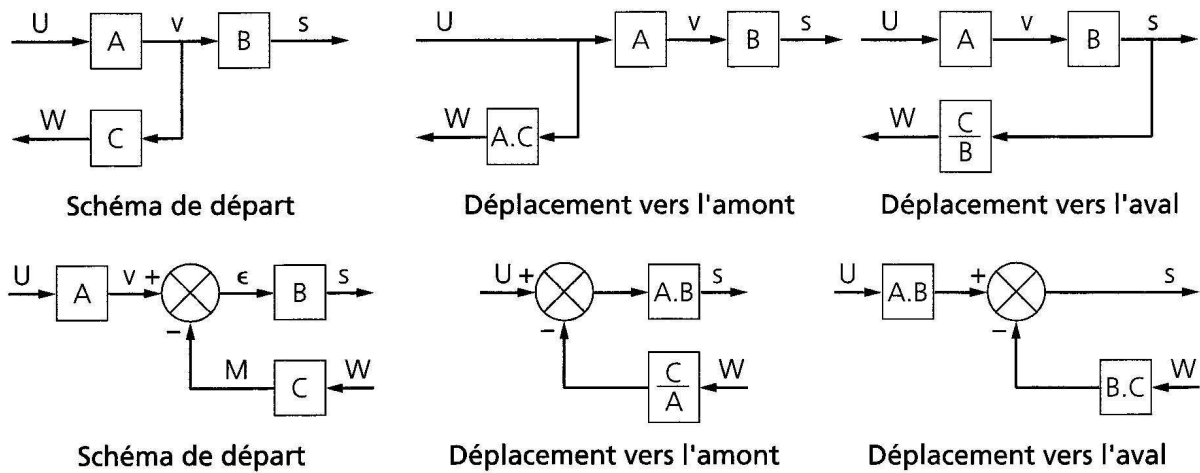


FIGURE 14 – Exemple d'opération sur les schémas blocs.

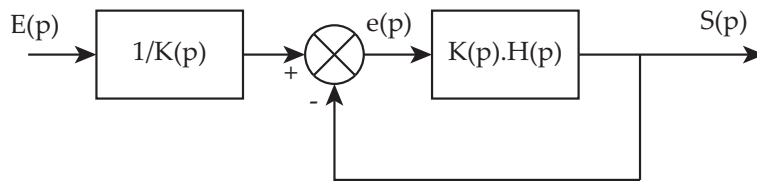


FIGURE 15 – Système bouclé à retour unitaire.

3 Réponse temporelle

L'analyse temporelle d'un système vise à étudier son comportement pour des sollicitations types en entrée. Ces entrées types sont classiquement : le Dirac $\delta(t)$, l'échelon $U(t)$ et la rampe.

La stratégie généralement utilisée est la suivante :

- effectuer la transformée de Laplace de l'équation différentielle du système et celle de la fonction d'entrée,
- exprimer la sortie dans le domaine de Laplace,
- effectuer la transformée de Laplace inverse de la sortie (pour revenir en temporel), à l'aide du tableau des transformées usuelles. Il faut préalablement la *décomposer en éléments simples* pour faire apparaître les éléments du tableau.

3.1 Système du premier ordre

3.1.1 Définition

Équation temporelle

Le comportement d'un système du premier ordre est caractérisé par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$s(t) + \tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} = K \cdot e(t)$$

On appelle :

- K : gain statique,
- τ : constante de temps.

L'appellation "gain statique" est justifiée par le comportement statique du système : si les entrée et sortie sont constantes, l'équation différentielle devient $s+0 = Ke$, d'où en statique : $K = \frac{s}{e}$.

Fonction de transfert

La transformée de Laplace conduit lorsque les *conditions initiales sont toutes nulles* à : $S(p) + \tau.p.S(p) = K.E(p)$. La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

Cette forme de la fonction de transfert est appelée *forme canonique* (la constante du polynôme du dénominateur vaut 1).

3.1.2 Réponse à un échelon (*réponse indicielle*)

[à connaître par coeur]

Soit en entrée du système du premier ordre la fonction $e(t) = e_0.U(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = \frac{e_0}{p}$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = \frac{K.e_0}{p.(1 + \tau.p)}$$

On effectue la décomposition en éléments simples pour effectuer la transformée de Laplace inverse de la sortie :

$$S(p) = \frac{K.e_0}{p.(1 + \tau.p)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(1 + \tau.p)}$$

En réduisant au même dénominateur, les constantes α et β sont identifiées :

$$S(p) = \frac{K.e_0}{p.(1 + \tau.p)} = \frac{\alpha.(1 + \tau.p) + \beta.p}{p.(1 + \tau.p)} \implies \begin{cases} \alpha = K.e_0 \\ \beta = -K.e_0.\tau \end{cases}$$

d'où :

$$S(p) = K.e_0. \left[\frac{1}{p} - \frac{\tau}{(1 + \tau.p)} \right]$$

La transformée de Laplace inverse est alors évidente :

$$s(t) = K.e_0.U(t). [1 - e^{-t/\tau}]$$

Propriétés de la réponse (Figure 16) :

- fonction croissante de t ,
- asymptote pour $t \longrightarrow +\infty$: $s(t) \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} K.e_0$ (réponse statique, ou permanente),
- valeur à l'origine : $s(0) = 0$,
- tangente à l'origine : $\frac{ds}{dt}(0) = K.e_0/\tau$,
- la tangente à l'origine ($y = K.e_0.t/\tau$) coupe l'asymptote ($y = K.e_0$) en $t = \tau$,

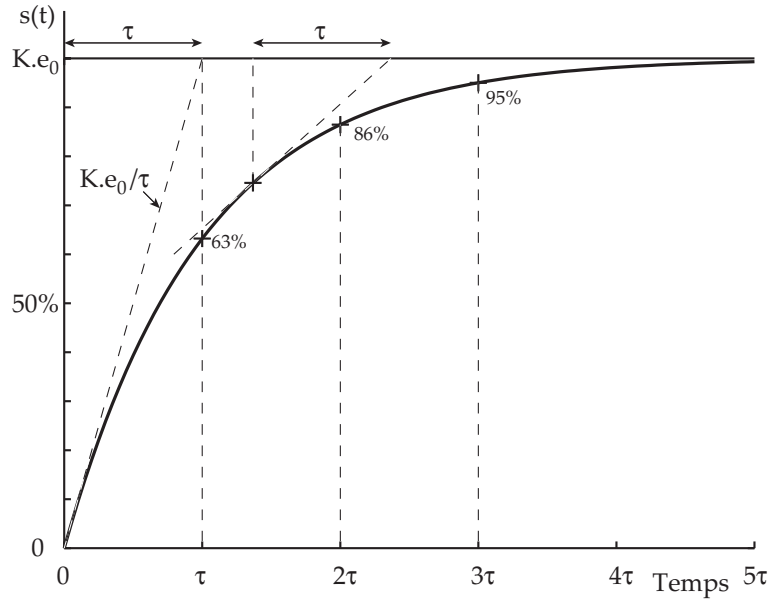


FIGURE 16 – Caractéristiques de la réponse du premier ordre à un échelon.

- en $t = \tau$, $s(\tau) = 0.63 \times K.e_0$ soit 63% de la réponse permanente,
- en $t = 3.\tau$, $s(3.\tau) = 0.95 \times K.e_0$ soit 95% de la réponse permanente.

Le temps de réponse à 5% caractérisant la rapidité du système est directement lié à τ , et vaut $3.\tau$.

Remarques :

L'asymptote et la valeur de la tangente à l'origine se calculent dans le domaine de Laplace à l'aide du théorème de la valeur finale et du théorème de la valeur initiale ;

Une augmentation de la constante de temps τ diminue la rapidité du système,

Une augmentation du gain K agit comme une augmentation de la consigne.

Remarque pour l'identification : lorsque la courbe expérimentale de la réponse d'un système à un échelon en entrée est similaire à la réponse d'un premier ordre, il est possible d'identifier les coefficients K et τ à l'aide de la valeur à convergence (pour K) et de la tangente à l'origine ou des temps à 64%, ou 95% de la réponse à convergence (pour τ).

3.1.3 Réponse à une rampe

L'entrée sous forme de rampe s'écrit :

$$e(t) = e_0.t.U(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \frac{e_0}{p^2}$$

D'où la sortie :

$$S(p) = \frac{K.e_0}{p^2.(1 + \tau.p)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{(1 + \tau.p)} = \frac{\alpha.p.(1 + \tau.p) + \beta.(1 + \tau.p) + \gamma.p^2}{p^2.(1 + \tau.p)} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -K.e_0.\tau \\ \beta = K.e_0 \\ \gamma = K.e_0.\tau^2 \end{cases}$$

$$S(p) = K.e_0. \left[\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1 + \tau.p} \right] \quad \Rightarrow \quad s(t) = K.e_0.U(t). [t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}]$$

Propriétés de la réponse (Figure 17) :

- fonction croissante de t ,
- asymptote pour $t \rightarrow +\infty : s(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} K.e_0.(t - \tau)$,
- valeur à l'origine : $s(0) = 0$,
- tangente horizontale à l'origine : $\frac{ds}{dt}(0) = 0$,
- l'asymptote ($y = K.e_0.t/\tau$) coupe l'axe des temps en $t = \tau$.

