

Plan

I- Démonstrations et connecteurs logiques

A- Définitions

non : la négation ; **et** : la conjonction ; **ou** : la disjonction logique ; **non(et)**, **non(ou)** ; \implies : l'implication ; \iff : l'équivalence logique.

B- Comment réinvestir tout cela dans une démonstration ?

\implies : l'implication ; **et** : la conjonction ; **ou** : la disjonction logique ; \iff : l'équivalence logique ; **non** : la négation ; une exception : **la démonstration par l'absurde**.

II- Langage des quantificateurs

A- Définitions

1- Le quantificateur universel \forall

2- Le quantificateur existentiel \exists

3- Règles d'usage des quantificateurs

B- Démonstrations et quantificateurs

III- Utilisation des symboles logiques dans la rédaction mathématique

A- Directives générales

B- Directives concernant l'utilisation de " \implies ", " \iff ", "et", "ou"

C- Directives concernant l'emploi des quantificateurs

I- Démonstrations et connecteurs logiques

A- Définitions

1. **non : la négation**

En mathématiques, on se situe dans le cadre d'une logique à deux valeurs. Une proposition mathématique P est soit vraie, soit fausse. Nous noterons **non** P la négation de la proposition P , c'est-à-dire la proposition qui est vraie quand P est fausse et fausse quand P est vraie.

Une propriété immédiate est que **non** (**non** P) est équivalente à P .

2. **et : la conjonction**

Lorsqu'on a deux propositions P, Q on peut former une nouvelle proposition appelée la conjonction de ces deux propositions, que l'on notera (P **et** Q). La proposition (P **et** Q) est vraie signifie que les deux propositions sont vraies en même temps.

3. **ou : la disjonction logique**

Lorsqu'on a deux propositions P, Q on peut former une nouvelle proposition appelée la disjonction de ces deux propositions, que l'on notera (P **ou** Q). La proposition (P **ou** Q) est vraie signifie que *l'une au moins des deux propositions est vraie*. Il faut faire attention à ce point qui diffère du langage courant. On dit qu'en mathématique, le **ou** est *non exclusif*.

(P **ou** Q) signifie que l'un des trois cas suivants est vraie :

- * P est vraie et Q est vraie,
- * P est vraie et Q est faux,
- * P est faux et Q est vraie.

4. **non(P et Q), non(P ou Q)**

D'après l'inventaire de ces trois cas, **non** (P **ou** Q) signifie que l'on a P faux et Q faux, c'est à dire que l'on a (**non** P **et** **non** Q) :

$$\boxed{\text{non } (P \text{ ou } Q) \text{ équivaut à } (\text{non } P \text{ et } \text{non } Q).}$$

De même **non** (P **et** Q) signifie que l'on est dans l'un des trois cas :

- * P est faux et Q est faux
- * P est vraie et Q est faux
- * P est faux et Q est vraie

c'est-à-dire que l'une au moins des propriétés P, Q est fausse, et que l'on a (**non** P) ou (**non** Q) :

$$\boxed{\text{non } (P \text{ et } Q) \text{ équivaut à } (\text{non } P \text{ ou } \text{non } Q).}$$

5. **\implies : l'implication**

On peut considérer que les phrases suivantes ont le même sens :

- * Si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie,
- * Si P alors Q ,
- * P implique Q ,
- * $P \implies Q$.

Attention, la phrase formelle ($P \implies Q$) signifie exactement que :

- * ou bien P est faux
- * ou bien P est vraie et Q est vraie.

La proposition “ si P alors Q ”, ne signifie donc pas que P est vraie ; elle dit seulement que si l'hypothèse P est vraie, alors la conclusion Q l'est aussi.

Ceci s'exprime à l'aide des symboles de conjonction et de disjonction par (**non** P) **ou** Q ou encore **non** (P **et** **non** (Q)).

$$(P \implies Q) \text{ équivaut à } (\text{non } P) \text{ ou } Q$$

Condition nécessaire, condition suffisante

Il s'agit d'une autre façon d'exprimer les implications. Les phrases suivantes ont le même sens :

- * $P \implies Q$,
- * Pour P il faut Q ,
- * Q est une *condition nécessaire* pour P ,
- * Pour Q il suffit de P ,
- * P est une *condition suffisante* pour que Q .

