Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Béchar

Programmation lineaire

Par :Amieur Belkacem

Les matrices

Définition:

- Une matrice est un outil de calcul construit à l'aide d'un certain nombre de valeurs réelles rangées en lignes et colonnes. La dimension d'une matrice est donnée par le nombre de lignes et le nombre de colonnes.

  Une matrice est dite carrée si elle a autant de lignes que de colonnes.

Matrice identité ou matrice unitaire:

- Une matrice identité est une matrice carrée, généralement notée **I**, ayant les éléments de la diagonale principale égaux à 1 et les autres éléments nulles.

$$\mathbf{I} = [a_{ij}]$$
$$\text{avec } a_{ii} = 1 \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Transposée d'une matrice:

- La transposée de la matrice **A**, que l'on note $\mathbf{A}^T$, est obtenue par permutation des lignes et des colonnes. La matrice obtenue a donc une taille inverse à celle d'origine.

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}]$$
$$\text{avec } \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

- **Propriétés:**
  - $(a.\mathbf{A}^T) = a.\mathbf{A}^T$
  - $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
  - $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
  - $(\mathbf{A}.\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T.\mathbf{A}^T$

Matrice triangulaire:

Une matrice **A** est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tous $j < i$

Une matrice **A** est triangulaire Inferieure si $a_{ij} = 0$ pour tous $i < j$

Addition de matrices:

- On peut additionner deux matrices **A** et **B**, si elles possèdent la même taille, en additionnant simplement deux à deux leurs valeurs. Le résultat est une matrice de la même taille que les deux matrices.

C=A + B

$[C_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}]$

- **Propriétés:**
  - associativité: (**A**+**B**)+**C** = **A**+(**B**+**C**)
  - commutativité: **A**+**B** = **B**+**A**

Multiplication d'un scalaire avec une matrice:

- On peut multiplier une valeur réelle α avec une matrice A, ce qui forme une matrice de la même taille que A, et qui est calculée avec:

$$A' = \alpha A = [\alpha . a_{ij}]$$

- **Propriétés:**
  - $\alpha(\beta \mathbf{A}) = (\alpha \beta \mathbf{A})$
  - $(\alpha + \beta).\mathbf{A} = \alpha.\mathbf{A} + \beta.\mathbf{A}$
  - a.(**A**+**B**) = $\alpha.\mathbf{A} + \alpha.\mathbf{B}$

Multiplication des matrices:

- On peut multiplier une matrice **A** avec une matrice **B** seulement si le nombre de colonnes de **A** (n,m) égal au nombre de lignes de **B**(m,l). La matrice résultante, notée **C** = **A**.**B** , est une matrice de taille (n,l). le produit s'effectue suivant la loi suivante:

$$C_{ij} = a_{ik} b_{kj} \text{ avec } \begin{cases} i = 1, n \\ j = 1, l \end{cases}$$

- **Propriétés:**
  - (**A**.**B**).**C** = **A**.(**B**.**C**)
  - (**A**+**B**).**C** = **A**.**C** + **B**.**C**
  - en général, **A**.**B** $\neq$ **B**.**A**

Multiplication d'une matrice par un vecteur:

- La multiplication d'une matrice par un vecteur s'effectue comme la multiplication d'une matrice (n,m) avec une matrice de taille (m,1). Il en résulte un vecteur de dimension n.

C= **A**.B

$$c_i = a_{ij} b_j \text{ avec } \begin{cases} i = 1, n \\ j = 1, m \end{cases}$$

Déterminant d'une matrice:

- Le déterminant d'une matrice n'est défini que pour les matrices carrées. On note $|\mathbf{A}|$ ou det($\mathbf{A}$) le déterminant de la matrice

A. Déterminant d'une matrice (2,2):

$$|\mathbf{A}| = |[a_{ij}]| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

- **Déterminant d'une matrice (3,3):**

$$|\mathbf{A}| = |[a_{ij}]| = a_{11}(a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) - a_{12}(a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}) + a_{13}(a_{32}\, a_{21} - a_{22}\, a_{31})$$

- **Propriétés pour une matrice de taille (n,n):**
  - $|\mathbf{A}^{-1}| = 1 / |\mathbf{A}|$
  - $|\mathbf{A}.\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \,.\, |\mathbf{B}|$
  - $|\alpha.\mathbf{A}| = \alpha^n.|\mathbf{A}|$
  - $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$

Sous déterminant ou cofacteur d'une matrice:

- Le sous déterminant (aussi appelé cofacteur) d'une matrice carrée **A**, que l'on note Cof(**A**) , est le déterminant de la matrice **A** ôtée de sa ligne i et de sa colonne j.

Matrice adjointe:

- La matrice adjointe de la matrice carrée **A** est notée **A*** ou adj(**A**) et est définie en utilisant les sous déterminants de **A** à l'aide de l'équation:

$$\mathbf{B} = \mathrm{adj}(\mathbf{A}) \qquad \text{avec } b_{ij} = (-1)^{(i+j)} \,.\, M_{ji}$$

Inverse d'une matrice:

- La matrice inverse de la matrice **A** est notée $\mathbf{A}^{-1}$, dont le produit des deux matrices vérifie $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Il n'existe de matrice inverse que pour les matrices carrées de déterminant non nul. On calcule $\mathbf{A}^{-1}$ par:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{adj}(\mathbf{A}) \,.\, 1/|\mathbf{A}|$$

- **Propriétés:**
  - $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$
  - $(\mathbf{A}.\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}.\mathbf{A}^{-1}$

Méthode de Gauss-Jordan pour la résolution des S.E:

La méthode de Gauss transforme un système linéaire en un système triangulaire équivalent en utilisant un ensemble de transformations.

L'idée est de résoudre la première équation en x_1, puis d'éliminer x_1 des équations suivantes, ensuite de résoudre la seconde équation en x_2, puis d'éliminer x_2 des équations suivantes, et ainsi de suite jusqu'à avoir un système triangulaire.

Un tel système linéaire peut être donné sous la forme suivante:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

Triangularisation du système:

Pour triangula riser le système on aura besoin à $n - 1$ transformations qu'on appelle itérations ou cycles. Considérons que le système initialement donné par les équations (I) s'écrit, après la 1ère étape, sous la forme:

$$\begin{cases} a^1_{11}x_1 + a^1_{12}x_2 + a^1_{13}x_3 + a^1_{14}x_4 + \ldots\ldots + a^1_{1n}x_n = b^1_1 \\ 0x_1 \quad + a^1_{22}x_2 + a^1_{23}x_3 + a^1_{24}x_4 + \ldots\ldots + a^1_{2n}x_n = b^1_2 \\ 0x_1 \quad + a^1_{32}x_2 + a^1_{33}x_3 + a^1_{34}x_4 + \ldots\ldots + a^1_{3n}x_n = b^1_3 \\ . \\ . \\ 0x_1 \quad + a^1_{n2}x_2 + a^1_{n3}x_3 + a^1_{n4}x_4 + \ldots\ldots + a^1_{nn}x_n = b^1_n \end{cases}$$

et après la 2ème étape, sous la forme:

$$\begin{cases} a^2_{11}x_1 \quad + 0x_2 \quad + a^2_{13}x_3 + a^2_{14}x_4 + \ldots\ldots + a^2_{1n}x_n = b^2_1 \\ 0x_1 \quad + a^2_{22}x_2 \quad + a^2_{23}x_3 + a^2_{24}x_4 + \ldots\ldots + a^2_{2n}x_n = b^2_2 \\ 0x_1 \quad + 0x_2 \quad + a^2_{33}x_3 + a^2_{34}x_4 + \ldots\ldots + a^2_{3n}x_n = b^2_3 \\ 0x_1 \quad + 0x_2 \quad + a^2_{43}x_3 + a^2_{44}x_4 + \ldots\ldots + a^2_{4n}x_n = b^2_4 \\ . \\ 0x_1 \quad + 0x_2 \quad + a^2_{n3}x_3 + a^2_{n4}x_4 + \ldots\ldots + a^2_{nn}x_n = b^2_n \end{cases}$$

et après la 3ème étape, sous la forme:

$$\begin{cases} a_{11}^3x_1 + a_{12}^3x_2 + 0x_3 + a_{14}^3x_4 + \ldots\ldots + a_{1n}^3x_n = b_1^3 \\ 0x_1 + a_{22}^3x_2 + 0x_3 + a_{24}^3x_4 + \ldots\ldots + a_{2n}^3x_n = b_2^3 \\ 0x_1 + 0x_2 + a_{33}^3x_3 + a_{34}^3x_4 + \ldots\ldots + a_{3n}^3x_n = b_3^3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + a_{44}^3x_4 + \ldots\ldots + a_{4n}^3x_n = b_4^3 \\ . \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + a_{n4}^3x_4 + \ldots\ldots + a_{nn}^3x_n = b_n^3 \end{cases}$$

Ces transformations s'effectuent en divisant, pour chaque itération k, la ligne k par l'élément a_{kk} c'est-à-dire:

On peut donc éliminer le coefficient de x_k de la ligne i $(k + 1 \le i \le n - 1)$ en ajoutant cette ligne à $-\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ si l'élément $a_{kk} \neq 0$

Cette méthode peut se résumer comme suit:

$$\left[\begin{array}{l} \left.\left.\begin{array}{l} \left.a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - \dfrac{a_{ik}^{k-1}a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}\right\} j = 1, n \\ b_i^k = b_i^{k-1} - \dfrac{a_{ik}^{k-1}b_k^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} \end{array}\right\} 1 \le i \le n(i \neq k)\right\} k = 1, n - 1 \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ \left.x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}\right\} i = n - 1,1 \end{array}\right.$$

But et Objectif:

Par définition, un programme linéaire est un ensemble de contraintes sous forme d'équations et/ou inéquations qui forment un système à résoudre afin d'optimiser une fonction, c'est-à-dire de minimiser ou de maximiser une fonction qui est dite fonction objective ou aussi fonction économique.

