

Université de Mostaganem

Année universitaire 2019-2020

Faculté des Sciences Exactes et Informatique

3<sup>ème</sup> Année Licence Mathématiques

Matière: Mesure et Intégration

Crédits: 6

Coefficient: 4

Cinquième semestre - Unité d'enseignement: Fondamentale

## Programme

### Chapitre 2: Fonctions mesurables, variables aléatoires

- 1- Fonctions étagées.
- 2- Fonctions mesurables et variables aléatoires.
- 3- Caractérisation de la mesurabilité.
- 4- Convergence p.p et convergence en mesure.

## Chapitre 2: Fonctions mesurables, variables aléatoires

### 1 Fonctions étagées:

#### 1.1 Fonction caractéristique d'un ensemble:

Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ . On définit la fonction caractéristique de  $A$ , notée  $\mathbf{1}_A$ , par

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

elle est noté aussi  $\chi_A$ .

##### 1.1.1 Propriétés:

1) Si  $A, B$  deux parties de  $E$  disjointes, alors  $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ .

**Preuve.** Il est facile de voir que  $\mathbf{1}_{A \cup B} \neq \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$  si  $A \cap B \neq \emptyset$ . pour  $x \in A \cap B$ , on a  $\mathbf{1}_A(x) = 1$ ,  $\mathbf{1}_B(x) = 1$  et  $\mathbf{1}_{A \cup B}(x) = 1$ .

Supposons que  $A \cap B = \emptyset$ . Alors si  $x \in A \cup B$  on a soit ( $x \in A$  et donc  $x \notin B$ ) ou soit ( $x \in B$  et  $x \notin A$ ) ce qui implique que  $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ .

1. **Conséquence.** Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite deux à deux disjointes, alors

$$\mathbf{1}_{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}.$$

- si  $x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ , alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : x \notin A_n$$

$$\mathbf{1}_{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)}(x) = 0 \text{ et } \mathbf{1}_{A_n}(x) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ ceci donne } \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(x) = 0$$

- si  $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  alors  $x$  appartient à un seul  $A_n$  (la suite est deux à deux disjointes) donc

$$\mathbf{1}_{\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)}(x) = 1 \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_{A_n}(x) = 1$$

2.  $\forall x \in E : \mathbf{1}_E(x) = 1$  et  $\mathbf{1}_{\emptyset}(x) = 0$ .

3.  $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$ .

**Preuve.**

- si  $x \in A^c$ , alors  $\mathbf{1}_{A^c}(x) = 1$  en plus  $x \notin A \implies \mathbf{1}_A(x) = 0$
- si  $x \notin A^c$ , alors  $\mathbf{1}_{A^c}(x) = 0$  en plus  $x \in A \implies \mathbf{1}_A(x) = 1$

par conséquent  $\mathbf{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$ , pour tout  $x \in E$ .

**2 ème methode**  $E = A \cup A^C$  d'après 1. on a  $\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_{A \cup A^C} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A^C}$  (ici  $A \cap A^C = \emptyset$ ) et par 2. on a  $\mathbf{1}_E \equiv 1$ , d'où l'égalité.

4. Si  $A \subset B \subset E$ , alors  $\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$ .

Preuve.

- Soit  $x \in B \setminus A$ , donc  $\mathbf{1}_{B \setminus A}(x) = 1$  et  $\mathbf{1}_B(x) = 1$  et  $\mathbf{1}_A(x) = 0$
- Soit  $x \notin B \setminus A$ , il y a deux possibilité soit  $x \in A$  ou soit  $x \in B^c$ , dans le premier cas on trouve  $\mathbf{1}_{B \setminus A}(x) = 0$  et  $\mathbf{1}_B(x) = 1$  et  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  d'où  $\mathbf{1}_{B \setminus A}(x) = \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)$ .

Pour le deuxième cas, on trouve  $\mathbf{1}_{B \setminus A}(x) = 0$  et  $\mathbf{1}_B(x) = 0$  et  $\mathbf{1}_A(x) = 0$ . Par conséquent,  $\mathbf{1}_{B \setminus A}(x) = \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)$  pour tout  $x \in E$ .