La même implication peut donc se lire aussi bien comme une condition suffisante (pour que la conclusion soit vraie), soit une condition nécessaire (pour que l'hypothèse soit vraie il faut que la conclusion le soit).

La contraposée de l'implication $P \implies Q$ est $\text{non } Q \implies \text{non } P$

On a vu que $P \implies Q$ équivaut à $(\text{non } P) \text{ ou } Q$ donc aussi à $\text{non } (\text{non } Q) \text{ ou } \text{non } P$, c'est à dire à $\text{non } Q \implies \text{non } P$. Cette dernière proposition s'appelle *la contraposée* de $P \implies Q$ et elle lui est équivalente.

Par contre l'implication $P \implies Q$ n'a pas le même sens que l'implication $Q \implies P$ qui s'appelle *l'implication réciproque* de $P \implies Q$.

Exemple : l'implication $x = 1 \implies x^2 = 1$ est vraie (x étant supposé être un réel). En revanche $x^2 = 1 \implies x = 1$ est fausse.

La négation d'une implication : $\text{non } (P \implies Q) \text{ équivaut à } P \text{ et } \text{non } Q.$

Comme $P \implies Q$ équivaut à $(\text{non } P) \text{ ou } Q$ donc $\text{non } (P \implies Q)$ équivaut à $\text{non } ((\text{non } P) \text{ ou } Q)$, c'est à dire à $P \text{ et } \text{non } Q$. C'est la formule la plus importante à retenir.

6. \iff : l'équivalence logique

Les phrases suivantes ont le même sens :

- * P et Q sont simultanément vraie ou simultanément fausse,
- * Les propriétés P et Q sont équivalentes,
- * $P \iff Q$,
- * $P \implies Q$ et $Q \implies P$,
- * Pour P il faut et il suffit de Q ,
- * P si et seulement si Q ,
- * P est une condition nécessaire et suffisante pour Q .

Bien entendu, dans toutes ces phrases, on peut échanger le rôle de P et de Q .

B- Comment réinvestir tout cela dans une démonstration ?

Typiquement, dans une démonstration, on dispose d'objets donnés par l'énoncé, d'hypothèses c'est-à-dire de propriétés de ces objets supposées vraies, et il s'agit de démontrer un but, qui est une propriété que l'on souhaite établir et qui concerne ces objets, à l'aide des hypothèses et des propriétés connues antérieurement (les axiomes, les théorèmes...)

Il faut essayer d'établir un plan de démonstration.

1. \implies : l'implication

- a) Pour *démontrer* une implication $P \implies Q$: on suppose P et on démontre Q .
- b) Pour *utiliser* une hypothèses (ou une propriété déjà connue) du type $P \implies Q$, on essaie de démontrer P et alors Q en découle.

C'est la règle du *modus ponens* :

$$(P \text{ et } (P \implies Q)) \implies Q.$$

a-b bis) Ne pas perdre de vue, pour a) comme pour b), qu'il est parfois avantageux de remplacer l'implication par sa contraposée $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$.

2. et : la conjonction

c) Pour *démontrer* une conjonction P **et** Q , on démontre séparément la propriété P et la propriété Q dans l'ordre de son choix. Autrement dit on fait deux démonstrations avec pour but P dans un cas et Q dans l'autre.

d) Pour *utiliser* une hypothèse P **et** Q , on la remplace par les hypothèses P d'une part et Q d'autre part.

3. ou : la disjonction logique

e) Pour *démontrer* une disjonction P **ou** Q , on démontre que l'une au moins des propriétés est vraie. Dans la pratique on suppose que P par exemple est fausse, et on démontre Q . Procéder ainsi revient à remplacer P **ou** Q par l'implication équivalente $(\text{non } P) \implies Q$.

f) Pour *utiliser* une hypothèse P **ou** Q , on fait deux démonstrations séparées : d'une part on démontre que P implique la conclusion, d'autre part que Q aussi. C'est ce qu'on appelle la disjonction des cas ; on l'exprime de la façon suivante : "Premier cas : on suppose que P est vraie... Deuxième cas : on suppose que Q est vraie..."