Une contrainte fonctionnelle est une équation ou une inéquation donnée en fonction d'un ensemble de variables dites variable de décision, cette contrainte peut être représentée par:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots a_{in}x_n \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i$$

Où les coefficients $a_{1n},\dots, a_{mn}$ et $b_1,\dots, b_m$ doivent avoir une valeur bien déterminée. Et peuvent être positifs, négatifs ou même nuls. Le paramètre b_j représente la quantité limite de matière première disponible dont le bien x_i utilise une quantité égale à $a_{ij}\, x_i$.

Le système formé de l'ensemble des contraintes et de la fonction objective est appelé forme **canonique** du programme linéaire.

Les contraintes de types $\leq$ par exemple forment le système suivant:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots\dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \dots\dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \dots\dots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{m4}x_4 + \dots\dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

La fonction objective ou économique est donnée dans le cas général par:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots c_nx_n = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i$$

Où les variables x_i sont les variables de décision dites aussi variables d'activité et les coefficients c_i sont dits coefficients de poids qui sont bien déterminés.

☞**Remarque:** On parle d'un programme linéaire lorsque tous les termes de chaque contrainte et aussi de la fonction objective sont de dégrée 1.

$$a_{i1}x_1^1 + a_{i2}x_2^1 + a_{i3}x_3^1 + \dots a_{in}x_n^1 \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i \quad \text{et} \quad Z = c_1x_1^1 + c_2x_2^1 + c_3x_3^1 + \dots c_nx_n^1 = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i^1$$

Modélisation

La modélisation est l'étape la plus importante et la plus difficile dans le domaine de la recherché opérationnelle.

Elle consiste à formuler le programme linéaire en passant d'un problème concret (industriel, logistique, économique, etc.) à un modèle mathématique écrit sous forme d'une fonction objective et un ensemble d'équations et/ou inéquations.

La modélisation nécessite une très grande expérience et une bonne compréhension du problème donné.

Etapes de formulation d'un PL :

Trois étapes généralement sont suivies pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

1. Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (x_1, x_2,……).

2. Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations et/ou inéquations linéaires.
3. Identifier la fonction objective ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

Mais pour formuler un programme linéaire il faut que le décideur tient en compte certaines hypothèses ou conditions qu'il doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème.

1. Les variables de décision du problème sont positives (hypothèse de non négativité des variables de décision).

2. La fonction objective et les contraintes ne peuvent pas contenir un produit croisé de deux de ces variables (linéarité du problème).

3. Les restrictions relatives aux variables de décision peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires ou d'inéquations. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.

4. Les paramètres du problème en dehors des variables de décisions ont une valeur connue avec certitude

Exemple 1 de modélisation:

Pour fabriquer deux produits P1 et P2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M1, M2 et M3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M1	M2	M3
P1	11 mn	7 mn	6 mn
P2	9 mn	12 mn	16 mn

La disponibilité de temps pour chaque machine est :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M1 ;
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M2 ;
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M3

.

Le produit P1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit P2 un profit unitaire de 1000 dinars.

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P1 et P2 pour avoir un profit total maximum ?

Formulation du PL :

Les variables de décisions sont :

- x_1 : le nombre d'unités du produit P1 à fabriquer
- x_2 : le nombre d'unités du produit P2 à fabriquer

Les contraintes fonctionnelles sont :

- $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$ pour la machine M1
- $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$ pour la machine M2
- $6x_1 + 16x_2 \leq 9600$ pour la machine M3

Les contraintes de non négativité sont:

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

Le profit à maximiser est : $z = 900x_1 + 1000\,x_2$

Le programme linéaire résultant est :

$$\text{Max}\quad Z = 900\,x_1 + 1000\,x_2$$
$$\text{s.c.}\begin{cases} 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\ 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\ 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Exemple 2 de modélisation:

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m^3 d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 100 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m^3 d'eau et donne un bénéfice net de 200 dinars.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Modélisation du problème:

- x_1 : la surface allouée à la culture des tomates
- x_2 : la surface allouée à la culture des piments

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$.

Identification des contraintes: trois contraintes fonctionnelles constituent le programme linéaire: terrain, eau et main d'œuvre.

- Terrain : l'agriculteur se dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \leq 150$
- Eau : la culture d'un hectare de tomates demande 4 m^3 d'eau et celle d'un hectare de piments demande 2m^3 mais l'agriculteur ne dispose que de 440m^3. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \leq 440$.
- Main d'œuvre : Les 480 heures de main d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) ente la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \leq 480$
- Les limitations du bureau du périmètre irrigué : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \leq 90$.

Identification de la fonction objective: La fonction objective consiste à maximiser le profit apporté par la culture de tomates et de piments. Les contributions respectives 100 et 200, des deux variables de décision x1 et x2 sont proportionnelles à leur valeur. La fonction objective est donc $z = 100x_1 + 200x_2$.

Le programme linéaire qui modélise le problème d'agriculture est :

$$\text{Max} \quad Z = 100x_1 + 200x_2$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 150 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 440 \\ x_1 + 4x_2 \le 480 \\ x_1 \le 90 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Exemple 3 de modélisation:

Un boulanger confectionne chaque jour 2 types de gâteaux, un au chocolat et l'autre au banane, un bénéfice de 7.5 pour le gâteau au chocolat et 6.0 pour celui au banane. Le gâteau au chocolat nécessite 4 unités de farine et 2 unités de beure alors que le 2eme type nécessite 6 unités de farine et 1 unité de beure. Cependant seulement 96 unités de farine et 24 unités de beure sont disponibles par jour. Combien faut-il cuisiner de chaque type pour maximiser le bénéfice.

Modélisation du problème :

- x_1 : le nbre de gâteaux au chocolat.
- x_2 : le nbre de gâteaux au banane.

- On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives : $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Identification des contraintes: 2 contraintes fonctionnelles constituent le programme linéaire: farine et beure.

- Farine : $4x_1 + 6x_2 \le 96$
- Beure: $2x_1 + x_2 \le 24$.

Identification de la fonction objective: Le bénéfice du gâteau au chocolat est de 7.5 et celui au banane est de 6 a fonction objective consiste à maximiser le chiffre d'affaire. La fonction objective est donc $z = 7.5x_1 + 6x_2$.

Le programme linéaire qui modélise le problème de la boulangerie est :

$$\text{Max} \quad Z = 7.5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 96 \\ 2x_1 + x_2 \le 24 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Méthode Graphique

Cette méthode est simple à être utilisée mais limitée car elle est utilisable pour les cas d'un programme linéaire à deux variables de discision, difficile à ceux de 3 variables et impossible pour plus.

Lorsque le modèle d'un programme linéaire est obtenu, on doit représenter toutes les contraintes fonctionnelles et les contraintes de non négativité dans un repère dont les axes sont les variables de décision.

Pour représenter une contrainte il fauter tracer tout d'abord la droite tirée de cette contrainte

C'est à dire:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Pour la contrainte } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 \\ \text{ou} \\ \text{Pour la contrainte } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{la droite est } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

Cette droite est représentée dans le repère par les couples $\left(0, \frac{b_1}{a_{12}}\right)$ et $\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0\right)$

Cette droite donne deux demis plans dont un des deux vérifie la contrainte.

A partir de cette méthode, on peut distinguer différents cas:

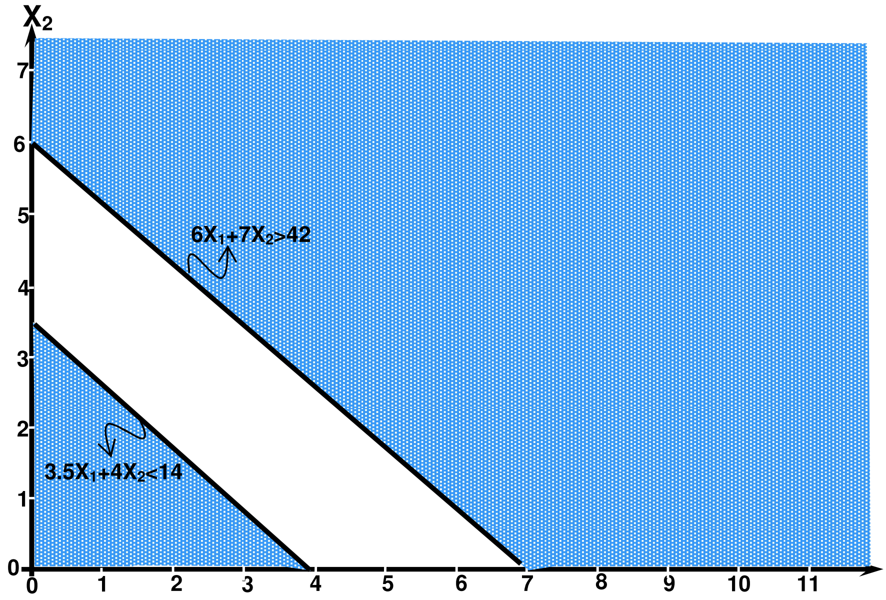
1) Pas de solutions.