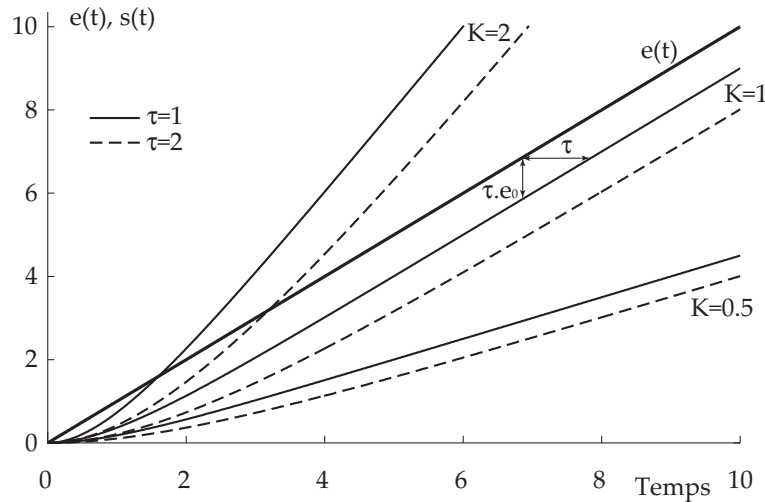


FIGURE 17 – Caractéristiques de la réponse du premier ordre à une rampe.

Dans le cas particulier où $K = 1$, l'asymptote est parallèle à la consigne et il est alors possible de définir une *erreur en vitesse* (ou encore *erreur de trainée*, *erreur dynamique* ou *erreur de poursuite*) entre la consigne et la réponse valant $e_0.\tau$.

3.1.4 Réponse à un Dirac (réponse impulsionnelle)

Les développements pour le cas du Dirac sont particulièrement simples. Remarquons que $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p))$ est appelée réponse impulsionnelle car elle correspond effectivement à la réponse à un Dirac dont la transformée de Laplace vaut 1.

$$e(t) = \delta(t), \quad E(p) = 1, \quad S(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}, \quad s(t) = \frac{K}{\tau}.e^{-t/\tau}$$

Propriétés de la réponse (Figure 18) :

- fonction décroissante de t ,
- asymptote pour $t \rightarrow +\infty : s(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (réponse statique ou permanente nulle),
- valeur à l'origine : $s(0) = \frac{K}{\tau}$,
- tangente à l'origine : $\frac{ds}{dt}(0) = -K/\tau^2$,
- la tangente à l'origine ($y = -K.(t - \tau)/\tau^2$) coupe l'axe des temps en $t = \tau$.

3.2 Système du second ordre

3.2.1 Définition

Équation temporelle

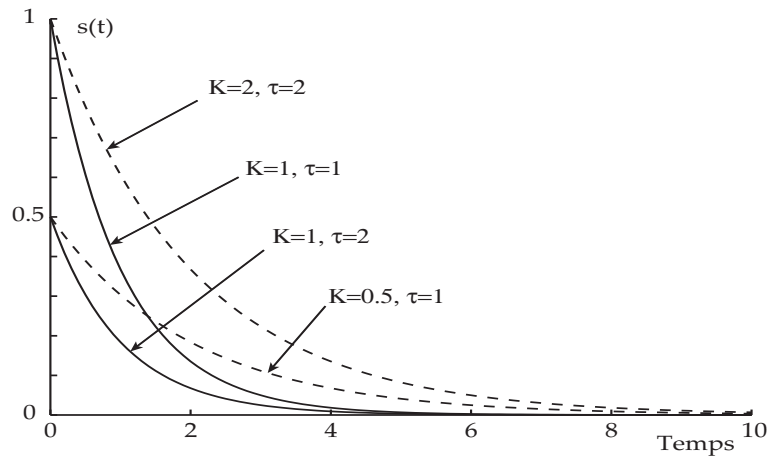


FIGURE 18 – Caractéristiques de la réponse du premier ordre à un Dirac.

Le comportement d'un système du second ordre est caractérisé par une équation différentielle du second ordre à coefficients constants :

$$s(t) + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} = K \cdot e(t)$$

On appelle :

- K : gain statique,
- ξ : coefficient d'amortissement ($\xi > 0$),
- ω_0 : pulsation naturelle ou pulsation propre non amortie ($\omega_0 > 0$).

Fonction de transfert

La transformée de Laplace conduit, lorsque les conditions initiales sont toutes nulles, à : $S(p) + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p \cdot S(p) + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 \cdot S(p) = K \cdot E(p)$. La fonction de transfert s'écrit donc :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$$

Cette forme de la fonction de transfert est la *forme canonique* (la constante du polynôme du dénominateur vaut 1).

Les trois entrées types (échelon, Dirac et rampe) seront envisagées mais seule l'entrée en échelon sera approfondie (les autres seront étudiées sur courbes).

3.2.2 Réponse à un échelon (réponse indicielle)

[connaître par coeur les propriétés]

Soit en entrée du système du second ordre la fonction $e(t) = e_0 \cdot U(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = \frac{e_0}{p}$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = \frac{K \cdot e_0}{p \cdot (1 + \frac{2\xi}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2)}$$

La décomposition en éléments simples passe en premier lieu par la recherche des pôles. On trouve le pôle $p = 0$ ainsi que les racines du polynôme du second degré qui dépendent

du signe du discriminant $\Delta = (\xi^2 - 1)/\omega_0^2$. On distingue les trois cas :

1. Si l'amortissement est faible ($\xi < 1$), alors $\Delta < 0$ et il y a deux racines complexes,
2. Si l'amortissement est critique ($\xi = 1$), alors $\Delta = 0$ et il y a une racine réelle, double,
3. Si l'amortissement est important ($\xi > 1$), alors $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles,

Amortissement faible : réponse oscillante amortie (régime pseudo-périodique)

Dans le cas où $\xi < 1$, on trouve deux racines complexes conjuguées : $p = -\xi.\omega_0 \pm i.\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}$. Sachant que ξ et ω_0 sont positifs, on vérifie que les parties réelles sont négatives ce qui assure un comportement stable.

La décomposition en éléments simples dans l'espace des réels conduit à :

$$S(p) = \frac{K.e_0.\omega_0^2}{p.(p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0^2)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta.p + \gamma}{p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0^2}$$

Après réduction au même dénominateur et identification, on trouve la décomposition :

$$S(p) = K.e_0. \left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2.\xi.\omega_0}{p^2 + 2.\xi.\omega_0.p + \omega_0^2} \right]$$

que l'on met sous la forme de somme d'éléments du tableau de transformées :

$$S(p) = K.e_0. \left[\frac{1}{p} - \frac{p + \xi.\omega_0}{(p + \xi.\omega_0)^2 + \omega_0^2.(1 - \xi^2)} - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}}{(p + \xi.\omega_0)^2 + \omega_0^2.(1 - \xi^2)} \right]$$

On en déduit alors la réponse temporelle :

$$s(t) = K.e_0. \left[1 - e^{-\xi.\omega_0.t} \cdot \left(\cos(\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}.t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin(\omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}.t) \right) \right] . U(t)$$

Propriétés de la réponse (Figure 19) :

- fonction oscillante (partie sinusoïdale) amortie (exponentielle décroissante),
- asymptote pour $t \rightarrow +\infty$: $s(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} K.e_0$ (réponse statique ou permanente),
- valeur à l'origine : $s(0) = 0$,
- tangente à l'origine horizontale : $\frac{ds}{dt}(0) = 0$,

On note $\omega = \omega_0.\sqrt{1 - \xi^2}$ la *pseudo-pulsation* qui conduit à la *pseudo-période* : $T = \frac{2.\pi}{\omega}$.

Remarque :

L'asymptote et la valeur de la tangente à l'origine se calculent dans le domaine de Laplace à l'aide du théorème de la valeur finale et du théorème de la valeur initiale.

Propriétés des dépassements [pour info] :

Les dépassements sont des extremums de la réponse $s(t)$ aux temps t_k , ils sont donc tels que : $\frac{ds}{dt}(t_k) = 0$. Or,

$$\frac{ds}{dt}(t) = K.e_0.e^{-\xi.\omega_0.t} \cdot \left[\underbrace{\left(\xi.\omega_0 - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.\omega \right)}_{=0} \cdot \cos(\omega.t) + \left(\frac{\xi^2.\omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \omega \right) \sin(\omega.t) \right]$$

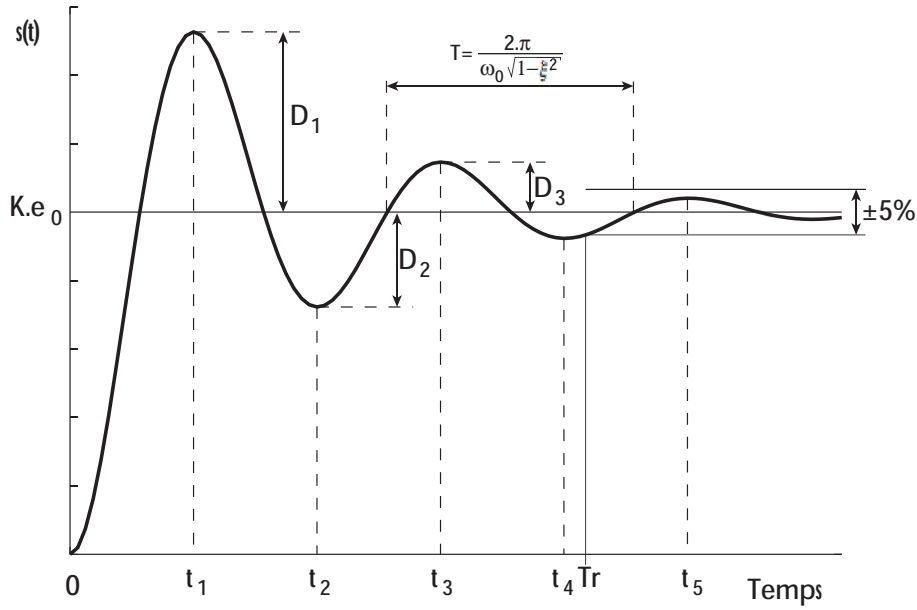


FIGURE 19 – Caractéristiques de la réponse oscillante amortie d'un second ordre à un échelon.

