

Travaux dirigée n : 1

**Exercice 0.1.** Soit  $X$  un espace topologique,

1. Montrer que tout boule ouverte de  $X$  est une partie ouverte de  $X$ .
2. Montrer que tout boule fermée de  $X$  est une partie fermée de  $X$ .
3. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille de parties ouvertes de  $X$ . Montrer que l'union des  $U_i$  est une partie ouverte de  $X$ .
4. Soit  $U_1, \dots, U_k$  une famille de parties ouvertes de  $X$ . Montrer que l'intersection  $\bigcap_{i=1}^k U_i$  est une partie ouverte de  $X$ .
5. Soit  $F_1, \dots, F_k$  une famille de parties fermées de  $X$ . Montrer que l'union  $\bigcup_{i=1}^k F_i$  est une partie fermée de  $X$ .
6. Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de parties fermées de  $X$ . Montrer que l'intersection des  $F_i$  est une partie fermée de  $X$ .
7. Soit  $X = \{(x, y) / x^2 + y^2 = r^2, r > 0\}$ , est ce que  $U_1 = X - \{(0, r)\}$  une partie ouverte de  $X$ .

**Exercice 0.2.** 1. Soit  $E = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, E\}$ .

- (a)  $(E, \mathcal{T})$  est-il séparé.
  - (b) Le sous-espace  $\{a, b, c\}$  est-il séparé.
  - (c) Le sous-espace  $\{a, b\}$  est-il séparé.
2. Montrer que  $\mathbb{R}$  muni de la topologie usuelle est séparé. En est-il de même du sous-espace  $\mathbb{Q}$ , du sous-espace  $\mathbb{Z}$ .

Travaux dirigée n : 2

**Exercice 0.1.** 1. On muni de  $\mathbb{R}$  la topologie usuelle et  $A = ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  muni de la topologie induite. Soient  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \tan x$ , et  $g : ]0, 1[ \rightarrow A$  définie par  $g(x) = \pi x - \frac{\pi}{2}$ .

(a) Montrer que  $f$  est un homéomorphisme.

(b) Montrer que  $g$  est un homéomorphisme.

(c) Montrer que  $\mathbb{R}$  et  $]0, 1[$  sont homéomorphes.

2. Sur  $E = \{0, 1, 2, 3\}$  soit  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, E\}$ .

Et soit  $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, E\}$ .

On considère  $f : (E, \mathcal{T}) \rightarrow (E, \mathcal{U})$ , tel que  $f(x) = I_E(x) = x$ .

(a) Montrer que  $f$  est continue.

(b) Montrer que  $f$  est bijective.

(c) Es ce que  $f$  est un homéomorphisme.

**Exercice 0.2.** On considère l'espace  $M(n, \mathbb{R})$  des matrices carrées  $n \times n$  à coefficients réels, on note  $I_n$  la matrice identité.

Soit  $f : M(n, \mathbb{R}) \times M(n, \mathbb{R}) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ ;  $f(X, Y) = XY$  l'application qui associe à deux matrices  $X$  et  $Y$  leur produit  $XY$  dans l'ordre (non commutatif).

1. Montrer que l'application  $f$  est bilinéaire.

2. Démontrer que  $f$  est différentiable et donner sa différentielle.

Travaux dirigée n : 3

**Exercice 0.1.** *Considérons les courbes :*

(a)

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (t, |t|)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (t^3 - 4t, t^2 - 4)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\varphi &: ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \left(\frac{1}{t}\cos(2\pi t), \frac{1}{t}\sin(2\pi t)\right)\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\varphi &: ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \left(\frac{1+t}{2t}\cos(2\pi t), \frac{1+t}{2t}\sin(2\pi t)\right)\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\varphi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \left(2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), 2\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

(1) *Est ce que l'application  $\varphi$  est une immersion dans (a) ? (respectivement dans (b), (d), (g)) ?*

(2) Est ce que l'application  $\varphi$  est un plongement dans (c) ? (respectivement dans (d), (g)) ?

(3) Est ce que l'application est un plongement régulier dans (c) ? (respectivement dans (e), (f)) ?

**Exercice 0.2.** (1) Montrer que l'ensemble des points  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2. ?

(2) Montrer que l'ensemble des points  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2. ?

**Exercice 0.3.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1.$$

(1) Montrer que  $f$  est un submersion. ?

(2) Montrer que l'ensemble des points  $f^{-1}(0)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2. ?

Travaux dirigée n : 3

**Exercice 0.1.** Soit  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$  le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ . On considère les parties  $U_1$  et  $U_2$  telle que

$$U_1 = S^1 - \{(0, 1)\} = \{(x, y) \in S^1 / y < a\}, \text{ telle que } 0 < a < 1.$$

$$U_2 = S^1 - \{(0, -1)\} = \{(x, y) \in S^1 / y > -a\}, \text{ telle que } 0 < a < 1.$$

et les applications

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow \frac{x}{1-y} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow \frac{x}{1+y} \end{aligned}$$

1. Montrer que  $(U_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, \varphi_2)$  sont des cartes de  $S^1$ .

2. Montrer que  $\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$  est un atlas différentiable de  $S^1$ .

**Exercice 0.2.** Soit  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$  le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ . On considère les parties  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  telle que

$$\Theta_1 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) / \theta \in ]0, 2\pi[ \} = S^1 - \{(1, 0)\}$$

$$\Theta_2 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) / \theta \in ]-\pi, \pi[ \} = S^1 - \{(-1, 0)\}$$

et les applications

$$\begin{aligned} \psi_1 : \Theta_1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\cos(\theta), \sin(\theta)) &\rightarrow \theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_2 : \Theta_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\cos(\theta), \sin(\theta)) &\rightarrow \theta \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\mathcal{A}' = \{(\Theta_1, \psi_1), (\Theta_2, \psi_2)\}$  est un atlas de  $S^1$ .

2. Est ce que  $\mathcal{A}'$  est équivalent à l'atlas  $\mathcal{A}$  de  $S^1$  donné dans exercice 1 ?

**Exercice 0.3.** Soit  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . On considère les parties  $U_1$  et  $U_2$  telle que

$$U_1 = S^2 - \{(0, 0, 1)\}$$

$$U_2 = S^2 - \{(0, 0, -1)\}$$

et les applications

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 : U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \end{aligned}$$

1. Montrer que  $(U_1, \varphi_1)$  et  $(U_2, \varphi_2)$  sont des cartes de  $S^2$ .

2. Montrer que  $\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$  est un atlas différentiable de  $S^2$ .