**2 ème Méthode:** On a  $B \setminus A = B \cap A^C$  et  $\mathbf{1}_{(B \setminus A)^c} = 1 - \mathbf{1}_{B \setminus A}$  donc  $\mathbf{1}_{B^C \cup A} = 1 - \mathbf{1}_{B \setminus A}$ . Or  $B^C$  et  $A$  sont disjoints donc  $\mathbf{1}_{B^C \cup A} = \mathbf{1}_{B^C} + \mathbf{1}_A = 1 - \mathbf{1}_{B \setminus A}$  ce qui donne  $\mathbf{1}_{B \setminus A} = (1 - \mathbf{1}_{B^C}) - \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$ .

**3 ème Méthode:** On a  $B = A \cup (B \setminus A)$  et  $B \setminus A$  et  $A$  sont disjoints donc  $\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{B \setminus A}$  ce qui donne  $\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$ .

1. Pour  $A, B$  deux parties de  $E$ , on a  $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$ .

**Preuve.**

► Si  $x \in A \cap B$ , alors  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$ ,  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  et  $\mathbf{1}_B(x) = 1$  donc  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x) = 1$ .

► Si  $x \notin A \cap B$ , alors

$$x \in (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \implies (x \in A^c \text{ ou } x \in B^c).$$

ainsi  $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$ ,  $\mathbf{1}_A(x) = 0$  ou  $\mathbf{1}_B(x) = 0$  donc  $\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(x) = 0$ .

Ceci donne le résultat.

2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de parties de  $E$ , alors

$$\mathbf{1}_{\bigcup_n A_n} = \sup_n \mathbf{1}_{A_n} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\bigcap_n A_n} = \inf_n \mathbf{1}_{A_n}.$$

3. Si  $(A_n)_n$  est une suite de parties de  $E$  on a alors

$$\begin{aligned} a) \quad \mathbf{1}_{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n} &= \liminf_n \mathbf{1}_{A_n} \\ b) \quad \mathbf{1}_{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n}} &= \limsup_n \mathbf{1}_{A_n}. \end{aligned}$$

**Preuve.**

a) Soit  $x \in E$ . D'après 6. et la définition de la limite supérieure d'une suite d'ensemble, on a pour tout  $x \in E$

$$1_{\overline{\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n}}(x) = 1_{\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{n \geq m} A_n \right)}(x) = \inf_m 1_{\bigcup_{n \geq m} A_n}(x) = \inf_m \left( \sup_{n \geq m} 1_{A_n}(x) \right) = \limsup_n 1_{A_n}(x).$$

b) Soit  $x \in E$ ,

$$1_{\underline{\lim_{n \in \mathbb{N}} A_n}}(x) = 1_{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \left( \bigcap_{n \geq m} A_n \right)}(x) = \sup_m 1_{\bigcap_{n \geq m} A_n}(x) = \sup_m \left( \inf_{n \geq m} 1_{A_n}(x) \right) = \liminf_n 1_{A_n}(x)$$

## 1.2 Fonctions étagées

### Fonction caractéristique mesurable:

Soient  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable et  $A \subset E$ , on appelle fonction caractéristique mesurable  $\mathbf{1}_A$  si  $A$  est une partie mesurable c'est à dire  $A \in \mathcal{A}$ .

**Definition 1** Soient  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. On dit que  $f$  est étagée, si  $f$  est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques mesurables, c'est-à-dire s'il existe une famille finie  $(A_i)_{i=1..n} \subset \mathcal{A}$  et  $n$  réels  $a_1, \dots, a_n$  tels que

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 1_{A_i}$$

2. On dit que  $f$  est étagée positive si  $f$  est étagée et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ .

3. On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions étagées et  $\mathcal{E}_+$  l'ensemble des fonctions étagées positives.

### Remarque.

On dit autrement que  $f$  est étagée si l'image de  $E$  par  $f$  est un sous ensemble dénombrable fini c'est à dire

$$f(E) = \{b_1, \dots, b_n\}.$$

Posons pour tout  $i = \overline{1, n} : B_i = f^{-1}(\{b_i\})$  donc  $E = \bigcup_{i=1}^n B_i$  avec  $B_i \cap B_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ .

Dans ce cas, la fonction étagée  $f$  s'écrit canoniquement par

$$f = \sum_{i=1}^n b_i \cdot 1_{B_i}$$

où  $(B_i)_{i=1, \dots, n}$  est une partition de  $E$ .

### 1.2.1 Propriétés

Soit  $f, g$  deux fonctions étagées et  $\mu \in \mathbb{R}$ . Alors

$$f + \mu g, \quad f.g, \quad \sup(f, g), \quad \inf(f, g)$$

sont des fonctions étagées.

Par conséquent, l'ensemble des fonctions étagées  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ .

**Preuve.** On peut écrire canoniquement  $f$  et  $g$  par

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 1_{A_i} \text{ et } g = \sum_{j=1}^m b_j \cdot 1_{B_j}$$

où  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  et  $(B_j)_{j=1, \dots, m}$  sont deux partitions de  $E$ .

On a  $1_E = 1_{\cup B_j} = \sum_{j=1}^m 1_{B_j}$ , et  $1_E = 1_{\cup A_i} = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$  donc on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \cdot 1_{A_i} \cdot 1_{B_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \cdot 1_{A_i \cap B_j}.$$

et

$$g = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \cdot 1_{B_j} \cdot 1_{A_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \cdot 1_{A_i \cap B_j}.$$

par conséquent

$$\begin{aligned} f + \mu g &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + \mu b_j) \cdot 1_{A_i \cap B_j}, \\ f.g &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i \cdot b_j) 1_{A_i \cap B_j}. \\ \sup(f, g) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sup(a_i, b_j) 1_{A_i \cap B_j} \end{aligned}$$

et

$$\inf(f, g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \inf(a_i, b_j) 1_{A_i \cap B_j}.$$

**Exemple.** Posons  $E = \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in ]-\infty, -1] \\ -2 & \text{si } x \in ]-1, 1] \\ 3 & \text{si } x \in ]1, +\infty[ \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \in ]-\infty, -4] \\ -1 & \text{si } x \in ]-4, 0] \\ 1 & \text{si } x \in ]0, 3] \\ 4 & \text{si } x \in ]3, +\infty[ \end{cases}$$

## 2 Fonctions mesurables

**Definition 2** Soient  $(E, \mathcal{A})$ ,  $(F, \mathcal{B})$  deux espaces mesurables. Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est dite mesurable si pour tout  $B \in \mathcal{B}$  :

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Ceci implique que la tribu image réciproque  $f^{-1}(\mathcal{B})$  est incluse dans  $\mathcal{A}$ .

### Exemples.

1. Une fonction étagée est mesurable.

En effet pour tout fonction  $f \in \mathcal{E}$ , il existe une partition  $(A_i)_{i=1,n} \subset \mathcal{A}$  et  $(a_i)_{i=1,n} \subset \mathbb{R}$  tels que

$$f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$$

ce qui donne  $f(x) = a_i$  sur  $A_i$ . Donc pour tout  $B \in \mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . on a

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\} = \bigcup_{a_i \in B} A_i \subset \mathcal{A}$$

2. Soit  $(E, \mathcal{P}(E)), (F, \mathcal{P}(F))$  deux espaces mesurables, donc toute application  $f : E \rightarrow F$  est mesurable. car pour tout  $B \in \mathcal{P}(F)$ , on a  $f^{-1}(B) \subset E \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(E)$ .

3.  $(E, \mathcal{A}), (E, \mathcal{A}')$  deux espaces mesurables, donc l'identité sur  $E$

$$Id : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{A}')$$

est mesurable si et seulement si  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ .

Preuve.

► si  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ , alors pour tout  $B \in \mathcal{A}'$  on a  $(Id)^{-1}(B) = B \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ . Donc  $Id$  est mesurable.

► si  $Id$  est mesurable, alors pour tout  $B \in \mathcal{A}'$  on a  $(Id)^{-1}(B) = B \in \mathcal{A}$ . Ce qui implique que  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ .

4. L'application constante est mesurable.

**Remarque.** Une application peut être mesurable par rapport à une tribu et ne pas être pour l'autre, par exemple, l'application

$$Id : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

où

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ou } A^c \text{ dénombrable}\}$$

n'est pas dénombrable car pour tout borélien  $B$ , on a  $(Id)^{-1}(B) = B$ , si  $B = [0, 1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , mais  $[0, 1] \notin \mathcal{A}$ . on en déduit que  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{A}$ .

### 2.1 Variables aléatoires.

Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle toute fonction mesurable

$$X : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

i. e. pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  :

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

**Remarque.** Si  $X(E)$  est dénombrable, on dit que  $X$  est une variable aléatoire discrète. dans le cas où  $X(E) \subset \mathbb{N}$ , on dit que  $X$  est une variable aléatoire entière.

## 2.2 Tribu engendrée par une fonction mesurable.

La tribu image réciproque par une application mesurable  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est appelée tribu engendrée par une fonction mesurable. Si  $X$  est une variable aléatoire alors  $\mathcal{T} = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$  est une tribu engendrée par  $X$ .

## 2.3 Loi de probabilité d'une v. a et sa fonction de répartition.

Soient  $(E, \mathcal{A}, p)$  un espace probabilisé (c'est à dire  $(E, \mathcal{A}, p)$  est un espace mesuré et  $p(E) = 1$ ) et  $X$  une variable aléatoire.

► On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ , la probabilité  $P_X : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$  image de  $X^{-1}$  par  $p$ , c'est à dire, pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  :

$$P_X(A) = p(X^{-1}(A)).$$

► On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$ , la fonction de répartition de  $P_X$  c'est à dire

$$F_X(x) = P_X(X \leq x)$$

### Exemple.

Soient  $(E, \mathcal{A}, p)$  un espace probabilisé et  $X$  une variable aléatoire. On suppose qu'il existe  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  négligeable tel que pour tout  $x \in B^c : X(x) = 0$  (On dit que  $X = 0$  presque sure).

La loi de probabilité de  $X$  est : pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  on a

$$\begin{aligned} P_X(A) &= p(X^{-1}(A)) = p(\{x \in E : X(x) \in A\}) \\ &= p(\{x \in E : 0 \in A\}). \end{aligned}$$

si  $0 \in A$ , alors  $P_X(A) = p(E) = 1$ . si  $0 \notin A$ , alors  $P_X(A) = p(\emptyset) = 0$ .

Par conséquent  $P_X(A) = \delta_0(A)$  où  $\delta_0$  est la mesure de Dirac.

### Notation:

On note

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}(E, \mathcal{A}) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}\} \\ \mathcal{M}_+ &= \mathcal{M}_+(E, \mathcal{A}) = \{f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \text{ mesurable}\} \end{aligned}$$

## 3 Propriétés des fonctions mesurables

**Proposition 3**  $\mathcal{M}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , en plus pour tout  $f, g \in \mathcal{M}$  on a

$$f.g \in \mathcal{M}$$

**Preuve.** On ne peut pas utiliser directement la définition pour cela on a besoin aux critères de mesurabilité.

### 3.1 Critère de mesurabilité

Soient  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable, une fonction  $f : E \rightarrow F$  ( $F = \mathbb{R}$  ou  $\overline{\mathbb{R}}_+$ ) et  $\mathcal{C}$  une partie de  $\mathcal{P}(F)$  engendrant la tribu borélienne de  $F$ . Alors  $f$  est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{C}$$

**Preuve.** Soit  $\mathcal{C}$  un ensemble qui engendre  $B(F)$ , montrons que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est mesurable,
- (ii)  $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ , pour tout  $C \in \mathcal{C}$ .

On sait que  $f$  mesurable signifie simplement que pour tout  $B \in B(F)$  on a  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  donc le sens (i)  $\Rightarrow$  (ii) est immédiat car  $\mathcal{C} \subset B(F)$ .

Pour le sens inverse (ii)  $\Rightarrow$  (i), on remarque que  $\mathcal{B} = \{B \subset F : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$  est une tribu (voir l'exercice 7 de la fiche n°1), par l'hypothèse ii) il vient que  $\mathcal{B}$  contient  $\mathcal{C}$ , et donc contient  $\sigma(\mathcal{C}) = B(F) \subset \mathcal{B}$ . Ceci donne pour tout  $B \in B(F) \subset \mathcal{B}$  on a  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$  ceci montre que  $f$  est mesurable.