La dérivée est donc nulle lorsque le sinus est nul soit :

$$\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t_k = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{N}^+ \quad \Longleftrightarrow \quad t_k = \frac{k \cdot \pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

La valeur de $s(t)$ en t_k se déduit alors :

$$s(t_k) = K \cdot e_0 \cdot \left[1 - e^{-\xi \cdot \frac{k \cdot \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \times (-1)^k \right]$$

d'où le temps et la hauteur (en % de la valeur à convergence) du dépassement k :

$$\begin{cases} t_k = \frac{k \cdot \pi}{\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \\ D_k = e^{-\xi \cdot \frac{k \cdot \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} \end{cases}$$

Remarques :

L'expression de D_k ne dépend que de l'amortissement ξ . On peut donc inverser ce système pour obtenir les caractéristiques de la fonction de transfert ξ et ω_0 en fonction de la mesure de t_k et D_k sur la courbe :

$$\begin{cases} \xi = \left(1 + \frac{k^2 \cdot \pi^2}{\ln^2 D_k} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \omega_0 = \frac{k \cdot \pi}{t_k \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \end{cases}$$

La pulsation propre non amortie ω_0 ne modifie pas l'amplitude des dépassement D_k .

Remarques pour l'identification :

Le premier dépassement D_1 permet d'identifier le coefficient ξ ,

Le temps de dépassement correspondant t_1 permet d'identifier la pulsation propre non amortie ω_0 .

Amortissement critique : réponse amortie (régime aperiodique critique)

Dans le cas où $\xi = 1$, on trouve une racine double : $p = -\omega_0$. Cette valeur étant négative, le système est stable et la réponse se calcule par la décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{K.e_0.\omega_0^2}{p.(p^2 + 2.\omega_0.p + \omega_0^2)} = \frac{K.e_0.\omega_0^2}{p.(p + \omega_0)^2} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(p + \omega_0)} + \frac{\gamma}{(p + \omega_0)^2}$$

Après réduction au même dénominateur puis identification des coefficients du polynôme, on trouve :

$$S(p) = K.e_0. \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{(p + \omega_0)} - \frac{\omega_0}{(p + \omega_0)^2} \right]$$

D'où la réponse temporelle :

$$s(t) = K.e_0.U(t). [1 - (1 + t.\omega_0).e^{-t.\omega_0}]$$

Propriétés de la réponse (Figure 20) :

- fonction croissante de t sur \mathbb{R}^+ ,
- asymptote pour $t \rightarrow +\infty$: $s(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} K.e_0$ (réponse statique ou permanente),
- valeur à l'origine : $s(0) = 0$,
- tangente à l'origine horizontale : $\frac{ds}{dt}(0) = 0$,

Remarques :

L'asymptote et la valeur de la tangente à l'origine se calculent dans le domaine de Laplace à l'aide du théorème de la valeur finale et du théorème de la valeur initiale ;

La réponse du système du second ordre pour différentes valeurs de ξ est donnée sur la Figure 20 (courbe surlignée basse). On remarque que le régime critique présente le temps de montée et la rapidité maximale sans dépassement. Dans le cas où l'on s'autorise un dépassement, un système plus rapide est obtenu avec $\xi \simeq 0.7$ (courbe surlignée haute) où le temps de montée est plus rapide tandis que le premier dépassement ne sort pas de la plage des 5% autour de la valeur à convergence.

Amortissement fort : réponse amortie (régime aperiodique)

Dans le cas où $\xi > 1$, on trouve deux racines réelles : $p = -\xi.\omega_0 \pm \omega_0.\sqrt{\xi^2 - 1}$. Sachant que ξ et ω_0 sont positifs, on vérifie que les deux pôles sont négatifs ce qui assure un comportement stable.

La décomposition en éléments simples conduit à :

$$S(p) = \frac{K.e_0.\omega_0^2}{p.(p - p_1).(p - p_2)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(p - p_1)} + \frac{\gamma}{(p - p_2)}$$

Après calcul des constantes, on obtient :

$$S(t) = K.e_0.U(t). \left[1 + \frac{\omega_0^2}{p_1 - p_2} \left(\frac{1}{p_1} e^{p_1.t} - \frac{1}{p_2} e^{p_2.t} \right) \right]$$

La constante 1 représente la réponse permanente tandis que les deux exponentielles représentent les réponses transitoires.

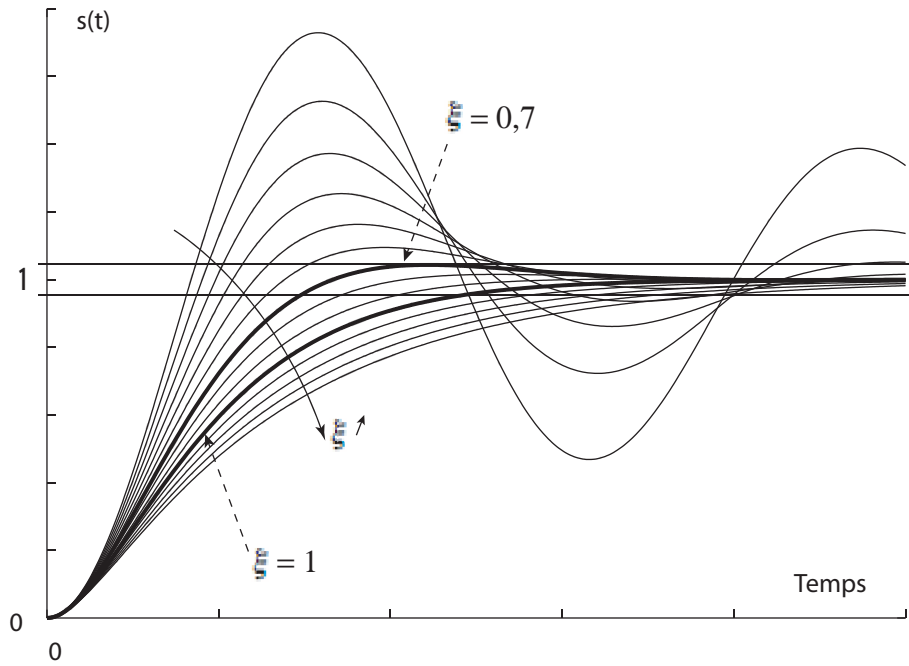


FIGURE 20 – Réponse d'un système du second ordre à une réponse indicielle pour différentes valeurs de l'amortissement critique ξ . On retrouve les trois types de réponse : amortie, critique et oscillante amortie.

On propose de modifier la forme du résultat pour faire apparaître des termes similaires à celui d'un premier ordre. En effet, en posant $p_1 = -1/T_1$ et $p_2 = -1/T_2$, $H(p)$ peut s'exprimer comme le produit de deux premiers ordres (en remarquant que le produit $p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2$) :

$$H(p) = \frac{K \cdot e_0}{p \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2)} = \frac{K \cdot e_0 \cdot \omega_0^2}{p \cdot (1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

De la même manière, la réponse temporelle s'écrit en fonction de T_1 et T_2 :

$$S(t) = K \cdot e_0 \cdot U(t) \cdot \left[1 + \frac{1}{T_1 - T_2} (T_1 \cdot e^{-t/T_1} - T_2 \cdot e^{-t/T_2}) \right]$$

Propriétés de la réponse (Figure 20) :

- fonction croissante de t sur \mathbb{R}^+ ,
- asymptote pour $t \rightarrow +\infty$: $s(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} K \cdot e_0$ (réponse statique ou permanente),
- valeur à l'origine : $s(0) = 0$,
- tangente à l'origine horizontale : $\frac{ds}{dt}(0) = 0$,

Remarques :

L'asymptote et la valeur de la tangente à l'origine se calculent dans le domaine de Laplace à l'aide du théorème de la valeur finale et du théorème de la valeur initiale ;

La réponse est la somme d'une fonction échelon et de deux exponentielles de constantes de temps T_1 et T_2 . Remarquons que dans le cas où une des constantes de temps est très inférieure à l'autre ($T_2 \ll T_1$), le système peut être considéré comme un premier ordre (de constante de temps T_1), éventuellement retardé de T_2 (voir courbes fournies).

4 Réponse fréquentielle

4.1 Introduction à l'analyse fréquentielle

On s'intéresse ici à prédire les caractéristiques de la réponse d'un système linéaire continu invariant à une entrée dynamique (variable dans le temps).

Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

On montre que tout signal périodique $f(t)$ de période T_0 (et pulsation ω_0) sur \mathbb{R} peut s'écrire sous la forme d'une série :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cdot \cos k \cdot \omega_0 \cdot t + b_k \cdot \sin k \cdot \omega_0 \cdot t) \quad \text{où les } a_k \text{ et } b_k \text{ sont des réels.}$$

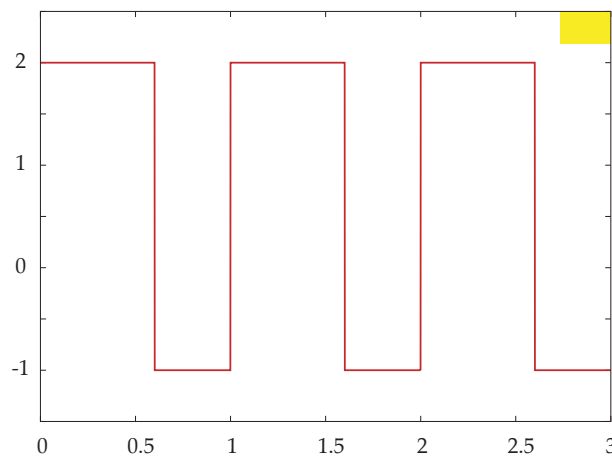


FIGURE 21 – Fonction périodique.