2) Infinité de solutions.

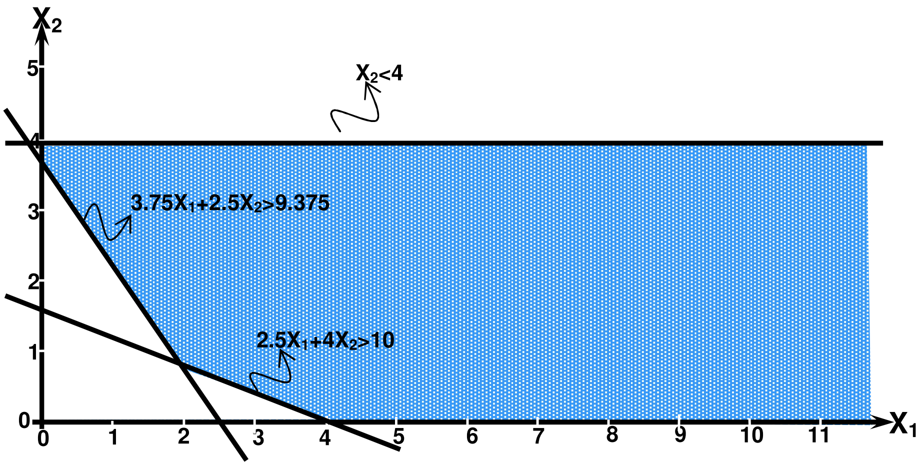
3) Existence de Solution optimale Unique.

4) Multiplicité de Solutions.

Pour le premier cas on peut le trouver s'il n'existe pas de zone qui vérifie l'ensemble des contraintes simultanément (pas de zone de faisabilité), on peut le voir à travers l'exemple suivant:



Un deuxième cas peut être montré dans la figure si dessous (Infinité de solutions)



Pour le cas d'une solution optimale finie, on va le détailler à travers l'exemple suivant:

Exemple d'application:

La fabrication de deux produits est effectuée en trois opérations sur trois machines, successivement. Les temps unitaires d'exécution pour les deux produits sont données par

Le premier produit nécessite 3 min, 1min et 2 min respectivement sur les trios machines au moment où le second nécessite 4min, 3min et 2min respectivement sur les trois machines

Les disponibilités pour chaque machine sont :
- 4200 minutes pour la machine M1.
- 2250 minutes pour la machine M2.
- 2600 minutes pour la machine M3.

Les produits donnent un profit unitaire de 66 dinars et de 84 dinars respectivement.
Avec une limitation de production du premier produit à 1100 unités.

Combien doit-on fabriquer de produits pour avoir un profit total maximum ?

Modélisation :

Les variables de décisions sont :
- x_1 : le nombre d'unités du produit P1 à fabriquer
- x_2 : le nombre d'unités du produit P2 à fabriquer

Les contraintes de non-négativité sont : $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$
Les contraintes fonctionnelles sont :

- $3x_1 + 4x_2 \leq 4200$ pour la machine M1
- $x_1 + 3x_2 \leq 2250$ pour la machine M2
- $2x_1 + 2x_2 \leq 2600$ pour la machine M3
- $x_1 \leq 1100$

Le profit à maximiser est : $z = 66x_1 + 84\, x_2$

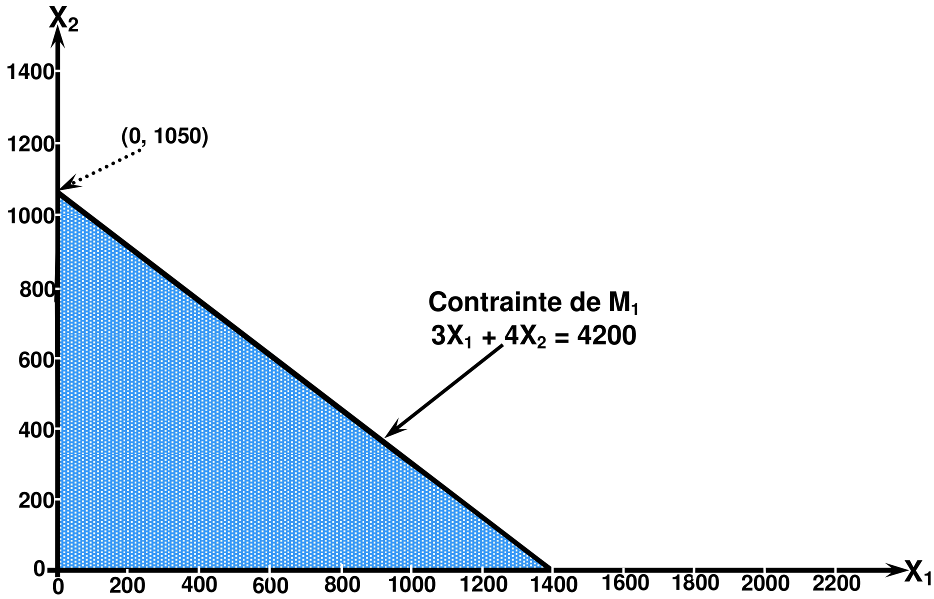
Le programme linéaire résultant est :

$$\text{Max} \quad 66\,x_1 + 84\,x_2$$

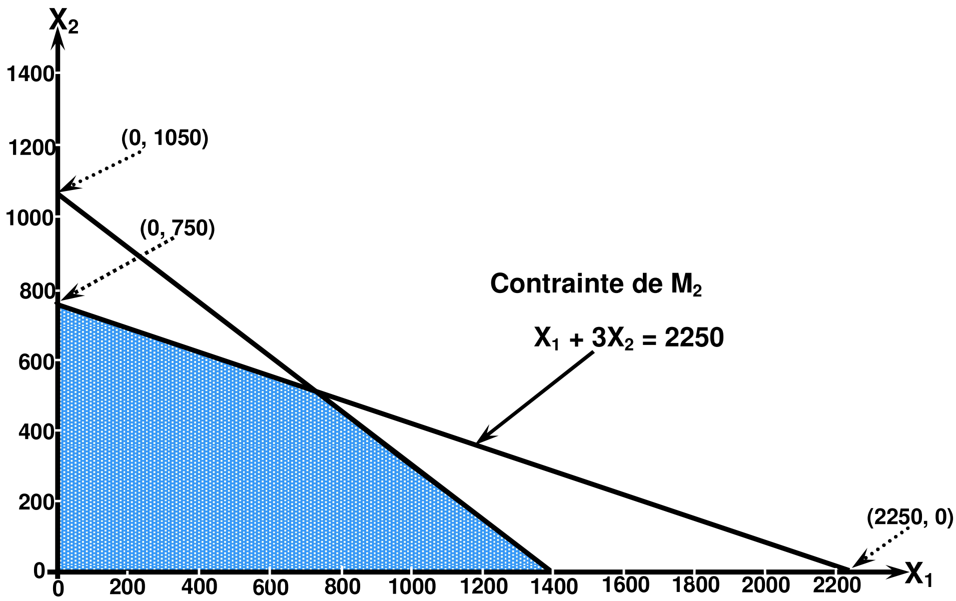
$$\text{S.C} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 4200 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2250 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2600 \\ x_1 \leq 1100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