### 3.2 Cas particulier

1.  $f$  est mesurable si et seulement si pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avec  $\alpha < \beta$  on a

$$f^{-1}([\alpha, \beta]) \in \mathcal{A}.$$

2.  $f$  est mesurable si et seulement si pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a

$$f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{A}.$$

3.  $f$  est mesurable si et seulement si pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a

$$f^{-1}([\alpha, \infty]) \in \mathcal{A}.$$

### 3.3 Fonction borélienne

**Proposition 4** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes.

- Si  $f : (E; \mathcal{B}(E)) \rightarrow (F; \mathcal{B}(F))$  est continue, alors elle est mesurable.
- Dans ce cas on dit que  $f$  est borélienne.

**Preuve.**

#### 3.3.1 Propriétés des fonctions mesurables (la suite)

**Définition** Soient  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in E$ , on pose :

$$f_+(x) = \max(f(x); 0), \quad f_-(x) = \min(f(x); 0) \quad \text{et} \quad |f|(x) = |f(x)|$$

Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Proposition 5** Si  $f \in \mathcal{M}$ . On a alors  $f = f_+ - f_-$  et  $|f| = f_+ + f_-$  en plus  $f_+, f_-, |f|$  sont mesurables positives.

**Proposition 6**  $g \in \mathcal{M}_+$  si et seulement s'il existe une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$  telle que

- i) pour tout  $x \in E : g_n(x) \rightarrow g(x)$ , quand  $n \rightarrow \infty$
- ii)  $g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$  pour tout  $x \in E$  et tout  $n \in \mathbb{N}$

**Preuve.** en T.D

**Proposition 7** si  $f \in \mathcal{M}$ , alors il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$  telle que

pour tout  $x \in E : f_n(x) \rightarrow f(x)$ , quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Preuve.**

**Proposition 8** Soient  $f, g \in \mathcal{M}$  et  $a \in \mathbb{R}$ , alors les parties suivantes

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in E : f(x) = a\}, \quad B := \{x \in E : f(x) = g(x)\} \\ C &:= \{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \quad \text{et} \quad D := \{x \in E : f(x) > g(x)\} \end{aligned}$$

sont mesurable

**Preuve.** Puisque  $\{a\}, ]0, \infty[ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $f, f - g$  sont mesurables et

$$A := f^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{A}, \quad B := (f - g)^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad D := (f - g)^{-1}(]0, \infty[) \in \mathcal{A}$$

en plus  $C := B^c \in \mathcal{A}$  c'est une tribu stable par passage au complémentaire.

**Theorem 9** Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré complet, et  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications telles que

- i)  $f$  est mesurable.
- ii)  $f = g$  presque partout

alors  $g$  est mesurable.

**Preuve.** puisque  $f = g$  presque partout alors il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que

$$\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \subset A \text{ et } \mu(A) = 0.$$

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} g^{-1}([a, \infty[) &= g^{-1}([a, \infty[) \cap (A \cup A^c) \\ &= (g^{-1}([a, \infty[) \cap A) \cup (g^{-1}([a, \infty[) \cap A^c) \end{aligned}$$

sur  $A^c$  on a  $f = g$  donc

$$g^{-1}([a, \infty[) \cap A^c = f^{-1}([a, \infty[) \cap A^c \in \mathcal{A}.$$

D'autre part,  $(g^{-1}([a, \infty[) \cap A)$  est négligeable et comme l'espace  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace mesuré complet alors  $(g^{-1}([a, \infty[) \cap A) \in \mathcal{A}$ .

Par conséquent  $g^{-1}([a, \infty[) \in \mathcal{A}$  ce qui implique la mesurabilité de  $g$ .

