Université de Mostaganem
Département de Mathématiques et Informatique
L$_3$ Maths

Année 2018-2019
Dimanche 17 Février 2019
Durée : 01h 30m

Rattrapage d'optimisation I

Exercice 1 (2pts + 2pts + 1pt + 1pt + 1pt). *Soit le problème d'optimisation*

$$\begin{cases} \min f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 26 \end{cases}$$

1. *Sur un plan orthonormé, tracer l'ensemble de contraintes.*
2. *Montrer que la fonction objectif et les contraintes sont convexes.*
3. *Tracer les lignes de niveaux de f sur la même figure.*
4. *Le point $x = (0,1)^T$ est-il optimal ? Justifier.*
5. *Résoudre géométriquement le problème.*

Exercice 2 (4pts). *Montrer que C est convexe si et seulement si*

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_i \in C \text{ et } \alpha_i \in [0,1] \text{ pour } i = 1,\ldots,k, \text{ avec } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Indication 3. *Utiliser la démonstration par récurrence.*

Exercice 4 (2pts + 4pts + 3pts). *On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T H x - x^T b,$$

avec $H = H^T, H > 0, H \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que le problème d'optimisation $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ admet une unique solution et la calculer.*
2. *Considérons l'algorithme itératif de descente à pas optimal suivant*

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$$

avec $d^k \in \mathbb{R}^n$ est une direction de descente telle que $d^k \neq 0_{\mathbb{R}^n}, < d^k, \nabla f(x^k) >< 0$ et α^k est donné par

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha > 0} f\left(x^k + \alpha d^k\right) \tag{1}$$

Justifier l'existence et l'unicité du pas optimal défini par (1) et donner son expression à chaque itération.

3. *Montrer que si $\nabla f(x^k) \neq 0$ alors la méthode de Newton est une méthode de descente à pas fixe pour le problème d'optimisation $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.*