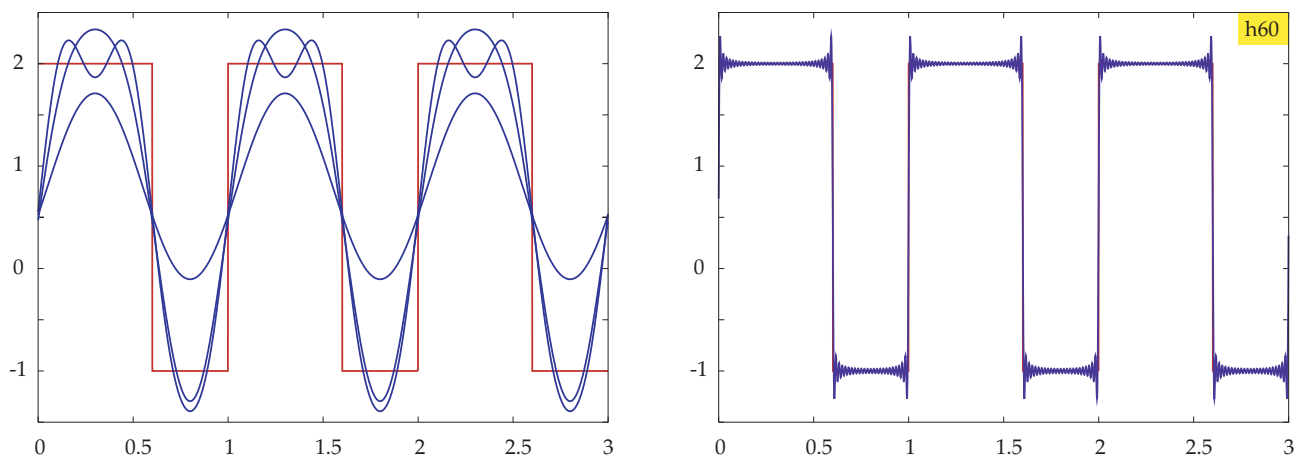


FIGURE 22 – Signal initial comparé aux sommes de la 1ère, des 2 ou 3 premières (à gauche) et des 60èmes (à droite) premières harmoniques.

En utilisant les formules d'Euler, cette expression devient :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \cdot e^{j.k.\omega_0.t} \quad \text{où } F_k \in \mathbb{C}$$

Lorsque T devient très grand, ω_0 tend vers 0.

Remarque : l'étude de la réponse d'un système à une entrée périodique se ramène donc à l'étude de sa réponse à des entrées sinusoïdales (car il est *linéaire*).

Transformée de Fourier d'un signal non périodique

Le signal non périodique est la limite d'un signal périodique quand $T \rightarrow 0$. La somme discrète devient une somme continue sur \mathbb{R} :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j.\omega.t} \cdot d\omega \quad \text{où } F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

où $F(\omega)$ est une fonction définie sur \mathbb{R} appelée *transformée de Fourier*. Elle représente le contenu fréquentiel de $f(t)$.

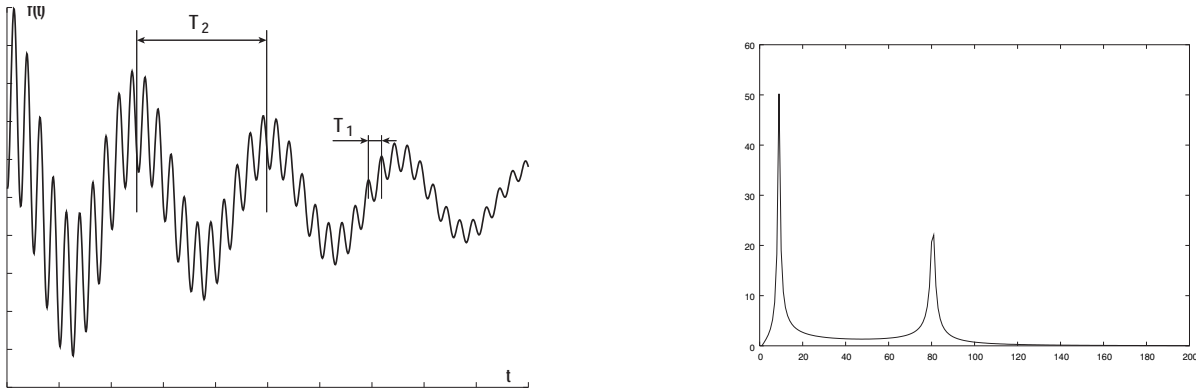


FIGURE 23 – Signal comportant principalement deux fréquences et sa transformée de Fourier.

La transformée de Fourier contient toute l'information contenue dans $f(t)$. Elle se calcule par la relation :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j.\omega.t} \cdot dt$$

Remarque : l'étude de la réponse d'un système à une entrée non périodique se ramène donc aussi à l'étude de sa réponse à des entrées sinusoïdales (car il est *linéaire*).

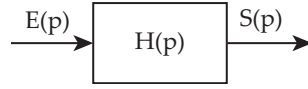
Réponse d'un système à une entrée sinusoïdale

Soit un système stable, de fonction de transfert $H(p)$, auquel on applique une entrée sinusoïdale sous la forme :

$$e(t) = e_0 \cdot U(t) \cdot \cos \omega \cdot t = \operatorname{Re} \left[\underbrace{e_0 \cdot U(t) \cdot e^{j.\omega.t}}_{\underline{e}(t) \in \mathbb{C}} \right]$$

Par transformation de Laplace, on trouve $E(p) = \frac{e_0 \cdot p}{p^2 + \omega^2}$. La sortie $S(p)$ s'écrit alors

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot p \cdot H(p)}{p^2 + \omega^2}.$$


 FIGURE 24 – Système de comportement $H(p)$.

Le système étant stable, ses pôles sont tous à parties réelles strictement négatives donc $H(p)$ peut s'écrire :

$$H(p) = K \cdot \frac{\prod(p - z_i)}{\prod(p - p_i)}$$

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ conduit à :

$$S(p) = \frac{K \cdot e_0 \cdot p \cdot \prod(p - z_i)}{(p^2 + \omega^2) \cdot \prod(p - p_i)} = \underbrace{\sum \frac{a_i}{(p - p_i)^k}}_{\text{Partie transitoire de la réponse (exponentielle décroissante)}} + \underbrace{\frac{\alpha \cdot p + \beta \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}}_{\text{Partie permanente de la réponse (sinusoïde)}}$$

Après un temps suffisant, la partie transitoire devient négligeable. Seule la réponse permanente nous intéresse :

$$S(p) = \frac{\alpha \cdot p + \beta \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

Le calcul de α et β se fait en multipliant par $p^2 + \omega^2$ et en choisissant $p = j \cdot \omega \Rightarrow e_0 \cdot j \cdot \omega \cdot H(p) = j \cdot \omega \cdot \alpha + \omega \cdot \beta$. D'où :

$$\begin{cases} \alpha = \text{Im}[e_0 \cdot j \cdot H(j \cdot \omega)] = \text{Re}[e_0 \cdot H(j \cdot \omega)] \\ \beta = \text{Re}[e_0 \cdot j \cdot H(j \cdot \omega)] \end{cases}$$

On en déduit la réponse temporelle permanente qui s'écrit, après simplifications :

$$s(t) = \text{Re}[e_0 \cdot H(j \cdot \omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}] = \text{Re}[H(j \cdot \omega) \cdot \underline{e}(t)]$$

La sortie est donc aussi une sinusoïde, qui peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = e_0 \cdot |H(j \cdot \omega)| \cdot \cos[\omega \cdot t + \arg(H(j \cdot \omega))]$$

où

- $|H(j \cdot \omega)|$ représente l'amplification de l'entrée, c'est à dire le gain du système,
- $\arg(H(j \cdot \omega))$ représente le déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$.

$H(j \cdot \omega)$ traduit le comportement fréquentiel du système $H(p)$. Remarquons que p parcourt alors l'axe des imaginaires positifs.

4.1.1 Intérêt de l'analyse fréquentielle

$H(j \cdot \omega)$ permettant de calculer la réponse $s(t)$ à toute entrée sinusoïdale $e(t)$ à la pulsation ω , le théorème de superposition permet de calculer $s(t)$ pour toute entrée $e(t)$ par transformée de Fourier \mathcal{F} :

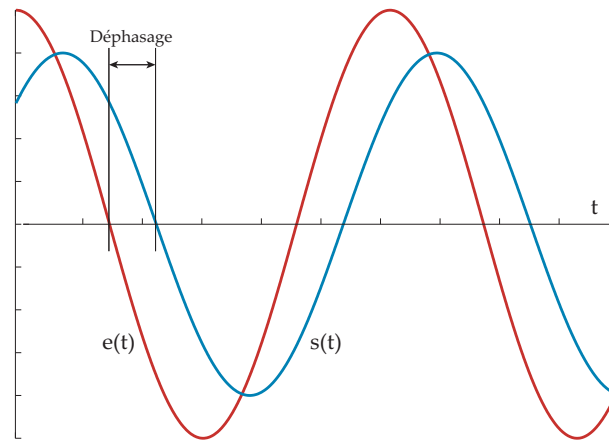


FIGURE 25 – Entrée sinusoïdale et sortie sinusoïdale dont l’amplitude est modifiée ainsi que la phase.

$$\begin{array}{ccc}
 e(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} E(j.\omega) \cdot e^{j.\omega.t} . d\omega & \xrightarrow{\quad ?? \quad} & s(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H(j.\omega) \cdot E(j.\omega) \cdot e^{j.\omega.t} . d\omega \\
 \downarrow \mathcal{F} & & \uparrow \mathcal{F}^{-1} \\
 E(j.\omega) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & S(j.\omega) = H(j.\omega) \cdot E(j.\omega)
 \end{array}$$

D’autre part, l’analyse fréquentielle permet d’étudier plus précisément la stabilité des systèmes réels.