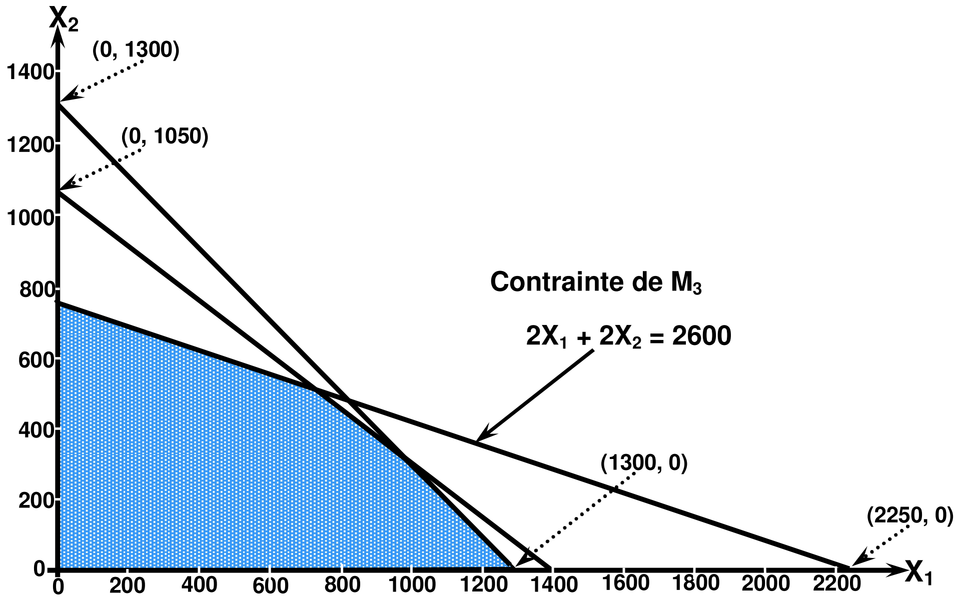
Tracé de la première contrainte



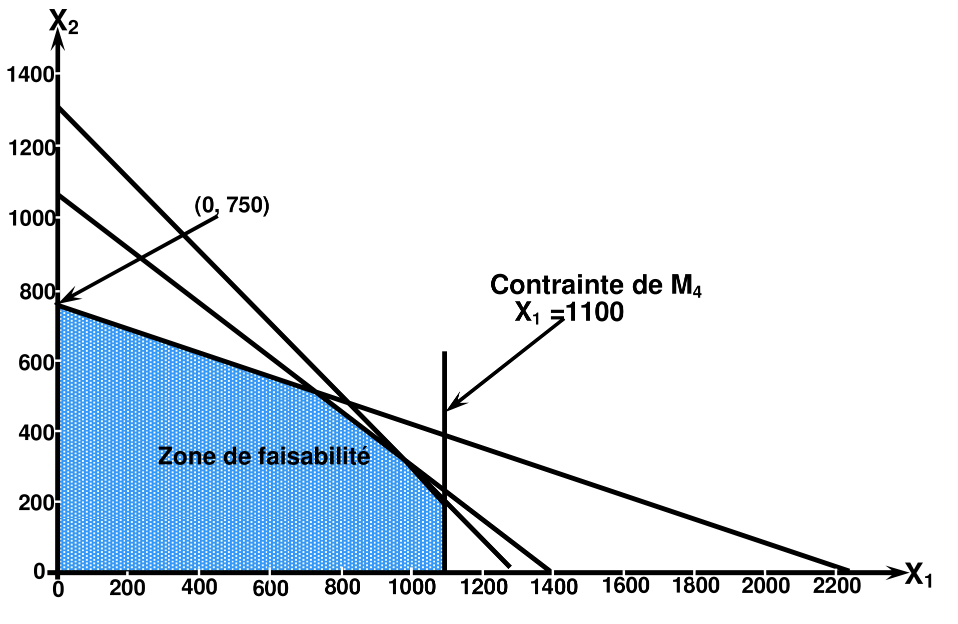
Tracé de la deuxième contrainte



Tracé de la troisième contrainte



Tracé de la quatrième contrainte



La zone limitée par l'ensemble des contraintes est dite ***zone de faisabilité*** dans laquelle toutes les valeurs de chacune des variables de décision vérifient les contraintes mais la question c'est : es ce que ces points sont des solutions optimales?

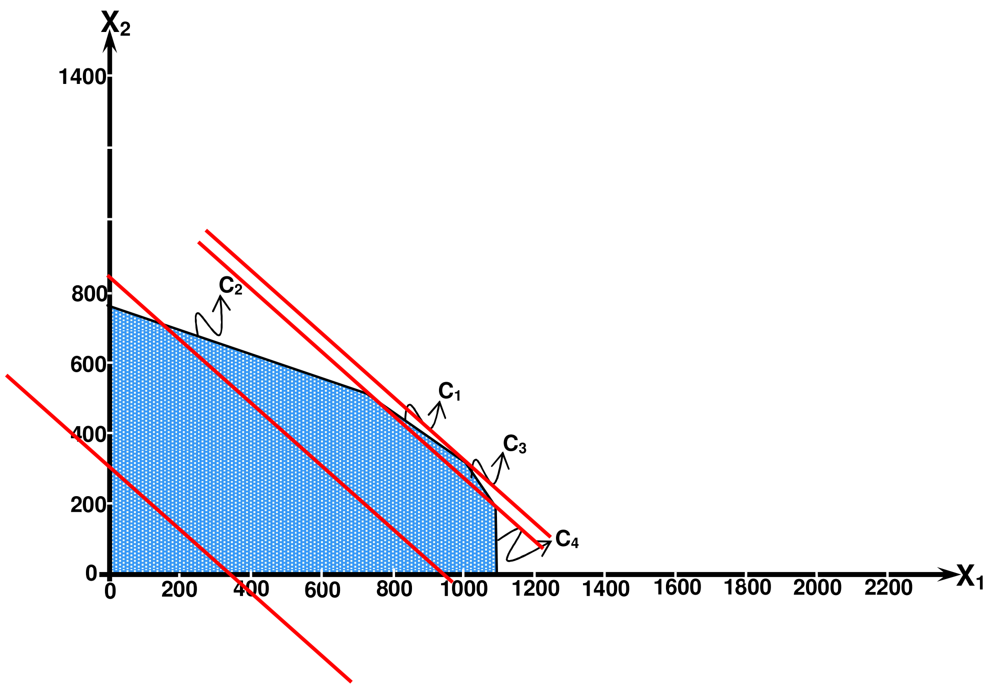
La solution optimale se trouve sur le pourtour de la région des solutions admissibles (zone de faisabilité) et les droites parallèles formées par la translation de la fonction objective qui sont dites "***droites isoquantes***" ou aussi "***droites isocoûts***".

Une droite ***isocoût*** c'est une droite sur laquelle la valeur de la fonction objective ne change pas ou reste constante.

Tracé de la fonction objective

Pour tracer la fonction objective on doit choisir un point sur l'un des deux axes tel que $(x_1,0)$ ou $(0, x_2)$ et on calcule la valeur de la fonction objective en ce point puis on détermine le point $(0, x_2)$ ou $(x_1,0)$ pour lequel la fonction objective garde la même valeur.

Et chaque fois on trace une parallèle a cette droite jusqu'a trouver le point demandé.



Le point demandéé peut être déterminé par substitution des coordonnées des points qui forment la zone de faisabilitéé.

Pour cet exemple

Les points extrêmes sont les suivants:

$(0,0)$; $(0,750)$; $(720,510)$; $(1000,300)$; $(1100,200)$ et $(1100,0)$

X_1	X_2	Z
0	0	0
0	750	63000
720	510	90360
1000	**300**	**91200**
1100	200	89400
1100	0	72600

Alors d'après le tableau le point extrême qui maximise la fonction objective est (1000,300)

Pour un cas de solution multiple:

Reprenons le même exemple sauf le profit unitaire du premier produit devient 64 dinars au lieu de 63 dinars.

Alors la fonction objective à maximiser sera donc: $z = 63x_1 + 84\,x_2$

Et le système se transforme en suivant:

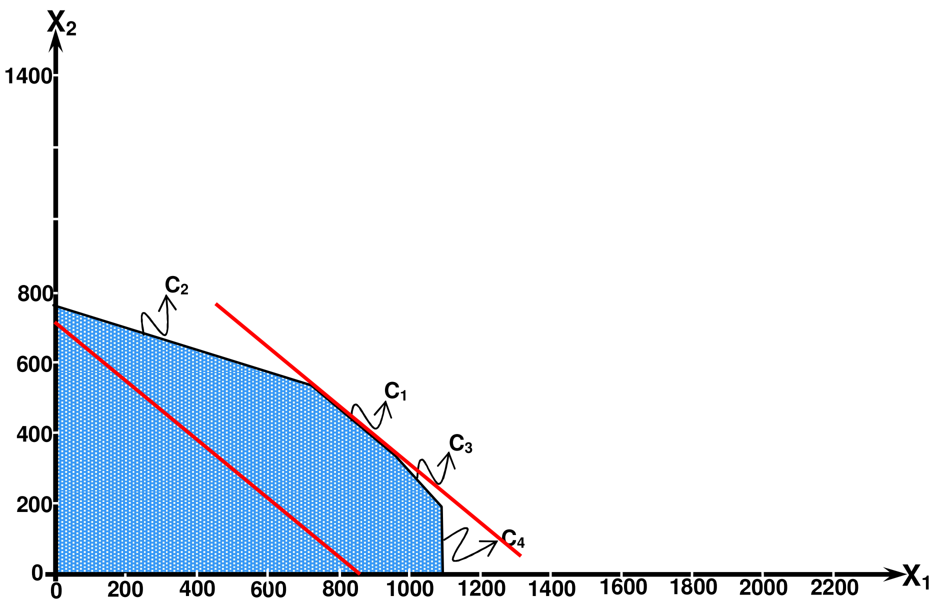
$$\text{Max} \quad 63\,x_1 + 84\,x_2$$

$$\text{S.C} \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 4200 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2250 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2600 \\ x_1 \leq 1100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

Dans ce cas les étapes précédentes restent inchangées sauf la dernière du traçage de la fonction objective.