4. \iff : l'équivalence

Remplacer systématiquement $P \iff Q$ par la conjonction $(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)$.

5. non : la négation

Pour une négation pas de règles générales sauf qu'il est adroit de rentrer au maximum les négations à l'intérieur des formules. par exemple s'il s'agit de **non** $(P \implies Q)$, transformer cette formule en P et **non** Q . Quand les négations sont arrivées au stade atomique, c'est-à-dire sous la forme $a \neq b$, ou $x \notin E$, il n'y a plus de gros problème de logique.

Un exemple

On considère deux nombre réels x et a . On suppose que $(x \neq a) \implies (x = 1)$. Montrer que $((x \neq a) \implies (x \neq 1)) \implies (x = a)$.

Démonstration : Démontrons la contraposée. On suppose donc que $x \neq a$ et on veut démontrer **non** $((x \neq a) \implies (x \neq 1))$ c'est-à-dire $(x \neq a) \text{ et } (x = 1)$. Il suffit donc de démontrer que $x = 1$ ce qui découle de l'hypothèse puisque $x \neq a$, ce qui achève la démonstration.

6. Une exception : la démonstration par l'absurde

Il est quelquefois nécessaire d'utiliser cette technique particulière de démonstration. Elle consiste à ajouter comme hypothèse la négation du but, le nouveau but étant alors une contradiction, c'est-à-dire une propriété du type " Z et **non** Z " où Z est une propriété quelconque, pas nécessairement dans les hypothèses.

Ne pas abuser des démonstrations par l'absurde. On voit des démonstrations par l'absurde qui se ramènent à la démonstration de la contraposée, ce qui est beaucoup moins lourd.

Un autre exemple

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Démonstration : Démontrons cette propriété par l'absurde : supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (on introduit donc deux nouveaux objets). Quitte à diviser p et q un nombre de fois suffisant on peut supposer que p et q ne sont pas pairs tout les deux. On a alors $p^2 = 2q^2$, ainsi, puisque le second membre de l'égalité est pair, le premier l'est aussi, donc p est pair. Il existe donc un entier p' tel que $p = 2p'$, et on a $4p'^2 = 2q^2$ soit $2p'^2 = q^2$, ce qui montre que q comme p est pair. On a obtenu la contradiction cherchée.

II- Langage des quantificateurs

A- Définitions

Le langage courant est facilement ambigu : la phrase “ tous les guichets sont fermés certains jours ”, qui est grammaticalement irréprochable, signifie-t-elle “ certains jours tous les guichets sont fermés ”, ou bien “ chaque guichet est fermé certains jours ”, ce qui est tout différent ?

Les mathématiques, qui ont la prétention de pouvoir affirmer avec certitude que telle propriété est vraie, que telle autre est fausse, ne peuvent s’accommoder d’un tel flou artistique. C’est la raison d’un langage précis spécifique aux mathématiques. L’objet de cette partie est de présenter les signes qui dans le langage mathématique expriment la quantification, c’est à dire la quantité d’objets (aucun, certains, tous) pour lesquels une propriété est vraie. Deux signes logiques sont utilisés pour traduire cela :

Le quantificateur universel : \forall ,

Le quantificateur existentiel : \exists .

L’usage de ces quantificateurs est très précis et diffère de l’usage intuitif du langage ordinaire. Cette précision est nécessaire pour lever toute ambiguïté.

1. Le quantificateur universel : \forall

$$(\forall x \in E) P(x)$$

Cette “phrase” formelle affirme que la propriété P est vraie pour tous les éléments x de l’ensemble E , ou encore qu’il n’y a pas dans E de contre-exemple à la propriété P . On notera que le quantificateur \forall est placé avant la propriété qu’il quantifie.

En français, on utilisera des expressions comme “pour tout x ”, “pour n’importe quel x ”, “pour chaque x ”, “pour un x quelconque”, pour traduire le caractère universel de cette propriété dans l’ensemble E . Cependant, alors qu’en mathématique le quantificateur doit figurer explicitement dans l’expression, il arrive qu’en français une phrase exprime une propriété universelle sans qu’aucun mot particulier (comme “tout”, “n’importe quel”...) n’y figure.