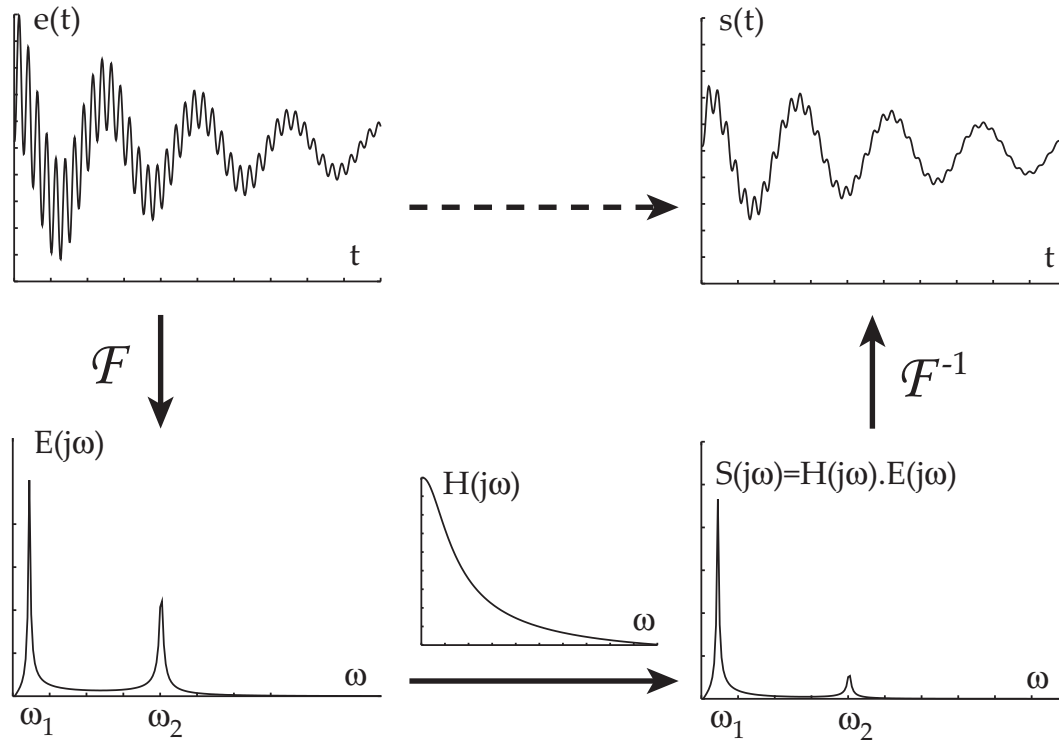


FIGURE 26 – Utilisation de la transformée de Fourier pour calculer la réponse d'un système linéaire.

4.2 Représentation par diagramme de Bode

Afin de représenter $|H(j.\omega)|$ et $\arg(H(j.\omega))$, on utilise principalement les représentations de Bode.

4.2.1 Définition

Le diagramme de Bode est est la représentation graphique de deux courbes :

- $G = 20\log|H(j.\omega)|$ (le gain, en deciBel -dB-),
 - $\phi = \arg(H(j.\omega))$ (le déphasage, en degrés -°-).
- en fonction de ω , sur une échelle logarithmique.

Le déphasage est un angle modulo $2.\pi$. Il est cependant considéré comme un "retard de phase" pour le bon respect du principe de causalité, ce qui conduit à le tracer sur $[-2.\pi, 0]$.

4.2.2 Système du premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p} \quad \text{d'où : } H(j.\omega) = \frac{K}{1 + \tau.j.\omega}$$

$$\begin{cases} |H(j.\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2.\omega^2}} \\ \varphi = \arg(H(j.\omega)) = -\arctan(\tau.\omega) \end{cases} \quad \text{et } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \text{ car } \tau.\omega > 0$$

Propriétés de la courbe :

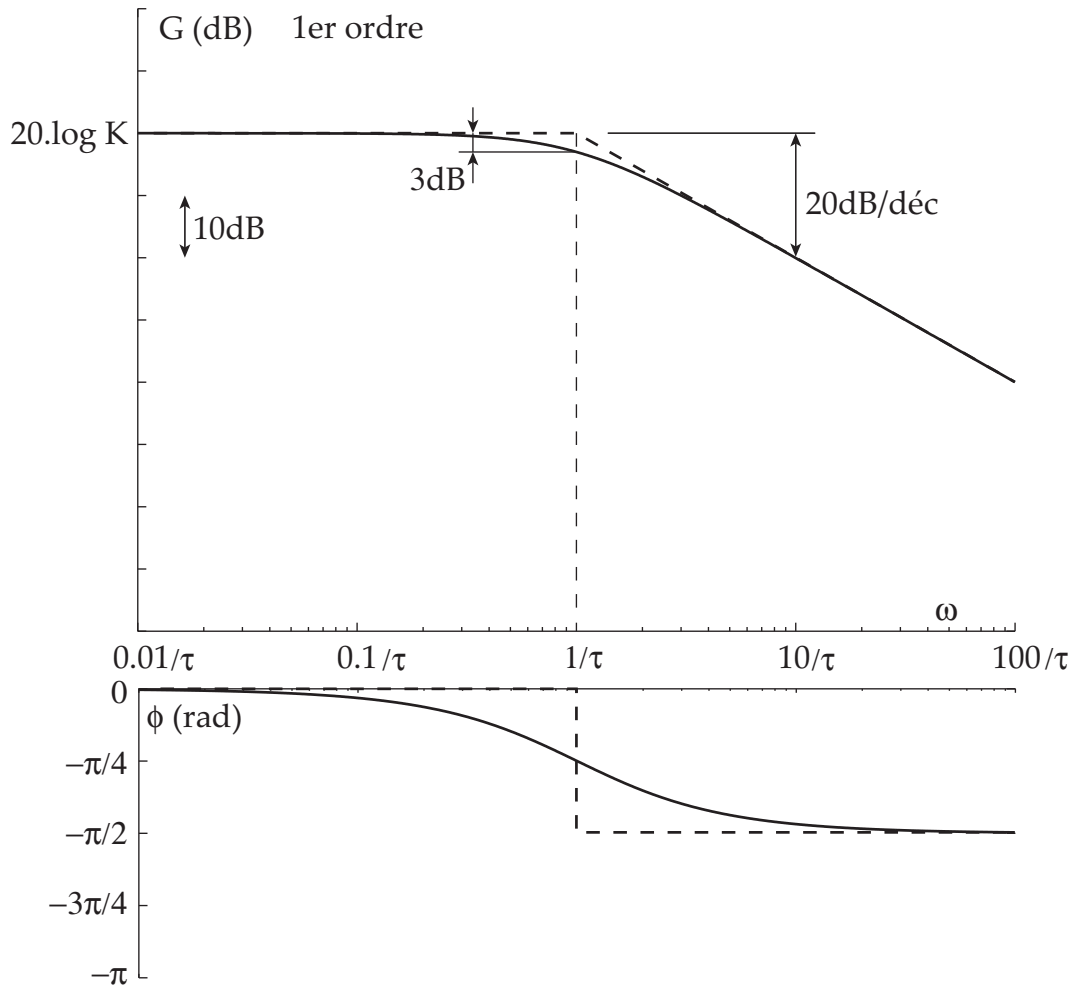


FIGURE 27 – Diagramme de Bode d'un système du premier ordre.

– Gain :

$$|H(j.\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} K \text{ d'où : } G \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 20.\log K$$

$$|H(j.\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \frac{K}{\tau.\omega} \text{ d'où : } G \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 20.\log \frac{K}{\tau} - 20.\log \omega$$

$$\text{Pour } \omega = 1/\tau, |H(j.\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}, \text{ d'où } G(1/\tau) = 20.\log K - \underbrace{20.\log \sqrt{2}}_{\simeq 3\text{dB}} = G(\omega \rightarrow 0) - 3\text{dB}$$

Remarque : les deux asymptotes se coupent en $\omega = 1/\tau$, la fréquence de coupure.

– Phase :

$$\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

$$\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-\pi}{2}$$

$$\varphi(\omega = 1/\tau) = \frac{-\pi}{4}$$

Remarques pour l'identification :

à partir d'un lieu de transfert expérimental correspondant à l'allure d'un système du premier ordre, on peut procéder à une identification en utilisant :

- les basses fréquences pour trouver le gain du système,
- la phase à 45° pour ω_0 .