Tracé de la fonction objective



Les points extrêmes sont toujours les mêmes points précédents:

$(0,0)$; $(0,750)$; $(720,510)$; $(1000,300)$; $(1100,200)$ et $(1100,0)$

X_1	X_2	Z
0	0	0
0	750	63000
720	**510**	**88200**
1000	**300**	**88200**
1100	200	86100
1100	0	69300

Alors d'après le tableau deux points extrêmes maximisent la fonction objective: le point (720,510) et le point (1000,300) alors on peut conclure que tous point appartenant a la droite passant par ces deux points est une solution aussi.

Méthode de SIMPLEXE

La méthode de simplexe est utilisée pour n'importe qu'elle nombre de variables de décision contrairement à la méthode graphique qui est limitée à deux variables seulement. Mais avant d'utiliser la méthode de simplexe on doit tous d'abord transformer la forme canonique du programme linéaire en une forme dite forme standard.

La forme standard est obtenue en ajoutant ou en soustrayant des variables d'écart pour chaque contrainte fonctionnelle, autrement dit:

Une contrainte qui se représente comme une inéquation : $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$

Peut être remplacée par l'équation: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + e_i = b_i$

Bien évidemment, dans un cas contraire où le système est de type: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$

Nous écrirons: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - e_i = b_i$

La variable supplémentaire, e_i dans les deux cas est appelée donc "***variable d'écart***", qui est soumise à la contrainte de non-négativité aussi, $e_i = x_{n+i} \geq 0$.

La mise en forme standard permet d'avoir donc un système d'équations linéaires à résoudre au lieu d'un système d'inéquations et cela en suivant les étapes données dans l'algorithme:

1) Ecrire le programme linéaire à la forme standard.
2) Identifier les variables de base.
3) Calculer les valeurs de $Z_j = \sum_{i=1}^{nvb} C_i a_{ij}$, et les différences $C_j - Z_j$
4) Si le critère d'arrêt est atteint aller a la fin
5) Si non extraire la variable entrante, la variable sortante et le pivot.
6) Appliquer l'élimination de Gauss-Jordan.
7) Aller a l'étape 3.
8) Fin

Cet algorithme nous montre que la méthode de SIMPLEXE est une méthode itérative.

Lorsqu'on transforme la forme canonique à la forme standard on peut constater que le système des équations peut se décomposer comme suit:

$[A]\{x\} = \{b\}$ qui peut être réécrit sous la forme: $[D \mid I]\begin{Bmatrix} x_h \\ x_B \end{Bmatrix} = \{b\} \Rightarrow [D]\{x_h\} + [I]\{x_B\} = \{b\}$

Les variables qui forment la matrice identité sont dites ***variables de base*** et les autres sont dite ***variables hors base***.

Pour chaque colonne de la matrice $[A]$ la valeur Z_j est calculée par le produit du vecteur des coefficients des variables de base et colonne j de la matrice $Z_j = \sum C_i \times a_{ij}$.

Détermination de la variable entrante, la variable sortante et le pivot:

Si le critère d'optimalité n'est pas atteint, on doit déterminer la variable qui entre dans la base et la variable qui sort de la base.

La variable entrante est la variable qui correspond au max des valeurs positives $C_j - Z_j$ dans le cas de maximisation de la fonction objective ou bien au minimum des valeurs négatives $C_j - Z_j$ dans le cas de minimisation de la fonction objective.

$$V.E \rightarrow \begin{cases} \max(C_j - Z_j > 0) & \max imisation \\ \min(C_j - Z_j < 0) & \min imisation \end{cases}$$

La colonne de $[A]$ qui correspond à la variable entrante est notée donc a_{ie}.

La variable sortante est celle qui correspond à au minimum positif des rapports $\frac{b_i}{a_{ie}}$.

Une fois le pivot, qui est obtenu par l'intersection entre la ligne de la variable sortante et la colonne de la variable entrante, est déterminé on peut appliquer la méthode d'élimination de gauss-Jordan.

Le critère d'optimalité est atteint si:

Pour un type de maximisation:

Une solution de base réalisable est optimale lorsque pour les variables hors base ont tous $C_j - F_j \leq 0$:

1) solution optimale est unique si toutes les différences $C_j - F_j < 0$.
2) Inexistence ou absence de solutions optimales finies s'il existe une variable hors de la base x_j pour laquelle $C_j - F_j > 0$ et $a_{ij} \leq 0$.
3) La solution optimale est multiple si pour une variable x_j hors de base $C_j - F_j = 0$ s'il y a un terme $a_{ij} > 0$.

Pour un type de minimisation:

Une solution de base réalisable est optimale lorsque pour les variables hors de la base ont tous $C_j - F_j \geq 0$.

1) solution optimale est unique si toutes les différences $C_j - F_j > 0$.
2) Inexistence ou absence de solutions optimales finies s'il existe une variable hors de la base x_j pour laquelle $C_j - F_j < 0$ et $a_{ij} \leq 0$.
3) La solution optimale est multiple si pour une variable x_j hors de base $C_j - F_j = 0$ s'il y a un terme $a_{ij} > 0$.

En fin et pour mieux comprendre et simplifier le processus, on doit organiser les calculs dans un tableau sous la forme:

C_J			C_1	C_2	....	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	......	$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ie}}$
Z_J						
C_J-Z_J						

Essayons d'examiner différents cas possibles d'un programme linéaire:

1) **Cas de contraintes de type $\leq$**

Exemple 1:

Reprenons le même exemple traité dans la méthode graphique:

$$\text{Max} \quad 66x_1 + 84x_2$$

$$\text{S.C} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 4200 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2250 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2600 \\ x_1 \leq 1100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

La forme standard du programme linéaire:

$$\text{S.C} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 4200 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2250 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 2600 \\ x_1 + x_5 = 1100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4200 \\ 2250 \\ 2600 \\ 1100 \end{Bmatrix}$$

A partir de cette dernière écriture, les variables de base sont x_i pour $i = 3,4,5,6$

C_J			66	84	0	0	0	0	
V.B	C.V.B	B	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_3	0	4200	3	**4**	1	0	0	0	1050
X_4	0	2250	**1**	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**750**
X_5	0	2600	1	**2**	0	0	1	0	1300
X_6	0	1100	1	**0**	0	0	0	1	Infini
Z_J		0	0	**0**	0	0	0	0	
C_J-Z_J			66	**84**	0	0	0	0	

La variable entrante est X_2 et la variable sortante est X_4 d'où le pivot est **3**

C_J			66	84	0	0	0	0	
V.B	C.V.B	B	**X_1**	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_3	0	1200	**5/3**	**0**	**1**	**-4/3**	**0**	**0**	**720**
X_2	84	750	**1/3**	1	0	1/3	0	0	2250
X_5	0	1100	**4/3**	0	0	-2/3	1	0	825
X_6	0	1100	**1**	0	0	0	0	1	1100
Z_J		63000	**28**	84	0	28	0	0	
C_J-Z_J			**38**	0	0	-28	0	0	

La variable entrante est X_1 et la variable sortante est X_3 d'où le pivot est **5/3**

C_J			66	84	0	0	0	0	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	**X_4**	X_5	X_6	θ
X_1	66	720	1	0	0.60	**-0.8**	0	0	-900
X_2	84	510	0	1	-0.20	**0.60**	0	0	850
X_5	0	140	**0**	**0**	**0.80**	**0.40**	**1**	**0**	**350**
X_6	0	380	0	0	0.60	**0.80**	0	1	475
Z_J		90360	66	84	22.8	**-2.40**	0	0	
C_J-Z_J			0	0	-22.8	**2.40**	0	0	

La variable entrante est X_4 et la variable sortante est X_5 d'où le pivot est **0.4**

C_J			66	84	0	0	0	0	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_1	66	1000	1	0	-1	0	2	0	
X_2	84	300	0	1	1	0	-1.5	0	
X_4	0	350	0	0	-2	1	2.5	0	
X_6	0	100	0	0	1	0	-2	1	
Z_J		91200	66	84	18	0	6	0	
C_J-Z_J			0	0	-18	0	-6	0	

Toute les différences sont négatives alors le tableau est optimal d'ou la solution est:

$$\begin{cases} X_1 = 1000 \\ X_2 = 300 \end{cases} \Rightarrow Z_{max} = 91200$$

Exemple 2:

$$\text{Max} \quad 63x_1 + 84x_2$$

$$\text{S.C} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 4200 \\ x_1 + 3x_2 \le 2250 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 2600 \\ x_1 \le 1100 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

Avec la même manière que précédemment, on détermine les variables de base et celles hors base.