## 4 Convergence p.p et convergence en mesure.

### 4.1 Convergence simple (cs)

**Definition 10** Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $E$  dans  $F$  ( $F = \mathbb{R}$  ou  $F = \overline{\mathbb{R}_+}$ , par exemple) et  $f$  une fonction de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f_n$  converge simplement vers  $f$ , et on écrit  $(f_n \rightarrow f)$  'si pour tout élément  $x$  de  $E$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$ . C'est à dire

♦  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$  si

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in E, \exists N_\epsilon(x) : \forall n \geq N_\epsilon(x) \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

### 4.2 Convergence uniforme (cu)

**Definition 11** Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $E$  dans  $F$  ( $F = \mathbb{R}$  ou  $F = \overline{\mathbb{R}_+}$ ) et  $f$  une fonction de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $E$ , et on écrit  $(f_n \rightarrow f \text{ c.u. })$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall x \in E, \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

### 4.3 Convergence presque partout (cpp.)

**Definition 12** Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $E$  dans  $F$  ( $F = \mathbb{R}$  ou  $F = \overline{\mathbb{R}_+}$ , par exemple) et  $f$  une fonction de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $f_n$  converge presque partout vers  $f$ , et on écrit  $(f_n \rightarrow f \text{ p.p.})$  s'il existe une partie  $A$  de  $E$ , négligeable, t.q., pour tout élément  $x$  de  $A^c$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$ .

**Remark 13** si les fonctions  $f_n$ , pour tout  $n$  et  $f$  sont mesurables alors  $f_n \rightarrow f$  p.p. si

$$\mu \left( \left\{ x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x) \right\} \right) = 0$$

**Example 14** Soient  $E = [0, 1]$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ ,  $\mu = \lambda$  (la mesure de Lebesgue) et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définie par  $f_n(x) = (-x)^n$  pour tout  $x \in [0, 1]$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ \text{n'existe pas} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

dans ce cas  $f_n$  converge presque partout vers la fonction nulle car

$$\lambda \left( \left\{ x \in [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 0 \right\} \right) = \lambda(\{1\}) = 0.$$

En langage probabiliste la définition précédente se traduit par:

#### 4.4 Convergence presque sûre (cps.)

**Definition 15** Soient  $(E, \mathcal{A}, p)$  un espace probabilisé,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle. On dit que  $X_n$  converge presque sûrement vers  $X$  et on écrit  $X_n \rightarrow X$  p.s. s'il existe une partie  $A$  de  $E$ , négligeable, t.q., pour tout élément  $x$  de  $A^c$ , la suite  $(X_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $X(x)$ .

#### 4.5 Convergence presque uniforme (cpu)

**Definition 16** Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  et  $f \in \mathcal{M}$ . On dit que  $f_n$  converge presque uniformément vers  $f$ , et on écrit  $f_n \rightarrow f$  p.u. si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $\mu(A) \leq \epsilon$  et  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A^c$ .

#### 4.6 Convergence en mesure (cm)

Soient  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$  et  $f \in \mathcal{M}$ . On dit que  $f_n$  converge en mesure vers  $f$  si :

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

Cette définition se traduit en langage probabiliste par:

#### 4.7 Convergence en probabilité (cp)

Soient  $(E, \mathcal{A}, p)$  un espace probabilisé,  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle. On dit que  $X_n$  converge en probabilité vers  $X$  si :

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} p(\{x \in E : |X_n(x) - X(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

**Remarques**

On a les implications suivantes :

► Convergence uniforme  $\implies$  convergence simple  $\implies$  convergence presque partout.  
 car si  $f_n$  converge simplement vers  $f$  alors  $\forall x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , donc

$$\left\{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\right\} = \emptyset$$

en suite

$$\mu\left(\left\{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

► Convergence uniforme  $\implies$  convergence presque uniforme  $\implies$  convergence presque partout.

► Convergence presque uniforme  $\implies$  convergence en mesure.

**Si la mesure est finie, on a**

► Convergence presque partout  $\implies$  convergence presque uniforme.

► Convergence presque partout  $\implies$  Convergence en mesure.

**Exemples**

1) Soit  $n$  un entier. On définit la fonction  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$  où  $[\cdot]$  désigne la partie entière. ( $[x]$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .)

a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x)$  converge vers  $x$ , quand  $n \rightarrow \infty$ .