4.2.3 Système du second ordre

$$H(p) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2} \quad \text{d'où : } H(j \cdot \omega) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2 \cdot j \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \omega}$$

$$\begin{cases} |H(j \cdot \omega)| = \frac{K \cdot \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arg[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2 \cdot j \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \omega] = -\arctan \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{cases} \quad \text{avec : } \varphi \in [-\pi, 0] \text{ car } 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot \omega > 0$$

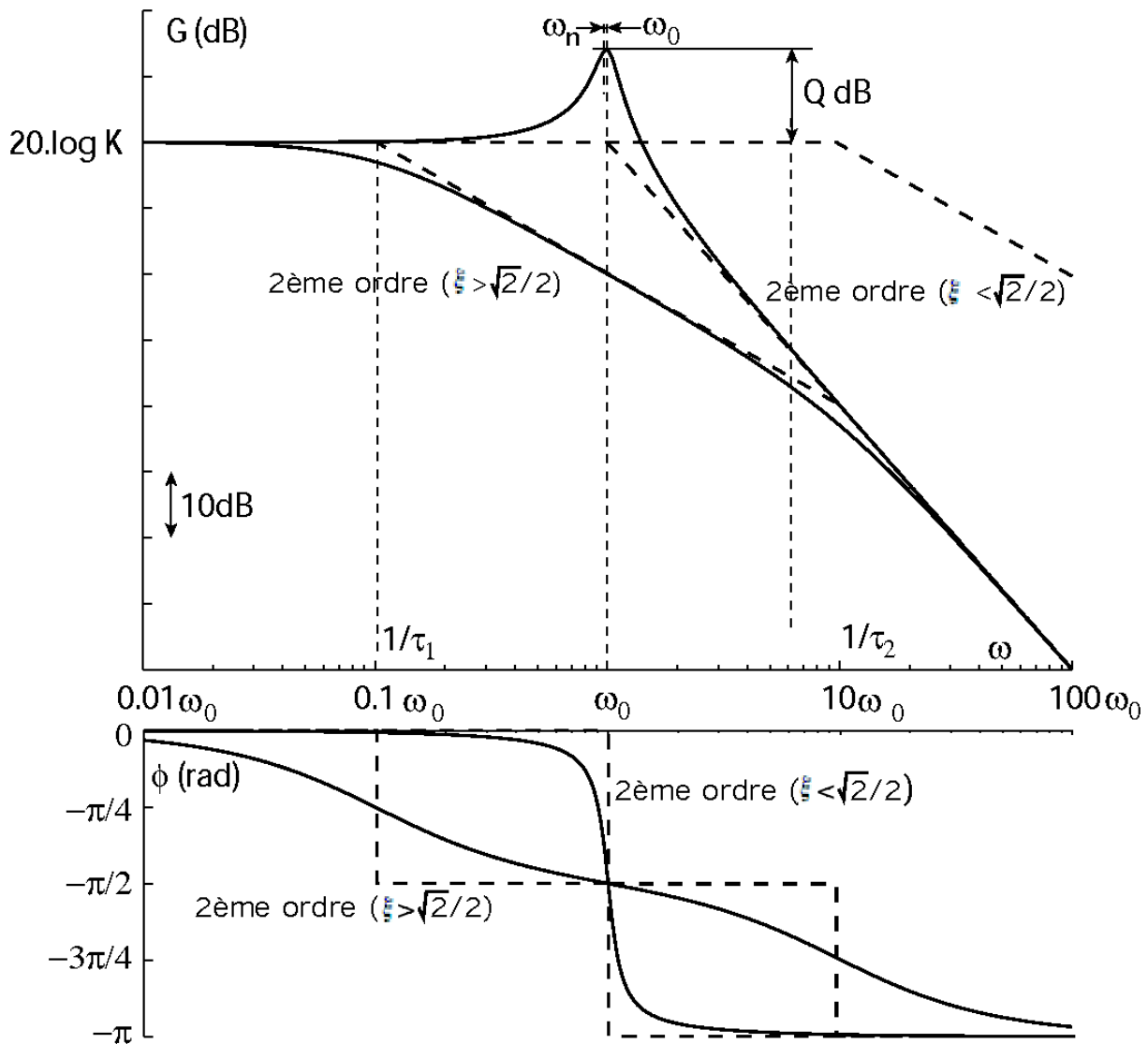


FIGURE 28 – Diagramme de Bode d'un système du second ordre.

Propriétés de la courbe :

– Gain :

$$G(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 20 \cdot \log K$$

$$G(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 20 \cdot \log K - 20 \cdot \log \omega^2$$

- Si $\xi < \sqrt{2}/2$ (*faiblement amorti*), alors la dérivée du dénominateur de G s'annule pour $\omega_m = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}$. Il y a donc un maximum en ω_m et :

$$G(\omega_m) = 20 \cdot \log \frac{K}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

On appelle coefficient de surtension $Q = \frac{|H(j\omega)|}{|H(0)|}$ ou encore $Q_{dB} = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|) - 20 \cdot \log(|H(0)|)$.

- Si $\xi > \sqrt{2}/2$ (*fortement amorti*), il n'y a pas de sommet. Lorsque les deux pôles sont réels, la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j.T_1.\omega).(1 + j.T_2.\omega)} \quad \text{avec par exemple } T_2 < T_1 \quad (\omega_2 > \omega_1)$$

La fonction de transfert est la multiplication de deux premiers ordres d'où :

$$G(dB) = 20 \cdot \log K - \underbrace{20 \cdot \log(|1 + j.T_1.\omega|)}_{\text{Première pente à -20dB/dec}} - \underbrace{20 \cdot \log(|1 + j.T_2.\omega|)}_{\text{Seconde pente à -20dB/dec}}$$

– Phase :

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = -\arg[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\xi\omega_0\omega]$$

$$\varphi(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

$$\varphi(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} -\pi$$

Remarques pour l'identification :

à partir d'un lieu de transfert expérimental correspondant à l'allure d'un système du deuxième ordre, on peut procéder à une identification en utilisant :

- les basses fréquences pour trouver le gain du système,
- la phase à 90° pour ω_0

4.2.4 Diagramme de Bode asymptotique

Le tracé d'un diagramme de Bode nécessite de calculer un certain nombre de points. Il est souvent suffisant pour analyser la réponse du système de tracer le diagramme de Bode asymptotique. Il est facile de tracer la réponse asymptotique d'un système d'ordre n après décomposition en produits de systèmes du premier et second ordre, appelés fonctions élémentaires :

$$H(p) = K \cdot \frac{\prod(1 + \tau_i.p) \cdot \prod(1 + 2\xi_j.p/\omega_{0j} + p^2/\omega_{0j}^2)}{\prod(1 + \tau_k.p) \cdot \prod(1 + 2\xi_l.p/\omega_{0l} + p^2/\omega_{0l}^2)}$$

Les réponses pour chaque fonction élémentaire sont données sur la Figure 29. La réponse harmonique de la fonction de transfert $H(p)$ est la multiplication des réponses élémentaires ce qui se traduit par une somme dans le diagramme de Bode (la fonction logarithme transforme le produit en somme).

$$\underline{\text{Ex}} : (\text{voir Figure 30}) \quad H(p) = \frac{5.(1 + 5.p)}{p.(1 + p + p^2)} = 5 \times \frac{1}{p} \times (1 + 5.p) \times \frac{1}{(1 + p + p^2)}$$

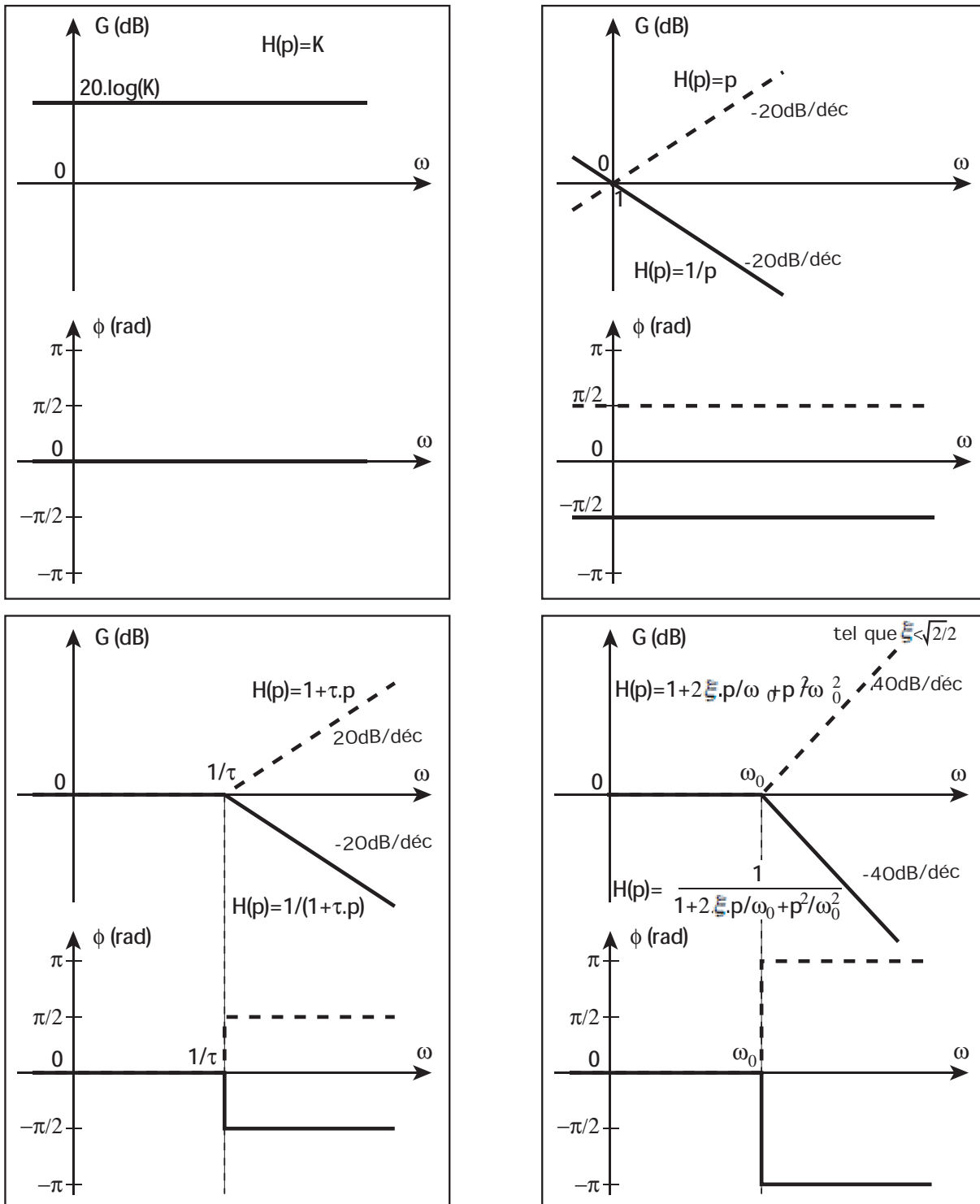


FIGURE 29 – Diagrammes de Bode asymptotiques des fonctions élémentaires.