Exemple :

Tout homme est mortel.

N’importe quel homme est mortel.

L’homme est mortel.

Ces phrases sont rigoureusement équivalentes. Dans la dernière le caractère universel de la propriété est marqué par l’usage de l’article défini. Pour formaliser cette phrase mathématiquement, on doit rétablir le quantificateur manquant :

$$(\forall x \in H) M(x)$$

où H désigne l’ensemble des hommes et $M(x)$ la propriété “ x est mortel”.

Ce même phénomène se présente en mathématique lorsqu’on dit “un entier positif est plus grand qu’un entier négatif”, il s’agit de l’affirmation :

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{Z}^-) n \geq p.$$

De même lorsqu’on dit que “l’addition des réels est commutative”, cela signifie que le résultat de la somme de deux réels ne dépend pas de l’ordre dans lequel on les ajoute. Autrement dit :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x + y = y + x.$$

Attention : Que peut-on-dire de la propriété :

$$(\forall x \in \emptyset) P(x) ?$$

Elle est toujours vraie puisqu’il n’y a pas de contre-exemple !

Remarque : La propriété $(\forall x \in E) P(x)$ ne dépend pas de x . Elle signifie exactement la même chose que $(\forall y \in E) P(y)$. On dit que la variable x est muette.

2. Le quantificateur existentiel : \exists

$$(\exists x \in E) P(x)$$

Cette phrase affirme que dans E il existe au moins un élément x qui vérifie la propriété P . Attention, il peut en exister plusieurs. On affirme donc que l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P est non vide. Dans le langage courant l'affirmation "il y a un x dans E tel que $P(x)$ " veut quelquefois dire qu'il n'y en a qu'un seul. En mathématique elle signifie qu'il y en a un ou plusieurs.

Attention : La propriété :

$$(\exists x \in \emptyset) P(x)$$

est toujours fausse puisque l'ensemble vide ne contient aucun élément.

Remarque : La propriété $(\exists x \in E) P(x)$ ne dépend pas de x . Elle signifie exactement la même chose que $(\exists y \in E) P(y)$. Les variables x, y sont muettes.

3. Règles d'usage des quantificateurs

Première règle :

Quand on écrit une phrase formelle avec des symboles logiques, on ne mélange pas des mots et des signes logiques. Ou bien on écrit des phrases complètes en français, ou bien on écrit des phrases formelles. En particulier, il est incorrect d'utiliser les quantificateurs comme des abréviations et cela conduit à des erreurs.

Deuxième règle :

L'ordre d'écriture des quantificateurs est fondamental pour le sens de la phrase formelle. C'est une difficulté qu'il faut surmonter. Cependant quand deux quantificateurs existentiels se suivent on peut les échanger. De même s'il s'agit de deux quantificateurs universels. Par contre le sens change si on inverse l'ordre de deux quantificateurs différents.

Premier exemple : Considérons la propriété $P(x, y)$ qui signifie " x aime y ". Si nous écrivons les deux phrases formelles suivantes, leur sens est très différent :

phrase 1 $(\forall x \in E)(\exists y \in E) P(x, y)$.

phrase 2 $(\exists y \in E)(\forall x \in E) P(x, y)$.

Pour mieux saisir cette différence, il faut comprendre qu'un système de parenthèses est sous entendu lorsque plusieurs quantificateurs se suivent.

Si nous les rétablissons, cela donne pour la phrase 1 :

$$(\forall x \in E) \underbrace{((\exists y \in E) P(x, y))}_{=Q(x)}$$

La propriété $Q(x)$ signifie que x aime au moins une personne. La phrase 1 affirme donc que chaque élément x de E aime au moins une personne y , y pouvant bien sûr dépendre de x .

Traitons maintenant la phrase 2 :

$$(\exists y \in E) \underbrace{((\forall x \in E) P(x, y))}_{=R(y)}$$

La propriété $R(y)$ signifie que la personne y est aimée par tous les éléments x de E . La phrase 2 affirme donc l'existence d'au moins une personne y aimée de tous (y compris elle-même).

Deuxième exemple : Interpréter les phrases formelles suivantes :

phrase 3 $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N}) p \leq n$.

phrase 4 $(\forall p \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) p \leq n$.