C_J			63	84	0	0	0	0	
V.B	C.V.B	B	X_1	$\mathbf{X_2}$	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_3	0	4200	3	**4**	1	0	0	0	1050
X_4	0	2250	**1**	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**750**
X_5	0	2600	1	**2**	0	0	1	0	1300
X_6	0	1100	1	**0**	0	0	0	1	Infini
Z_J		0	0	**0**	0	0	0	0	
C_J-Z_J			63	**84**	0	0	0	0	

La variable entrante est X_2 et la variable sortante est X_4 d'où le pivot est **3**

C_J			63	84	0	0	0	0	
V.B	C.V.B	B	$\mathbf{X_1}$	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_3	0	1200	**5/3**	**0**	**1**	**-4/3**	**0**	**0**	**720**
X_2	84	750	**1/3**	1	0	1/3	0	0	2250
X_5	0	1100	**4/3**	0	0	-2/3	1	0	825
X_6	0	1100	**1**	0	0	0	0	1	1100
Z_J		63000	**28**	84	0	28	0	0	
C_J-Z_J			**35**	0	0	-28	0	0	

La variable entrante est X_1 et la variable sortante est X_3 d'où le pivot est **5/3**

C_J			63	84	0	0	0	0	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	$\mathbf{X_4}$	X_5	X_6	θ
X_1	63	720	1	0	0.60	**-0.8**	0	0	-900
X_2	84	510	0	1	-0.20	**0.60**	0	0	850
X_5	0	140	**0**	**0**	**0.80**	**0.40**	**1**	**0**	**350**
X_6	0	380	0	0	0.60	**0.80**	0	1	475
Z_J		88200	63	84	21	**0**	0	0	
C_J-Z_J			0	0	-21	**0**	0	0	

Le tableau est optimal la solution est don: $\begin{cases} X_1 = 720 \\ X_2 = 510 \end{cases} \Rightarrow Z_{max} = 88200$, mais la variable hors base X_4 procède une différence nulle donc une autre solution existe, alors cette variable entre dans la base et X_5 sort et le pivot est **0.4**

C_J			63	84	0	0	0	0	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	$\mathbf{X_4}$	X_5	X_6	θ
X_1	63	1000	1	0	-1	0	2	0	
X_2	84	300	0	1	1	0	-1.5	0	
X_4	0	350	0	0	-2	1	2.5	0	
X_6	0	100	0	0	1	0	-2	1	
Z_J		88200	63	84	21	0	0	0	
C_J-Z_J			0	0	-21	0	0	0	

La deuxième solution est $\begin{cases} X_1 = 1000 \\ X_2 = 300 \end{cases} \Rightarrow Z_{max} = 88200$

2) **Cas de contraintes de type** $=$ ou $\geq$

Si au moins une contrainte est de type $=$ ou $\geq$ on doit introduire un autre type de variables appelée variables artificielles après avoir soustraire entièrement les variables d'écart, autrement dit: Si une contrainte est donnée par:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ sera remplacée dans la forme standard par $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - e_i + t_i = b_i$

Pour résoudre ce type de problèmes 2 méthodes peuvent êtres utilisées méthode dite de ***pénalité*** et méthode de ***2 phases***

A) **Méthode de pénalité:**

Ecrire le programme linéaire sous la forme standard en introduisant les variables d'écart et les variables artificielles.

Ecrire la fonction objective en lui ajoutant les variables artificielles multipliant par une quantité $\pm M$ avec M un nombre grand positif.

$-M$ pour le cas de maximisation et $+M$ pour un cas de minimisation.

Et ensuite on utilise la méthode de SIMPLEXE.

- Une solution optimale si le critère d'optimalité est atteint et toutes les variables artificielles sont nulles.
- Pas de solution réalisable si le critère d'optimalité est vérifié mais il existe des variables artificielles dans la base.
- Une infinité de solution si une variable peut être introduite dans la base selon le critère d'entrée mais toute les valeurs $a_{ij} \leq 0$.

Exemple 1:

Soit le programme linéaire suivant:

$$\text{Min} \quad 96x_1 + 24x_2$$

$$\text{S.C} \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 7.5 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Le programme linéaire peut être écrit dans sa forme standard comme suit:

$$\text{Min} \quad 96x_1 + 24x_2 + Mx_5 + Mx_6$$

$$\text{P.L} \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 7.5 \\ 6x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

C_J			**96**	24	0	0	M	M	
V.B	C.V.B	B	**X_1**	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_5	M	7.5	4	2	-1	0	1	0	1.875
X_6	**M**	**6**	**6**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**1**
Z_J			**10M**	3M	-M	-M	M	M	
C_J-Z_J			**96-10M**	24-3M	M	M	0	0	

Le tableau n'est pas optimal, alors X_1 entre et X_6 sort de la base.

C_J			96	**24**	0	0	M	M	
V.B	C.V.B	B	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_5	**M**	**3.5**	**0**	**4/3**	**-1**	**2/3**	**1**	**-2/3**	**2.625**
X_1	96	1	1	**1/6**	0	-1/6	0	1/6	6
Z_J			96	**4/3M+16**	-M	-M	M	M	
C_J-Z_J			0	**8-4M/3**	M	M	0	-M	

Le tableau n'est pas optimal, alors X_2 entre et X_5 sort de la base.

C_J			96	24	0	0	M	M	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_2	24	2.625	0	1	-0.75	0.5	0.75	-0.5	
X_1	96	0.5625	1	0	0.125	-0.25	-0.125	0.25	
Z_J		117	96	24	-6	-12	6	12	
C_J-Z_J			0	0	M	12	94	88	

Le tableau est optimal la solution donc est: $\begin{cases} X_1 = 2.625 \\ X_2 = 0.5625 \end{cases} \Rightarrow Z_{min} = 117$

Exemple 2:

Soit le programme linéaire suivant:

$$\text{Max} \quad 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.C} \quad \begin{cases} 1.25\ x_1 + 1x_2 \leq 5 \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 70 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Le programme linéaire peut être écrit dans sa forme standard comme suit:

$$\text{Max} \quad 3x_1 + 2x_2 - Mx_5$$

$$\text{P.L} \quad \begin{cases} 1.25\ x_1 + 1x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 + 10x_2 - x_4 + x_5 = 70 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

C_J			3	2	0	0	-M	
V.B	C.V.B	B	X_1	$\mathbf{X_2}$	X_3	$\mathbf{X_4}$	X_5	θ
X_3	0	5	**1.25**	**1**	**1**	**0**	**0**	**5**
X_5	-M	70	7	**10**	0	-1	1	7
Z_J		-70M	-7M	**-10M**	0	M	M	
C_J-Z_J			3-7M	**2-10M**	0	-M	0	

La variable X_2 entre dans la base et X_3 Sort de la base.

C_J			3	2	0	0	-M	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	θ
X_2	2	5	1.25	1	1	0	0	
X_5	-M	20	-5.5	0	-10	-1	1	
Z_J			2.5+5.5M	2	2+10M	M	-M	
C_J-Z_J			0.5-5.5M	0	-2-10M	0	0	

Le tableau est optimal mais la variable artificielle X_5 est toujours dans la base, alors le problème ne procède pas de solution réalisable.

Exemple 3:

Soit le programme linéaire suivant:

$$\text{Max} \quad 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{S.C} \quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Le programme linéaire peut être écrit dans sa forme standard comme suit:

$$\text{Max} \quad 2x_1 + 3x_2 - Mx_3$$

$$\text{P.L} \quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 15 \\ x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

C_J			**2**	3	0	0	-M	
V.B	C.V.B	B	**X_1**	X_2	X_3	X_4	X_5	θ
X_5	**-M**	**15**	**5**	**3**	**-1**	**0**	**1**	**5**
X_4	0	4	**0**	1	0	1	0	-
Z_J		-15M	**-5M**	-3M	M	0	-M	
C_J-Z_J			**2+5M**	3+3M	-M	0	0	

La variable X_1 entre dans la base et X_5 Sort de la base.

C_J			2	**3**	0	0	-M	
V.B	C.V.B	B	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	θ
X_1	2	3	1	**0.6**	-0.2	0	0.2	5
X_4	**0**	**4**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**4**
Z_J		6	2	**1.2**	-0.4	0	0.4	
C_J-Z_J			0	**1.8**	0.4	0	0.4-M	

La variable X_2 entre dans la base et X_4 Sort de la base.

C_J			2	3	0	0	-M	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	θ
X_1	2	0.6	1	0	-0.2	-0.6	0.2	-3
X_2	3	4	0	1	0	1	0	-
Z_J			2	3	-0.4	-1.8	0.4	
C_J-Z_J			0	0	0.4	1.8	0.4-M	

La variable X_3 peut entrer mais le critère de sortie n'existe pas donc on a une infinité de solutions.

B) Méthode de deux phases:

La résolution d'un programme linéaire donnée se décompose en deux phases:

1^{ere} phase: consiste à éliminer les variables artificielles du programme linéaire et cela se fait par minimisation de la somme de ces variables.

- Si le critère d'optimalitéé est vérifie et que la base contient au moins une variable artificielle alors le programme n'admet pas de solutions réalisables.
- La phase 1 termine lorsque Z est annulé et le programme admet des solutions réalisables et on passe à la phase 2.

2^{ere} phase: consiste à optimiser la fonction objective initialement donnée sans existence des variables artificielles même s'elles se trouvent dans la base avec les données du dernier tableau obtenu dans la phase 1.

