



# Calcul matriciel, systèmes linéaires

## Sommaire

<b>I</b>	<b>Matrices à coefficients dans <math>K</math></b>	<b>3</b>
I.1	Généralités	3
I.2	Matrices particulières	3
I.3	Matrices carrées particulières	4
<b>II</b>	<b>Opérations sur les matrices</b>	<b>5</b>
II.1	L'espace vectoriel des matrices de type $(p,k)$	5
II.2	Produit des matrices	5
II.3	L'algèbre des matrices de type $(n,n)$	6
II.4	Calcul des puissances d'une matrice	7
II.5	Cas des matrices triangulaires ou diagonales	8
II.6	Transposition	8
II.7	Matrices symétriques ou antisymétriques	9
<b>III</b>	<b>Matrice d'une application linéaire</b>	<b>11</b>
III.1	Matrice d'une famille de vecteurs dans une base	11
III.2	Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases	11
III.3	Propriétés opératoires	13
<b>IV</b>	<b>Changements de bases</b>	<b>15</b>
IV.1	Matrices de passage	15
IV.2	Changements de matrice pour une application linéaire	15
IV.3	Matrices équivalentes et matrices semblables	16
<b>V</b>	<b>Trace d'une matrice, d'un endomorphisme</b>	<b>18</b>
V.1	Trace d'une matrice	18
V.2	Trace d'un endomorphisme	18
<b>VI</b>	<b>Opérations élémentaires, calcul du rang</b>	<b>20</b>
VI.1	Rang d'une famille de vecteurs	20
VI.2	Rang d'une application linéaire	20
VI.3	Rang d'une matrice	20
VI.4	Matrices échelonnées	21
VI.5	Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes	22
VI.6	Calcul du rang par la méthode du pivot	23
VI.7	Calcul de l'inverse par la méthode du pivot	24
<b>VII</b>	<b>Systèmes d'équations linéaires</b>	<b>26</b>
VII.1	Définitions	26
VII.2	Interprétations d'un système linéaire	26
VII.3	Structure de l'ensemble des solutions	28



VII.4 Systèmes de Cramer . . . . .	28
<b>VIII Résolution des systèmes linéaires . . . . .</b>	<b>30</b>
VIII.1 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système . . . . .	30
VIII.2 Méthode du pivot de Gauss . . . . .	30
VIII.3 Trois exemples . . . . .	33

---

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

# I Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

## I.1 Généralités

**Définition** (*matrices à coefficients dans  $\mathbb{K}$* )

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers strictement positifs.

Une *matrice*  $A$  de type  $(n, p)$  est une application de  $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$  dans  $\mathbb{K}$ .

On note souvent  $a_{i,j}$  l'image du couple  $(i, j)$  par l'application  $A$ .

Les  $a_{ij}$  sont appelés les *coefficients* de la matrice  $A$ .

On écrit alors  $A = (a_{i,j})_{i=1..n, j=1..p}$ , ou plus simplement  $A = (a_{ij})$ .

### Notations

- On note  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de type  $(n, p)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- Pour décrire un élément  $A$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , on dispose les coefficients dans un tableau à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, le coefficient  $a_{i,j}$  venant se placer à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne.
- Par exemple, la matrice  $A$  de type  $(3, 2)$  définie par :

$$a_{1,1} = 5, a_{1,2} = 3, a_{2,1} = 0, a_{2,2} = 7, a_{3,1} = 4 \text{ et } a_{3,2} = 1 \text{ se note } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Finalement, c'est ce tableau lui-même qu'on finit par appeler une matrice.

On dit donc qu'un élément  $M$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est une matrice à  $n$  lignes et à  $p$  colonnes.

## I.2 Matrices particulières

### – Matrice nulle

La *matrice nulle*  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est définie par :  $\forall (i, j), a_{i,j} = 0$ .

### – Matrices carrées

On appelle *matrice carrée* d'ordre  $n$  toute matrice de type  $(n, n)$ .

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

### – Diagonale d'une matrice carrée

Les coefficients  $a_{i,i}$  (l'indice de colonne est égal à l'indice de ligne) d'une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont appelés *coefficients diagonaux*.

Ils forment ce qu'on appelle la *diagonale* de  $A$ .

Les coefficients  $a_{i,j}$  tels que  $i > j$  sont donc *en dessous* de cette diagonale, alors que les coefficients  $a_{i,j}$  tels que  $j > i$  sont *au dessus* de celle-ci.

### – Matrices-ligne

Les éléments de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$  sont appelés *matrices-ligne*.

On peut identifier un élément  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$  de  $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$  avec le  $n$ -uplet correspondant  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  de  $\mathbb{K}^p$ .

### – Matrices-colonne

Les éléments de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  sont appelés *matrices-colonne*.

On identifie parfois une telle matrice-colonne avec un élément de  $\mathbb{K}^n$ .

## I.3 Matrices carrées particulières

### – Matrices diagonales

Une matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *diagonale* si pour tous indices distincts  $i$  et  $j$ ,  $a_{i,j} = 0$  : seuls sont éventuellement non nuls les éléments diagonaux de  $A$ .

### – Matrice identité

La *matrice identité d'ordre  $n$*  est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux  $a_{i,i}$  valent 1. Cette matrice est notée  $I_n$ .

On remarque que pour tous indices  $i$  et  $j$ ,  $a_{i,j} = \delta_{i,j}$  (notation de Kronecker).

### – Matrices scalaires

Les matrices de la forme  $A = \lambda I_n$ , c'est-à-dire les matrices diagonales dont tous les coefficients diagonaux sont égaux, sont dites *matrices scalaires*.