Phrase 3 : rétablissons les parenthèses sous-entendues : $(\exists n \in \mathbb{N}) ((\forall p \in \mathbb{N}) \quad p \leq n)$. La propriété $(\forall p \in \mathbb{N}) \quad p \leq n$ signifie que tous les entiers sont plus petits que n . la phrase 3 signifie donc qu'il existe un entier plus grand que tous les autres. Ce qui est faux !

Phrase 4 : rétablissons les parenthèses sous-entendues : $(\forall p \in \mathbb{N}) ((\exists n \in \mathbb{N}) \quad p \leq n)$. La propriété $(\exists n \in \mathbb{N}) \quad p \leq n$ signifie qu'il existe un entier n plus grand que p . La phrase 4 signifie donc que pour tout p il existe au moins un entier n plus grand que p , ce qui est manifestement vrai (on prend $n = p$ ou bien $n = p + 231$).

Récapitulons :

$(\forall x \in E)(\exists y \in F)P(x, y)$, veut dire que pour chaque x il existe au moins un y , *fonction* de cet x tel que...

$(\exists y \in F)(\forall x \in E)P(x, y)$, veut dire qu'il y a un y , *le même pour tous les x* , tel que...

Troisième règle :

Comment prendre la négation d'une phrase formelle écrite avec des quantificateurs ? On se situe dans le cadre de la logique mathématique qui est dichotomique : une propriété P ne peut être que vraie ou fausse.

a) Négation d'une phrase commençant par un quantificateur universel :

$$(\forall x \in E)P(x).$$

Comme on affirme que la propriété P est universelle sur E , pour nier cette propriété il suffit de trouver un contre-exemple. Autrement dit :

$$\text{non } ((\forall x \in E)P(x)) \text{ est synonyme de } (\exists x \in E) \text{ non } P(x).$$

b) Négation d'une phrase commençant par un quantificateur existentiel :

$$(\exists x \in E)P(x)$$

On affirme ici que pour au moins un x , P est vrai, ou encore que l'ensemble des x pour lesquels P est vrai n'est pas vide. Le contraire est évidemment que l'ensemble des x pour lesquels P est vrai est vide, soit que la propriété **non** P est universelle :

$$\text{non } ((\exists x \in E)P(x)) \text{ est synonyme de } (\forall x \in E) \text{ non } P(x).$$

c) Négation d'une phrase comportant plusieurs quantificateurs. il suffit de se souvenir que ces phrases admettent un parenthésage implicite et d'appliquer progressivement les propriétés a) et b).

Par exemple :

$$(\forall x \in E)(\exists y \in F)(\forall z \in G)(\exists t \in T)P(x, y, z, t).$$

Rétablissons un parenthésage

$$(\forall x \in E) ((\exists y \in F) ((\forall z \in G) ((\exists t \in T)P(x, y, z, t))));$$

prenons la négation :

$$\text{non } (\forall x \in E) ((\exists y \in F) ((\forall z \in G) ((\exists t \in T)P(x, y, z, t))));$$

d'après a) :

$$(\exists x \in E) \text{ non } ((\exists y \in F) ((\forall z \in G) ((\exists t \in T)P(x, y, z, t))));$$

d'après b) :

$$(\exists x \in E) ((\forall y \in F) \text{ non } ((\forall z \in G) ((\exists t \in T)P(x, y, z, t))));$$

d'après a) :

$$(\exists x \in E) ((\forall y \in F) ((\exists z \in G) \text{ non } ((\exists t \in T) P(x, y, z, t)))));$$

d'après b) :

$$(\exists x \in E) ((\forall y \in F) ((\exists z \in G) ((\forall t \in T) \text{ non } P(x, y, z, t))))).$$

Récapitulons :

Pour nier une phrase formelle commençant par plusieurs quantificateurs, on conserve l'ordre d'écriture des variables, on change les \forall en \exists et les \exists en \forall et on remplace la propriété P par **non** P .

Lorsqu'on veut écrire la négation d'une propriété mathématique, on commence par écrire soigneusement de façon formelle, sans oublier ni intervertir les quantificateurs, la propriété directe. Puis on en prend la négation avec les règles précédentes.