Exemple 1:

Reprenons l'exemple 1 traité dans la méthode de pénalité:

$$\text{Min} \quad 96x_1 + 24x_2$$

$$\text{S.C} \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 7.5 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

La première phase consiste à traiter le programme suivant :

$$\text{Min} \quad x_5 + x_6$$

$$\text{P.L} \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 7.5 \\ 6x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

C_J			**0**	0	0	0	1	1	
V.B	C.V.B	B	**X_1**	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_5	1	7.5	4	2	−1	0	1	0	1.875
X_6	**1**	**6**	**6**	**1**	**0**	**−1**	**0**	**1**	**1**
Z_J			**10**	3	−1	−1	1	1	
C_J-Z_J			**−10**	−3	1	1	0	0	

La variable X_1 entre dans la base et X_6 Sort de la base.

C_J			0	**0**	0	0	1	1	
V.B	C.V.B	B	X_1	**X_2**	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_5	**1**	**3.5**	**0**	**4/3**	**−1**	**4/6**	**1**	**−4/6**	**14/3**
X_1	0	1	1	**1/6**	0	−1/6	0	1/6	6
Z_J			0	**4/3**	−1	4/6	1	−4/6	
C_J-Z_J			0	**−4/3**	1	−4/6	0	10/6	

La variable X_2 entre dans la base et X_5 Sort de la base.

C_J			0	0	0	0	1	1	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
X_2	0	2.625	0	1	−0.75	0.5	0.75	−0.5	
X_1	0	0.5625	1	0	0.125	−0.25	−0.125	0.25	
Z_J		0	0	0	0	0	0	0	
C_J-Z_J			0	0	0	0	1	1	

Le tableau est optimal, on élimine les variables artificielles.

C_J			96	24	0	0	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	θ
X_2	24	2.625	0	1	−0.75	0.5	
X_1	96	0.5625	1	0	0.125	−0.25	
Z_J		117	96	24	−6	−12	
C_J-Z_J			0	0	6	12	

Le tableau de la 2ème phase est optimal, on donc la solution $\begin{cases} X_1 = 2.625 \\ X_2 = 0.5625 \end{cases} \Rightarrow Z_{min} = 117.$

Exemple 2:

Soit le programme linéaire suivant:

$$\text{Max} \quad 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.C} \quad \begin{cases} 1.25\,x_1 + 1x_2 \le 5 \\ 7x_1 + 10\,x_2 \ge 70 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

Le programme linéaire peut être écrit dans sa forme standard de 1^{ere} phase comme suit:

$$\text{Min} \quad Z = x_5$$

$$\text{P.L} \quad \begin{cases} 1.25\,x_1 + 1x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 + 10\,x_2 - x_4 + x_5 = 70 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$$

C_J			0	**0**	0	0	1	
V.B	C.V.B	B	X_1	$\mathbf{X_2}$	X_3	$\mathbf{X_4}$	X_5	θ
X_3	0	5	**1.25**	**1**	**1**	**0**	**0**	**4**
X_5	1	70	7	**10**	0	-1	1	7
Z_J		70	7	**-10**	0	1	1	
C_J-Z_J			-7	**-10**	0	-1	0	

La variable X_1 entre dans la base et X_3 Sort de la base.

C_J			0	0	0	0	1	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	θ
X_2	0	5	1.25	1	1	0	0	
X_5	1	20	-5.5	0	-10	-1	1	
Z_J		20	-5.5	0	-10	-1	-1	
C_J-Z_J			5.5	0	10	1	0	

Le tableau est optimal mais la variable artificielle X_5 est toujours dans la base, alors le problème ne procède pas de solution réalisable.

Remarque:

- Dans un programme linéaire si le second membre est négatif on doit multiplier la contrainte par -1.
- Si dans un programme linéaire une des variables n'est pas soumise à la condition de non négativité, on doit la réécrire en fonction de deux autres par: $x_i = x_i' - x_i''$ avec $x_i' \ge 0$ et $x_i'' \ge 0$
- On peut transformer un problème de minimisation à un problème de maximisation ou l'inverse par multiplication de la fonction objective par -1.

Dualité

Chaque programme linéaire **primal** possède un programme linéaire **dual** qui peut lui remplacer pour simplifier la résolution.

Pour transformer le primal en dual il faut vérifier que toute les contraintes sont de même type c'est à dire soit de type $\geq$ ou de type $\leq$.

- Si le système de contraintes n'est pas de même type on doit multiplier par -1 pour transformer une contrainte du type $\leq$ à une contrainte de type $\geq$ ou le contraire.
- Si une contrainte est de type $=$ on doit la remplacer par deux contraintes de types différents:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \end{cases}$$

Une fois l'étape d'homogénéisation est faite, on passe à la transformation primal → dual

Primal	**Dual**
n: nombre de variables de décision m: nombre de contraintes	m: nombre de variables de décision n: nombre de contraintes
$\max Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$	$\min W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\min Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$	$\max W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Rightarrow [A]\{x\} \leq \{b\}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i \geq C_j \Rightarrow [A]^T\{y\} \leq \{C\}$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Rightarrow [A]\{x\} \geq \{b\}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i \leq C_j \Rightarrow [A]^T\{y\} \leq \{C\}$

Les deux programmes sont très lies l'un à l'autre, cette liaison peut être traduite par:

a) Si la solution optimale du programme primal existe et est finie, alors celle du programme dual existe aussi, est finie et les valeurs numériques optimales des fonctions économiques sont égales (w=z).

b) Si la solution optimale de l'un d'entre eux est infinie (non borne), alors le système des contraintes de l'autre ne possède pas de solutions.

d) les valeurs des variables de décision et d'écart du primal sont déterminées a partir de celles du dual et vis versa.

Reprenons le 3ème exemple de la partie modélisation, le programme linéaire correspond comme nous avons vu est:

$$\text{Max} \quad Z = 7.5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 96 \\ 2x_1 + x_2 \leq 24 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Sous la forme standard, on peut avoir:

$$\text{Max} \quad Z = 7.5x_1 + 6x_2$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 96 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 24 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

C_J			**7.5**	6	0	0	
V.B	C.V.B	B	**X_1**	X_2	X_3	X_4	θ
X_3	0	96	**4**	6	1	0	24
X_4	**0**	**24**	**2**	**1**	**0**	**1**	**12**
Z_J			**0**	0	0	0	
C_J-Z_J			**7.5**	6	0	0	

La variable X_1 entre dans la base et X_4 Sort de la base.

C_J			7.5	**6**	0	0	
V.B	C.V.B	B	X_1	**X_2**	X_3	X_4	θ
X_3	**0**	**48**	**0**	**4**	**1**	**-2**	**12**
X_1	7.5	12	1	**0.5**	0	0.5	24
Z_J			7.5	**3.75**	0	3.75	
C_J-Z_J			0	**2.25**	0	-3.75	

La variable X_2 entre dans la base et X_3 Sort de la base.

C_J			7.5	6	0	0	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	θ
X_2	6	12	0	1	0.25	-0.5	
X_1	7.5	6	1	0	-0.125	0.75	
Z_J		117	7.5	6	0.5625	2.625	
C_J-Z_J			0	0	-0.5625	-2.625	

Le critère d'optimalité est atteint, la solution est donc: $(x_1 = 6, x_2 = 12 \Rightarrow \text{Max } Z = 117)$

<u>Le dual</u>

Le dual correspondant en suivant les règles de formation est:

$$\text{Min} \quad W = 96y_1 + 24y_2$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 4y_1 + 2y_2 \geq 7.5 \\ 6y_1 + y_2 \geq 6 \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$$

Sous la forme standard, on peut avoir:

$$\text{Min} \qquad W = 96y_1 + 24y_2$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} 4y_1 + 2y_2 - y_3 + y_5 = 7.5 \\ 6y_1 + y_2 - y_4 + y_6 = 6 \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$$

C_J			**96**	24	0	0	M	M	
V.B	C.V.B	B	**Y_1**	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	θ
Y_5	M	7.5	4	2	-1	0	1	0	1.875
Y_6	**M**	**6**	**6**	**1**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**1**
Z_J			**10M**	3M	-M	-M	M	M	
C_J-Z_J			**96-10M**	24-3M	M	M	0	0	

Le tableau n'est pas optimal, alors Y_1 entre et Y_6 sort de la base.

