

**Centre Universitaire de Béchar**  
**Institut de:** des Sciences Exactes

2<sup>ème</sup> Année L.M.D MIAS  
**Module :** Pr Lin

## Examen final

### Exercice 1:

En utilisant la méthode **graphique**, trouver le **maximum** la fonction objective suivant :

$$Z = -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 3x_4$$

Sous les contraintes suivantes :

$$\text{s.c.} \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \leq 1 \end{cases}$$

Et les conditions de non négativité suivantes :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

### Exercice 2:

En utilisant la méthode de **SIMPLEXE**, trouver la **solution** du programme linéaire suivant par l'intermédiaire de son **dual**:

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

### Question:

Donner le critère d'optimalité pour la résolution d'un programme linéaire par SIMPLEXE.

**Bonne chance**

## Solution d'examen final

### Exercice 2:

#### Le Primal

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ -3x_1 - x_2 \geq -3 \\ 4x_1 + x_2 \geq 6 \\ -x_1 - 2x_2 \geq -3 \end{cases} \quad (2P^{ts})$$

#### Le Dual

$$\text{Max } W = 3y_1 - 3y_2 + 6y_3 - 3y_4$$

$$\Rightarrow \text{s.c.} \begin{cases} 3y_1 - 3y_2 + 4y_3 - y_4 \leq 4 \\ y_1 - y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Max } W = 3y_1 - 3y_2 + 6y_3 - 3y_4$$

$$\Rightarrow \text{s.c.} \begin{cases} 3y_1 - 3y_2 + 4y_3 - y_4 + y_5 = 4 \\ y_1 - y_2 + y_3 - 2y_4 + y_6 = 1 \end{cases} \quad (2P^{ts})$$

$C_J$			3	-3	6	-3	0	0	
V.B	C.V.B	B	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$\theta$
$y_5$	0	4	3	-3	4	-1	1	0	1
$y_6$	0	1	1	-1	1	-2	0	1	1
$Z_J$			0	0	0	0	0	0	
$C_J - Z_J$			3	-3	6	-3	0	0	

(1.5P<sup>ts</sup>)

Max(3,6)=6, alors la variable  $y_3$  entre dans la base et  $y_6$  Sort de la base, le pivot donc est 1

$C_J$			3	-3	6	-3	0	0	
V.B	C.V.B	B	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$\theta$
$y_5$	0	0	-1	1	0	7	1	-4	0
$y_3$	6	1	1	-1	1	-2	0	1	-1/2
$Z_J$			6	-6	6	-12	0	6	
$C_J - Z_J$			-3	3	0	9	0	-6	

(1.5P<sup>ts</sup>)

Max( $C_J - Z_J$ )=9, alors la variable  $y_4$  entre dans la base, mais aucune variable ne peut sortir d'où le dual a une infinité de solution ce qui signifie que **le primal n'a pas de solutions.**

(1P<sup>ts</sup>)

**Deuxième manière****Le Primal**

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 4x_1 + x_2$$

$$\Rightarrow \text{s.c.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{s.c.} \begin{cases} -3x_1 - x_2 \leq -3 \\ 3x_1 + x_2 \leq 3 \\ -4x_1 - x_2 \leq -6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases} \quad (2P^{ts})$$

**Le Dual**

$$\text{Max } W = -3y_1 + 3y_2 - 6y_3 + 3y_4$$

$$\Rightarrow \text{s.c.} \begin{cases} -3y_1 + 3y_2 - 4y_3 + y_4 \geq 4 \\ -y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Max } W = -3y_1 + 3y_2 - 6y_3 + 3y_4$$

$$\Rightarrow \text{s.c.} \begin{cases} -3y_1 + 3y_2 - 4y_3 + y_4 - y_5 + y_7 = 4 \\ -y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 - y_6 + y_8 = 1 \end{cases} \quad (2P^{ts})$$

C <sub>J</sub>			-3	<b>3</b>	-6	3	0	0	-M	-M	θ
V.B	C.V.B	B	Y <sub>1</sub>	<b>Y<sub>2</sub></b>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>	Y <sub>5</sub>	Y <sub>6</sub>	Y <sub>7</sub>	Y <sub>8</sub>	
Y <sub>7</sub>	-M	4	-3	<b>3</b>	-4	1	-1	0	1	0	4/3
<b>Y<sub>8</sub></b>	<b>-M</b>	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>1</b>	<b>-1</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
Z <sub>J</sub>			4M	<b>-4M</b>	5M	-3M	M	M	-M	-M	
C <sub>J</sub> -Z <sub>J</sub>			-3-4M	<b>3+4M</b>	-6-5M	3+3M	-M	-M	0	0	

Max(3+4M, 3+3M)=3+4M, alors la variable y<sub>2</sub> entre dans la base et y<sub>8</sub> Sort de la base, le pivot donc est 1

C <sub>J</sub>			-3	3	-6	3	0	<b>0</b>	-M	-M	θ
V.B	C.V.B	B	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>	Y <sub>5</sub>	<b>Y<sub>6</sub></b>	Y <sub>7</sub>	Y <sub>8</sub>	
<b>Y<sub>7</sub></b>	<b>-M</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>-1</b>	<b>-5</b>	<b>-1</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>-3</b>	<b>1/3</b>
Y <sub>2</sub>	3	1	-1	1	-1	2	0	<b>-1</b>	0	1	-1
Z <sub>J</sub>			-3	3	M-3	5M+6	M	<b>-3M-3</b>	-M	3M+3	
C <sub>J</sub> -Z <sub>J</sub>			0	0	-3+M	-3-5M	-M	<b>3+3M</b>	0	-3-2M	

Max(C<sub>J</sub>-Z<sub>J</sub>)>0=3+3M, alors la variable y<sub>6</sub> entre dans la base, et y<sub>7</sub> sort de la base, le pivot=3.

C <sub>J</sub>			-3	3	-6	3	0	0	-M	<b>-M</b>	θ
V.B	C.V.B	B	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>	Y <sub>5</sub>	Y <sub>6</sub>	Y <sub>7</sub>	<b>Y<sub>8</sub></b>	
Y <sub>6</sub>	0	1/3	0	0	-1/3	-5/3	-1/3	1	1/3	<b>-1</b>	-1/3
Y <sub>2</sub>	3	4/3	-1	1	-4/3	1/3	-1/3	0	1/3	<b>0</b>	∞
Z <sub>J</sub>			-3	3	-4	1	-1	0	1	<b>0</b>	
C <sub>J</sub> -Z <sub>J</sub>			0	0	-2	2	1	0	0	<b>M</b>	

Max(C<sub>J</sub>-Z<sub>J</sub>)>0=M, alors la variable y<sub>8</sub> entre dans la base, mais aucune variable ne peut sortir d'où le dual a une infinité de solution ce qui signifie que **le primal n'a pas de solutions**. (1P<sup>ts</sup>)