Exemple : Pour écrire qu'un ensemble A ($A \subset \mathbb{R}$) n'est pas majoré, on commence par écrire la propriété " A est majoré", c'est-à-dire "il existe un élément x qui est un majorant de A " :

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in A) \quad y \leq x,$$

et on prend la négation :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in A) \quad y > x.$$

Ce qui donne en français : "pour chaque réel, on peut trouver dans A un réel plus grand."

B- Démonstrations et quantificateurs

Le but de cette partie est de donner une aide pour les démonstrations où interviennent, de façon implicite ou explicite les quantificateurs. Il n'y a pas, heureusement pour les mathématiciens, de recette pour démontrer une propriété mathématique, mais on essaiera ici de donner un guide permettant presque toujours d'y voir plus clair en comprenant mieux ce qu'il y a à faire, en se construisant un plan raisonnable de démonstration.

Les interventions de formules quantifiées, explicites ou implicites, dans une démonstration se font (à l'exception de la démonstration par l'absurde) en utilisant les quatre règles suivantes :

- ♠ Pour *démontrer* une propriété universelle (du type $(\forall x \in E) P(x)$), on prend un x *quelconque* (c'est-à-dire que l'on ne suppose rien sur x), et on démontre que $P(x)$ est vraie. On exprimera dans la démonstration que l'on prend cet x en écrivant : "Soit $x \in E$ " ou "Prenons un x quelconque dans E " ...
- ♡ Pour *utiliser* une propriété ou une hypothèse universelle (du type $(\forall x \in E) P(x)$), on cherche un x *particulier* intéressant (quelquefois plusieurs), et on peut alors utiliser la propriété $P(x)$.
- ◇ Pour *démontrer* une propriété existentielle (du type $(\exists x \in E) P(x)$), on *construit* (on *trouve*, on *fabrique*,...) un x adapté et on démontre pour cet x la propriété $P(x)$.
- ♣ Pour *utiliser* une propriété ou une hypothèse existentielle (du type $(\exists x \in E) P(x)$), on prend un x ayant la propriété P . Cela se fait en écrivant "prenons x tel que $P(x)$ ", ou "prenons un x tel que $P(x)$ ", ou plus simplement "il existe x tel que $P(x)$ ". Dans cette dernière expression "il existe" signifie "il en existe et j'en prends un que je nomme x ", ce qui est tout à fait différent de la formule $\exists x P(x)$ où x est une variable muette. Une fois qu'on a pris cet x on peut utiliser la propriété $P(x)$.

III- Utilisation des symboles logiques dans la rédaction mathématique

A- Directives générales

Aucun signe logique n'est nécessaire à une bonne rédaction de démonstration. Mais écrire " $x = y$ " est tout de même plus simple que " x et y sont égaux, et permet d'alléger l'écriture et d'améliorer la clarté à condition de respecter un minimum de règles élémentaires :

A1) l'emploi des signes " \implies ", " \iff ", " \forall ", " \exists ", ... doit être strictement limité à des formules symboliques *complètes*, s'écrivant sauf cas exceptionnel en *une ligne* au maximum (de préférence isolée des autres) et ne comportant pas pas en principe des mots du vocabulaire ordinaire.

A2) Ces formules ne doivent en aucun cas être une indication de démonstration. Ainsi

$$2x + 3 = 5x - 6 \implies 3 + 6 = 5x - 2x \implies 9 = 3x \implies 3 = x$$

est inacceptable car " \implies " n'est pas synonyme de "j'en déduis".

Cependant ces formules seront efficacement utilisées pour :

- titrer une question en indiquant ce que l'on veut démontrer,
- rappeler brièvement une hypothèse ou une propriété déjà démontrée (quoiqu'elles ne soient pas forcément idéales dans ce cas), et surtout
- exprimer une conclusion partielle ou définitive.

B- Directives concernant l'utilisation de " \implies ", " \iff ", "**et**", "**ou**".

Ces signes, appelés *connecteurs binaires*, sont obligatoirement utilisés *entre deux formules*. Si les formules sont *très simples*, les parenthèses ne sont pas obligatoires, sinon il faut en mettre pour éviter toute ambiguïté. Le résultat est une nouvelle formule.