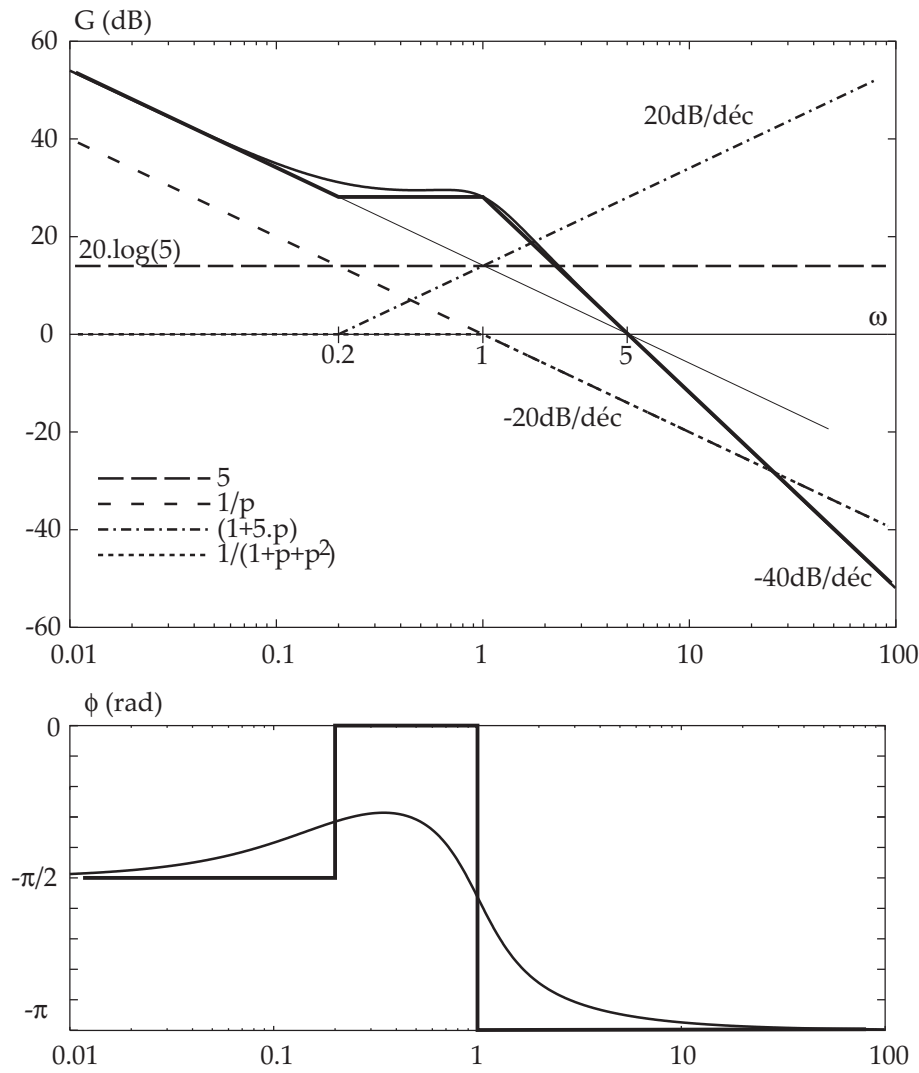


FIGURE 30 – Diagramme de Bode asymptotique de la fonction exemple.

4.2.5 Bande passante

On appelle "bande passante à x dB" la plage de pulsations ou de fréquences pour laquelle le signal de sortie subit un affaiblissement inférieur à x dB par rapport à sa valeur pour $\omega = 0$.

On appelle aussi "bande passante" la plage de pulsations ou de fréquences pour laquelle le signal de sortie subit un affaiblissement égal à sa valeur à $\omega = 0$. Cela fait donc intervenir la pulsation de coupure à 0 dB.

A Transformées de Laplace

Les transformées de Laplace représentent pour les Sciences de l'Ingénieur un outil mathématique largement utilisé pour l'étude des systèmes linéaires continus et invariants. Leur utilisation permet :

- de manipuler aisément les équations différentielles de comportement des systèmes,
- de résoudre facilement les équations différentielles dans les cas simples,
- dans les cas complexes, d'obtenir les éléments principaux d'étude des systèmes sans calculer la réponse temporelle.

A.1 Définition et propriétés

Définition

Soit f une fonction de la variable réelle t (temps), définie pour tout $t > 0$ et nulle pour $t < 0$.

Sous réserve d'existence, on note $F(p)$ la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f(t))$ de la fonction f :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

où p est une variable complexe.

L'existence dépend de la convergence de l'intégrale impropre. Dans les cas rencontrés en SI, les conditions d'existence seront toujours réunies.

La transformée inverse sera notée $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$.

Dans les pays anglo-saxons, la variable complexe de Laplace est notée s . Cette notation pourra être rencontrée dans certains ouvrages.

Nous allons maintenant donner quelques propriétés des transformées de Laplace.

Unicité

La transformée $F(p)$ d'une fonction quelconque $f(t)$ est unique. De même, la transformée inverse $f(t)$ de $F(p)$ est unique. L'application \mathcal{L} est dite *bi-univoque*.

Démonstration : Soient $F_1(p)$ et $F_2(p)$ deux transformées de Laplace d'une même fonction $f(t)$, alors :

$$F_2(p) - F_1(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt - \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} 0 \cdot dt = 0 \implies F_2(p) = F_1(p)$$

Linéarité

La transformée de Laplace est linéaire :

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] \quad , \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

De même, \mathcal{L}^{-1} est aussi linéaire.

Démonstration :

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \int_0^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)]e^{-pt} dt = \alpha \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t)e^{-pt} dt = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]$$

Dérivation

La transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction $f(t)$ conduit à :

$$\mathcal{L} \left[\frac{df}{dt}(t) \right] = p \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f(0) = pF(p) - f(0)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{df}{dt}(t) \right] &= \int_0^{+\infty} \frac{df}{dt}(t) e^{-pt} dt = [f(t) e^{-pt}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f(t) p e^{-pt} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-pt} - f(0) + p \mathcal{L}[f(t)] = p \mathcal{L}[f(t)] - f(0) \end{aligned}$$

La limite étant nulle d'après les conditions de convergence de l'intégrale impropre.

Intégration

Soit $\int_0^t f(\tau) d\tau$ la primitive de $f(t)$, alors :

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{F(p)}{p}$$

L'intégration se transforme, au passage dans le domaine de Laplace en division par p . Cette propriété n'est valable que pour une intégration de 0 à t .

Démonstration :

Soit $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, appliquons la relation obtenue pour la dérivation à $g(t)$:

$$\mathcal{L} \left[\frac{dg}{dt}(t) \right] = p \mathcal{L}[g(t)] - g(0) \quad \text{et } g(0) = 0$$

$$\iff \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(t)]$$

Théorème de la valeur initiale

La valeur initiale en temps $f(0)$ peut se calculer à l'aide de la transformée de Laplace :

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

Remarque : Ce théorème n'est valable dans le cas d'un rapport $\frac{N(p)}{D(p)}$ de deux polynômes $N(p)$ et $D(p)$ de degrés n et d , que si $d > n$, ce qui est toujours le cas pour un système causal.

Théorème de la valeur finale

La limite à convergence en temps $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ peut se calculer à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

Remarque : ce théorème n'est valable que si les pôles de $pF(p)$ sont à partie réelle négative. Sinon, $f(t)$ ne présente pas de limite finie.

Théorème du retard

Soit $g(t)$ la fonction retardée d'une fonction $f(t)$, d'un temps τ : $g(t) = f(t - \tau)$.

Alors :

$$\mathcal{L}[g(t)] = G(p) = e^{-\tau p} F(p)$$

Le retard est ici une translation temporelle, vers les temps positifs.

Démonstration :

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt$$

En posant le changement de variable : $u = t - \tau$

$$G(p) = \int_{-\tau}^{\infty} f(u) e^{-p(u+\tau)} dt = \int_0^{\infty} f(u) e^{-pu} dt \times e^{-p\tau} = F(p) e^{-p\tau}$$

Translation dans le plan complexe

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$, alors la transformée inverse de $F(p)$ translatée de p_0 s'écrit :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p - p_0)] = e^{p_0 t} f(t)$$

A.2 Distribution de Dirac

L'espace des distributions est une extension de l'espace des fonctions permettant de tenir compte des discontinuités des fonctions continues par morceaux.

Distribution de Dirac

La distribution de Dirac $\delta(t)$ est une distribution nulle sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et dont la valeur en 0 est infinie de telle sorte que :

$$\forall f(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

La distribution de Dirac est un modèle mathématique permettant de représenter les phénomènes physiques de temps très courts devant l'échelle de temps de l'étude et à énergie finie, tels que des impacts, chocs, impulsions électrique, etc...

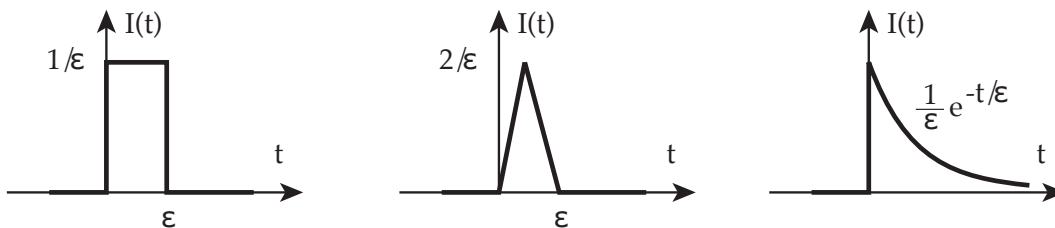


FIGURE 31 – Quelques forme classique de fonctions impulsion.