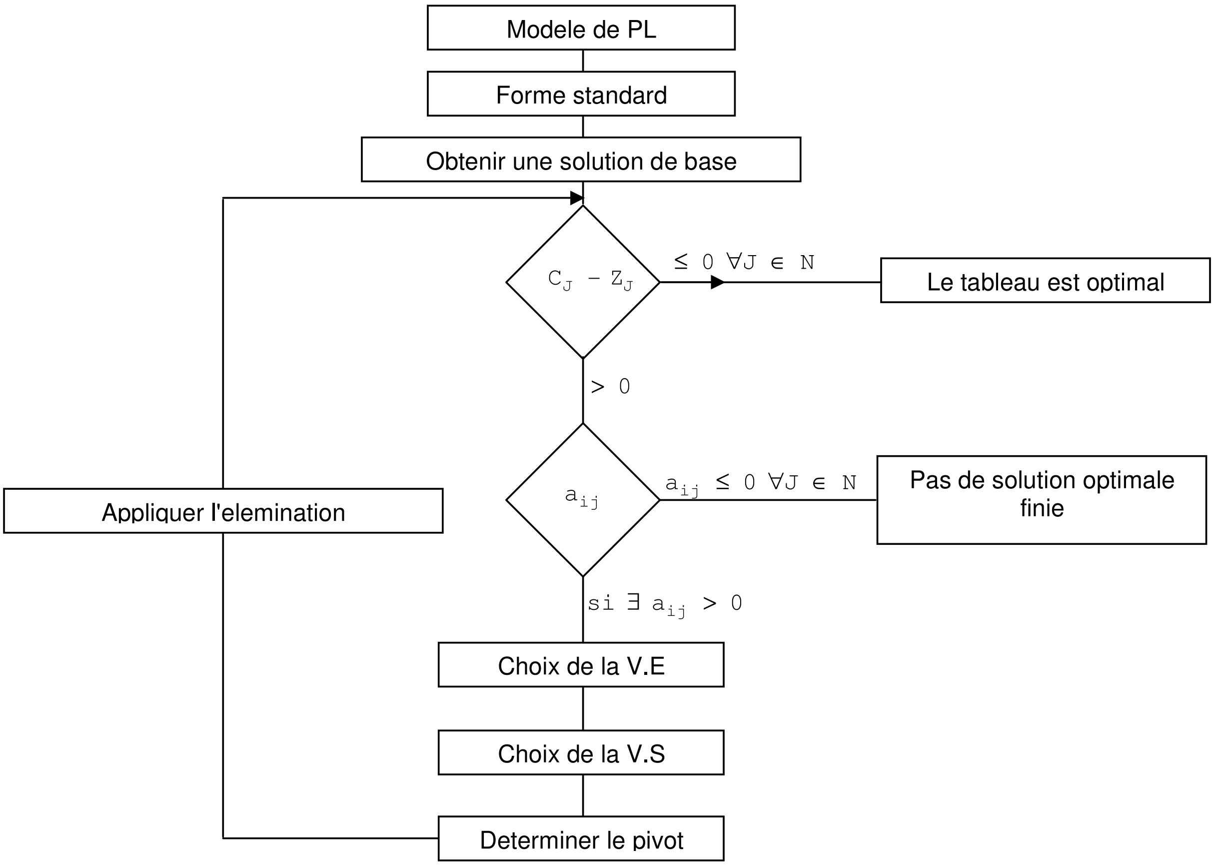
C_J			96	**24**	0	0	M	M	
V.B	C.V.B	B	Y_1	**Y_2**	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	θ
Y_5	**M**	**3.5**	**0**	**4/3**	**-1**	**2/3**	**1**	**-2/3**	**2.625**
Y_1	96	1	1	**1/6**	0	-1/6	0	1/6	6
Z_J			96	**4/3M+16**	-M	-M	M	M	
C_J-Z_J			0	**8-4M/3**	M	M	0	-M	

Le tableau n'est pas optimal, alors Y_2 entre et Y_5 sort de la base.

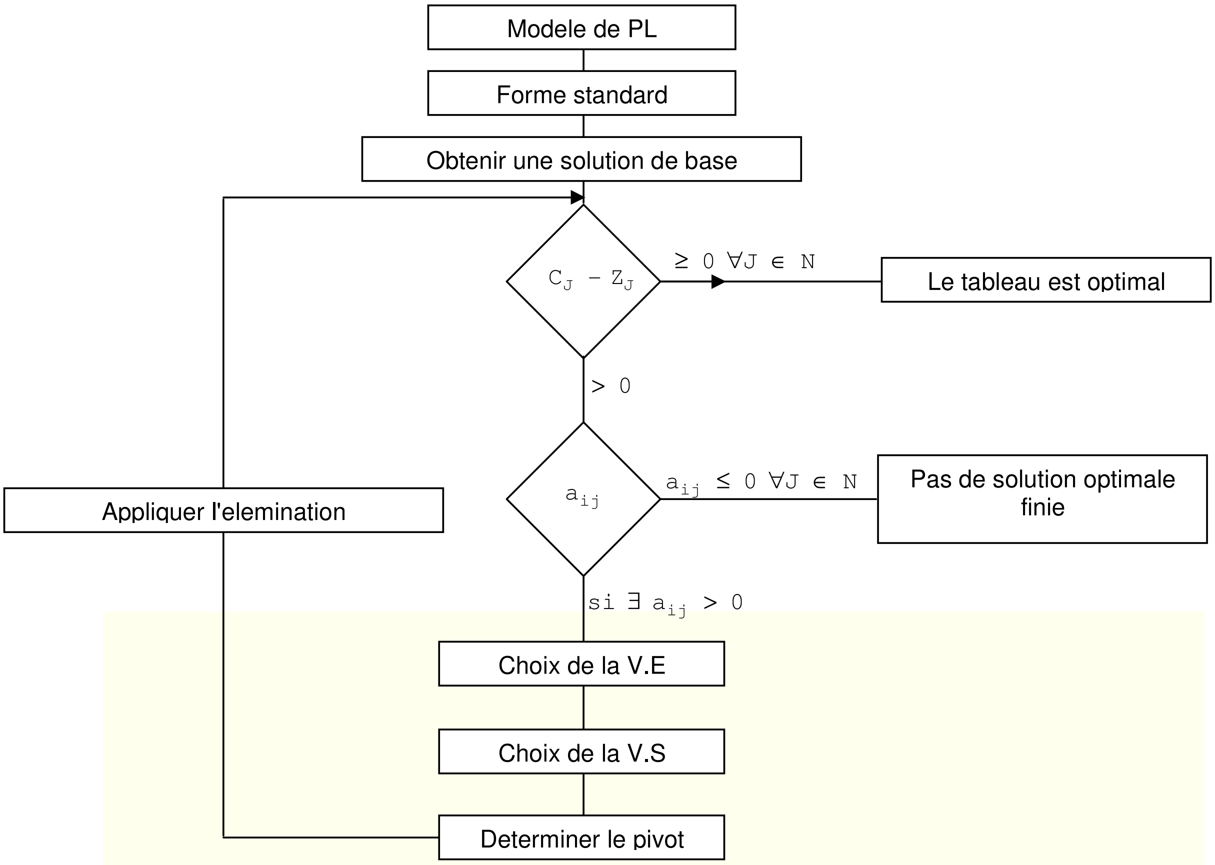
C_J			96	24	0	0	M	M	
V.B	C.V.B	B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	θ
Y_2	24	2.625	0	1	-0.75	0.5	0.75	-0.5	
Y_1	96	0.5625	1	0	0.125	-0.25	-0.125	0.25	
Z_J		117	96	24	-6	-12	6	12	
C_J-Z_J			0	0	6	12	M-6	M-12	

Le tableau est optimal, la solution donc est: $\begin{cases} Y_1 = 0.5625 \\ Y_2 = 2.625 \end{cases} \Rightarrow Z_{min} = 117$

La méthode de simplexe est une méthode itérative résumée dans l'algorithme suivant:



Algorithme de SIMPLEXE pour Maximisation



Algorithme de SIMPLEXE pour Minimisation

C_J									
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J									
C_J-Z_J									

C_J									
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J									
C_J-Z_J									

C_J									
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J									
C_J-Z_J									

C_J									
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J									
C_J-Z_J									

C_J									
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J									
C_J-Z_J									

C_J										
V.B	C.V.B	B	$\mathbf{X_1}$	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J										
C_J-Z_J										

C_J										
V.B	C.V.B	B	$\mathbf{X_1}$	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J										
C_J-Z_J										

C_J										
V.B	C.V.B	B	$\mathbf{X_1}$	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J										
C_J-Z_J										

C_J										
V.B	C.V.B	B	$\mathbf{X_1}$	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J										
C_J-Z_J										

C_J										
V.B	C.V.B	B	$\mathbf{X_1}$	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	θ
Z_J										
C_J-Z_J										

Soit le programme linéaire suivant:

$$\text{Min} \quad 3x_1 + 6x_2$$

$$\text{S.C} \quad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Le programme linéaire peut être écrit dans sa forme standard comme suit:

$$\text{Min} \quad 3x_1 + 6x_2 + Mx_5$$

$$\text{P.L} \quad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

C_J			**3**	6	0	0	M	
V.B	C.V.B	B	**X_1**	X_2	X_3	**X_4**	X_5	θ
X_5	M	20	**5**	4	−1	0	1	4
X_4	**0**	**6**	**2**	**3**	**0**	**1**	**0**	**3**
Z_J		2000	**5M**	4M	−M	0	M	
C_J-Z_J			**3−5M**	6−4M	M	0	0	

La variable X_1 entre dans la base et X_4 Sort de la base.

C_J			3	6	0	0	100	
V.B	C.V.B	B	X_1	X_2	X_3	**X_4**	X_5	θ
X_5	100	5	0	−3.5	−1	−2.5	1	
X_1	3	3	1	1.5	0	0.5	0	
Z_J		509	3	−345	−100	−248.5	100	
C_J-Z_J			0	351	100	248.5	0	

Le tableau est optimal mais la variable artificielle X_5 est toujours dans la base, alors le problème ne procède pas de solution réalisable.