Exemple : Si x et y sont des nombres réels définis dans le texte précédent, on pourra écrire :

$$\begin{aligned} (x \geq 0 \text{ **et** } y \geq 0) &\implies x + y \geq 0 \\ xy = 0 &\iff (x = 0 \text{ **ou** } y = 0). \end{aligned}$$

Les expressions du type

$$A \implies B \implies C$$

sont à proscrire car elles n'ont aucun sens : les deux membres de chacun des " \implies " ne sont pas bien déterminés, et suivant la place des parenthèses que l'on peut mettre, la signification change, puisque l'on a

$$\text{non } (((A \implies B) \implies C) \iff (A \implies (B \implies C))).$$

C- Directives concernant l'emploi des quantificateurs

C1) " \forall " et " \exists " doivent être suivis *d'une seule lettre*, notation non encore définie dans le texte antérieur. Par exemple, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs, on écrira :

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \implies x_n > 0)$$

ou, en utilisant la notation abrégée

$$(\forall n \in \mathbb{N}) x_n > 0,$$

mais surtout pas

$$(\forall x_n) x_n > 0,$$

C2) Un “ $\forall x$ ”, ou un “ $\exists x$ ” doivent être suivis d’une sous formule *complète*, par exemple :

$$\begin{aligned} &(\forall x)(x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0) \\ &(\exists z \in \mathbb{C})(z^2 = -1) \end{aligned}$$

Remarque : le tel que que l’on dit après un “il existe” ne s’écrit pas dans les formules.

C3) “ \forall ” et “ \exists ”, suivis d’une lettre, définissent cette lettre comme notation pour la formule qui suit (dans $(\forall x)(x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0)$ le deuxième x est défini par le quantificateur), mais *pas pour la suite de la démonstration* :

Si A est un ensemble donné et si l’on a démontré “ $(\exists x)(x \in A)$ ”, “ x ” n’est pas une notation définie pour le reste du problème (puisque c’est une variable muette). Si on a besoin d’utiliser un élément de A , on en définira explicitement un par “Soit x un élément de A ” (on tolère dans ce cas l’abus de langage “Soit $x \in A$ ”, et dans le même ordre d’idée “Soit $\varepsilon > 0$ ” pour “Soit ε un entier strictement positif”).

C4) Toutes les notations utilisées dans une formule doivent être définies, soit par des quantificateurs placés avant dans la formule, soit dans le texte précédent (ou l’énoncé).

Remarque finale

On tolère en général un certain assouplissement des règles précédentes, en particulier l’utilisation *discrète* de mots. Par exemple :

- Si f est une application d’un ensemble X dans une ensemble Y , on pourra écrire :

$$(f \text{ injective}) \iff (\forall x \in X)(\forall x' \in X)(f(x) = f(x') \implies x = x')$$

- Si X, Y, Z sont des intervalles de \mathbb{R} , f une application de X dans Y , g une application de Y dans Z , et x_0 un élément de X , on pourra écrire :

$$((f \text{ continue en } x_0) \text{ et } (g \text{ continue en } f(x_0))) \implies g \circ f \text{ continue en } x_0.$$

Mais il ne faut pas écrire d’horreurs du genre :

“Puisque f et g sont continues $\implies \forall \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0, \exists \inf(\eta_1, \eta_2)$ tel que si $|x - x_0| < \eta \implies |f(x) = g(x) - (f + g)(x_0)| < \varepsilon \implies f + g$ positifs car η_1 et η_2 sont positifs,”
qui ont l’énorme avantage de réunir toutes les erreurs énoncées ci-dessus (A1,A2,B,C1,C2,C3,C4 que le lecteur pourra retrouver) et le (non moins énorme) désavantage de se rencontrer fréquemment dans certaines copies.

Bien entendu, le respect des règles pratiques exposées ci-dessus ne dispense pas du bon usage de la langue française (l’orthographe en particulier, sans parler de l’écriture !), non plus que de l’utilisation des artifices classiques de présentation tels que séparation des paragraphes, rappel des numéros de questions, mise en relief des conclusions ... dont l’emploi équilibré donne un texte plus clair et plus agréable.