La distribution de Dirac peut être vue comme la limite de fonctions paramétrées par ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ces fonctions sont appelées "impulsions" (Figure 31). On vérifie que pour les fonctions impulsions $I(t)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(t) dt = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(t \neq 0) = 0$$

Transformée de Laplace d'une distribution de Dirac

Par définition, la transformée de Laplace de $\delta(t)$ vaut 1.

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Pour un Dirac translaté de τ , la transformée de Laplace s'écrit :

$$\mathcal{L}[\delta(t - \tau)] = e^{-p\tau}$$

Primitive d'une distribution de Dirac

La primitive de $\delta(t)$ est la fonction échelon $U(t)$ (Figure 32) :

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \int_0^t \delta(\tau) d\tau = U(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t > 0 \\ U(0) \text{ non défini} \end{cases}$$

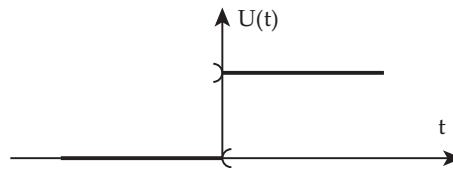


FIGURE 32 – Fonction échelon.

Cette fonction permet de tenir compte des discontinuités des fonctions continues par morceaux.

A.3 Transformées de Laplace usuelles

Le tableau 1 donne les transformées usuelles utilisées pour l'étude des systèmes linéaires continus invariants. Ce tableau permettra de réaliser les transformées et transformées inverses sans les calculer.

Les calculs pour les systèmes linéaires continus invariants conduisent généralement à des transformées de Laplace sous la forme de quotient de polynômes $N(p)$ et $D(p)$:

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

On appelle *zéros* de $F(p)$ les valeurs de p pour lesquelles le numérateur $N(p)$ s'annule.

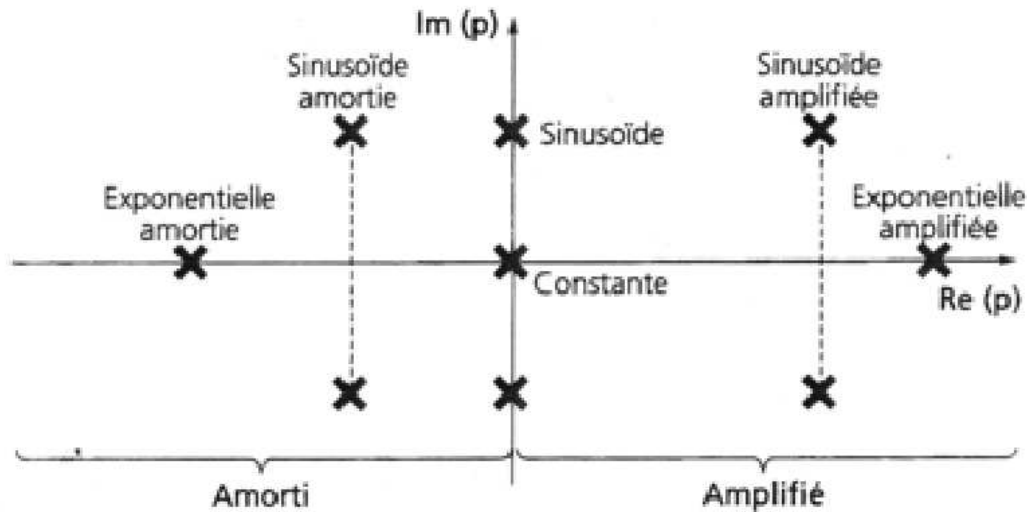
On appelle *pôles* de $F(p)$ les valeurs de p pour lesquelles le dénominateur $D(p)$ s'annule.

Les pôles de $F(p)$ caractérisent la forme de la fonction temporelle. La Figure 33 illustre le plan complexe et la forme attendue de la fonction temporelle selon le point considéré.

A.4 Application aux systèmes linéaires, continus et invariants

Les systèmes monovariabiles linéaires continus et invariants sont caractérisés par une équation différentielle entre les fonctions d'entrée et de sortie :

$$a_0.s(t) + a_1.\frac{ds}{dt}(t) + \dots + a_d.\frac{d^d s}{dt^d}(t) = b_0.e(t) + b_1.\frac{de}{dt}(t) + \dots + b_n.\frac{d^n e}{dt^n}(t)$$


 FIGURE 33 – Lieu des poles de $F(p)$.

Dans le cas où les *conditions initiales sont nulles* pour e et s , la transformée de Laplace de l'équation différentielle conduit à une équation beaucoup plus simple à manipuler :

$$a_0.S(p) + a_1.p.S(p) + \dots + a_d.p^d.S(p) = b_0.E(p) + b_1.p.E(p) + \dots + b_n.p^n.E(p)$$

On définit alors la fonction de transfert (ou transmittance) :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_n.p^n}{\sum_{j=0}^d b_d.p^d}$$

Les pôles de la fonction de transfert permettent d'analyser le comportement du système, sans calculer la réponse temporelle.

La résolution de l'équation différentielle se fait en déterminant la transformée inverse de $S(p)$:

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)] = \mathcal{L}^{-1}[H(p).E(p)]$$

La transformée inverse est déterminée à l'aide du tableau de transformées usuelles. Il faut généralement décomposer le quotient obtenu en éléments simples.

A.5 Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples

Une fraction rationnelle $F(x)$ est un quotient de deux polynômes :

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

La fraction rationnelle est sous sa *forme réduite* si $N(x)$ et $D(x)$ n'ont aucune racine commune. On notera n et d les degrés des numérateur et dénominateur de la fraction rationnelle réduite.

Un *élément simple* est soit un monôme $(1, x, x^2, \dots)$, soit une fraction rationnelle de la forme $\frac{a}{x - r}$ où a est un nombre complexe non nul, r un nombre complexe quelconque et m un entier supérieur ou égal à 1.

Toute fraction rationnelle peut s'écrire de façon unique comme une somme d'éléments simples, appelée *décomposition en éléments simples*. Elle est composée d'une *partie entière* et d'une *partie polaire*. La partie entière n'existe que si $n \geq d$ et c'est alors un polynôme de degré $n - d$. Les fractions rationnelles rencontrées en SI n'ont généralement pas de partie entière du fait du principe de causalité.

La partie polaire est constituée, pour chaque pôle r de multiplicité m , d'une somme du type :

$$\frac{a_m}{(x-r)^m} + \frac{a_{m-1}}{(x-r)^{m-1}} + \dots + \frac{a_1}{(x-r)}$$

où les coefficients $a_i, i = 1 \dots m$ sont non nuls.

Pour déterminer de manière simple les coefficients a_i , on commence par poser la forme de la décomposition en plaçant des inconnues, $a_i, i = 1 \dots m$, aux numérateurs. Ces coefficients peuvent être calculés facilement en procédant comme suit (*on commence par calculer les termes correspondants aux pôles de plus grandes multiplicités*) :

- Le calcul des coefficients a_m pour chaque pôle est relativement simple. Il suffit de multiplier l'expression par $(x-r)^m$ et de calculer l'expression pour $x = r$:

$$a_m = \left[(x-r)^m \cdot \frac{N(x)}{D(x)} \right]_{x=r}$$

- Pour les autres coefficients (peu nombreux car les multiplicités sont généralement peu élevées), il faut choisir des valeurs particulières de x pour constituer un système permettant d'identifier les coefficients (souvent on prend $x = 0$ ou $x = 1$). Une autre possibilité est de multiplier l'expression par $(x-r)^{m-i}$ pour chaque i de 1 à m , de calculer l'expression pour $x = r$, et prendre la limite $p \rightarrow +\infty$:

$$a_{m-i} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[(x-r)^{m-i} \cdot \frac{N(x)}{D(x)} \right]_{x=r}$$

Ex : Décomposition de la fraction rationnelle :

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2 \cdot (x+3)} = \frac{\alpha}{(x-1)} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{(x+3)}$$

Les coefficients d'ordres élevés sont immédiats :

$$\gamma = \left[\frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2} \right]_{x=-3} = 5 \quad \beta = \left[\frac{3x^2 + 2x - 1}{(x+3)} \right]_{x=1} = 1$$

Pour le coefficient α , on prend la valeur particulière $x = -1$:

$$N(-1) = 0 = \alpha \cdot (-1-1) \cdot (-1+3) + \beta \cdot (-1+3) + \gamma \cdot (-1-1)^2 \implies \alpha = 11/2$$




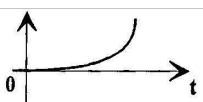
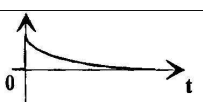
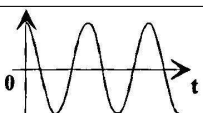
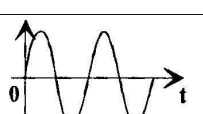
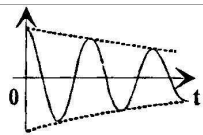
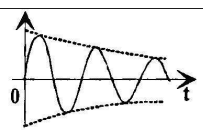
Nom	Allure	$f(t)$	$F(p)$	Pôles de $F(p)$
Dirac		$\delta(t)$	1	aucun
Échelon		$U(t)$	$1/p$	0
Rampe		$t.U(t)$	$1/p^2$	0 (double)
Fonction puissance		$t^n U(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	0 (d'ordre $n + 1$)
Exponentielle		$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$-a$
		$t.e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$-a$ (double)
Cosinus		$\cos(\omega t)U(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j.\omega$
Sinus		$\sin(\omega t)U(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j.\omega$
Cosinus amorti		$e^{-at} \cos(\omega t)U(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j.\omega$
Sinus amorti		$e^{-at} \sin(\omega t)U(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j.\omega$

TABLE 1 – Tableau des transformées de Laplace usuelles