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$0 \leq nx - [nx] < 1$$

donc  $0 \leq x - \frac{1}{n}[nx] < \frac{1}{n}$ , ce qui prouve que  $f_n(x)$  converge simplement vers  $f(x) = x$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

2) Soit  $E = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mu = \lambda$  la mesure de Lebesgue et  $f_n = 1_{[n, n+1]}$

$$\limsup f_n = 1_{\limsup [n, n+1]} = 0$$

la suite d'ensemble  $A_n = [n, n+1]$  est quelque donc

$$\limsup A_n = \bigcap_{m=0}^{+\infty} \left( \bigcup_{n=m}^{+\infty} [n, n+1] \right) = \bigcap_{m=0}^{+\infty} [m, +\infty[ = \emptyset$$

et

$$\liminf f_n = 1_{\liminf [n, n+1]} = 0$$

où

$$\liminf A_n = \bigcup_{m=0}^{+\infty} \left( \bigcap_{n=m}^{+\infty} [n, n+1] \right) = \bigcap_{m=0}^{+\infty} \emptyset = \emptyset$$

donc la suite  $f_n$  converge simplement vers 0 donc elle converge presque partout vers 0, car

$$\lambda\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 0\right\}\right) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq 1\}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \geq 1\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([n, n+1]) = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

donc la propriétés n'est pas vrai pour  $\epsilon = 1$ . ceci implique que  $f_n$  ne converge pas en mesure.

3. Soit  $E = [0, 1[$  muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue . Soit la suite  $(f_n)_n$  de fonctions définie par  $f_n = 1_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[}$ . La suite  $f_n \rightarrow 0$  en mesure, mais que  $(f_n)_n$  ne converge pas vers 0 presque partout.

En effet pour tout  $\epsilon > 0$  on a  $\{x \in [0, 1[: |f_n(x) - 0| \geq \epsilon\} \subset [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$  ainsi par monotonie de  $\lambda$  il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in [0, 1[: |f_n(x) - 0| \geq \epsilon\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

d'où la convergence en mesure.

**Fiche de TD n°2**

**Exercice 1** Soit  $(E, \mathcal{A})$ ,  $(F, \mathcal{B})$  et  $(G, \mathcal{C})$  trois espaces mesurables. Si  $f : E \rightarrow F$

et  $g : F \rightarrow G$  sont mesurables alors  $g \circ f$  est mesurable.

**Exercice 2** Soient  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable,  $(F, \tau_F)$  un espace topologique,  $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$  deux applications numériques mesurables. Montrer que Si  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (F, \tau_F)$  une application continue. Alors l'application

$$\begin{aligned} h : (E, \mathcal{A}) & \rightarrow (F, \tau_F) \\ x & \mapsto h(x) = \Phi(f_1(x); f_2(x)) \end{aligned}$$

est mesurable.

**Exercice 3** A toute fonction réelle  $f$ , on peut définir deux fonctions positives

$$f_+(x) = \sup(f(x); 0) \text{ et } f_-(x) = \sup(-f(x); 0).$$

Les parties positive et négative sont liées à la fonction initiale par les deux relation suivantes

$$f = f_+ - f_- \quad \text{et} \quad |f| = f_+ + f_-$$

Montrer que si  $f$  et  $g$  sont des applications numériques mesurables sur  $(E, \mathcal{A})$ , alors

$$f + g, \quad f \cdot g, \quad \sup(f; g), \quad \inf(f; g), \quad f_+, \quad f_- \quad \text{et} \quad |f|$$

sont des applications mesurables.

**Exercice 4** On définit, pour tout  $n \geq 1$ , la fonction étagée  $\varphi_n : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2^{-n} E(2^n \cdot x) & \text{si } 0 \leq x < n \\ n & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

où  $E(x)$  est la partie entière de  $x$ .

- 1) Montrer que  $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$  pour tout  $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$  et  $n \geq 1$ .
- 2) Soit  $f$  une application à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . On pose  $f_n = \varphi_n \circ f$ . vérifier que  $f_n$  est étagée et montrer que la suite  $(f_n)_n$  est croissante.
- 3) Montrer que pour  $n$  suffisamment grand on a

$$f(x) - 2^{-n} \leq f_n(x) \leq f(x)$$

- 4) Dédire que  $f_n \rightarrow f$  simplement.