### – Matrices triangulaires

Une matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *triangulaire supérieure* si pour tous  $i$  et  $j$  tels que  $i > j$ , alors  $a_{i,j} = 0$ , c'est-à-dire si tous les coefficients en-dessous de la diagonale sont nuls.

La matrice  $A$  est dite *triangulaire inférieure* si pour tout  $i, j$  tel que  $i < j$  on a  $a_{i,j} = 0$ , c'est-à-dire si tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont nuls.

Par exemple  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.

### – Matrices strictement triangulaires

Une matrice carrée  $A$  est dite strictement triangulaire si elle est triangulaire et si de plus ses coefficients diagonaux sont nuls.

Par exemple  $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est strictement triangulaire supérieure.

## II Opérations sur les matrices

### II.1 L'espace vectoriel des matrices de type (p,k)

#### Définition

Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , et  $\lambda$  un scalaire.  
On définit les matrices  $C = A + B$  et  $D = \lambda A$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , de la manière suivante :  
Pour tous indices  $i$  et  $j$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  et  $d_{ij} = \lambda a_{ij}$ .

#### Propriétés

- $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est un groupe commutatif pour la loi  $+$ .  
L'élément neutre est la matrice nulle, notée  $0$ .  
L'opposée de la matrice  $A = (a_{ij})$  est la matrice  $-A = (-a_{ij})$ .
- $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de dimension  $np$ .  
Une base de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , dite *base canonique*, est formée par les  $np$  matrices  $E_{ij}$  (tous les coefficients de  $E_{ij}$  sont nuls sauf celui d'indice  $i, j$  qui vaut 1).  
Plus précisément, si  $M = (a_{ij})$ , alors  $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$ .

### II.2 Produit des matrices

#### Définition

Soient  $A = (a_{ik})$  une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{kj})$  une matrice de  $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ .  
On définit la matrice  $C = AB$ , élément de  $\mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K})$ , de la manière suivante :  
Pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ , pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, q\}$ ,  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$ .

#### Interprétation

Le terme de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne de  $C = AB$  est donc obtenu en sommant les produits des termes de même rang dans la  $i$ -ième ligne de  $A$  et dans la  $j$ -ième colonne de  $B$ , selon le schéma ci-dessous (on a représenté en gras les coefficients de  $A$  et de  $B$  utiles au calcul du coefficient  $c_{ij}$ ) :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ik}} & \dots & \mathbf{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & \dots & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & \mathbf{b_{kj}} & \dots & b_{kq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & \mathbf{b_{pj}} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

**Remarque**

On voit bien que le produit  $AB$  de deux matrices  $A$  et  $B$  n'est possible que si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ .

On obtient alors une matrice ayant autant de lignes que  $A$  et autant de colonnes que  $B$ .

On peut donc résumer en écrivant :

$$[\text{matrice de type } (n, p)] \times [\text{matrice de type } (p, q)] \Rightarrow [\text{matrice de type } (n, q)].$$

**Propriétés du produit**

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices à coefficients dans  $\mathbb{K}$  :

- Si les produits  $AB$  et  $AC$  sont possibles, on a :  $A(B + C) = AB + AC$ .
- Si les produits  $AC$  et  $BC$  sont possibles, on a :  $(A + B)C = AC + BC$ .
- Si les produits  $AB$  et  $BC$  sont possibles, on a :  $A(BC) = (AB)C$ .

**Remarques**

- Les produits  $AB$  et  $BA$  ne sont simultanément possibles que si  $A$  est de type  $(n, p)$  et  $B$  de type  $(p, n)$ . Alors  $AB$  est carrée d'ordre  $n$ , tandis que  $BA$  est carrée d'ordre  $p$ .

Si  $n \neq p$ , les matrices  $AB$  et  $BA$ , de formats différents, ne sauraient être égales.

Si  $A$  et  $B$  sont toutes deux carrées d'ordre  $n$ , alors  $AB$  et  $BA$  sont carrées d'ordre  $n$ , mais on a en général  $AB \neq BA$ . Dans le cas contraire, on dit que  $A$  et  $B$  *commutent*.

- L'addition des matrices est une loi de composition interne sur  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , mais le produit n'est pas une loi sur  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  sauf si  $n = p$ .

**II.3 L'algèbre des matrices de type (n,n)****Proposition**

- ||  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$  est une algèbre sur  $\mathbb{K}$ , non commutative si  $n \geq 2$ .
- || Le neutre multiplicatif est la matrice identité  $I_n$ .

**Remarque importante**

Si  $n \geq 2$ , l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  contient des *diviseurs de zéro*.

L'égalité  $AB = 0$  n'implique donc pas  $A = 0$  ou  $B = 0$ .

De même, les égalités  $AB = AC$  ou  $BA = CA$  n'impliquent pas nécessairement  $B = C$ .

**Proposition (Matrices inversibles)**

- || L'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un groupe pour la loi produit, appelé *groupe linéaire* d'indice  $n$ , et noté  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ .

**Remarques**

- Bien que le produit dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ne soit pas commutatif, l'une des deux égalités  $AB = I_n$  ou  $BA = I_n$  implique l'autre, et donc  $B = A^{-1}$ .
- Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
Alors  $A$  est inversible  $\Leftrightarrow A$  est simplifiable  $\Leftrightarrow A$  n'est pas un diviseur de 0.
- Si  $A$  et  $B$  sont inversibles dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on peut utiliser la formule du binôme  $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p C_p^k A^k B^{p-k}$ , mais à condition que les matrices  $A$  et  $B$  commutent !  
Les matrices scalaires  $\lambda I_n$  commutent avec toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**II.4 Calcul des puissances d'une matrice****– Utilisation de la formule du binôme**

Pour calculer  $A^n$ , il est parfois possible d'écrire  $A = B + C$ , et d'utiliser la formule du binôme, à condition que  $B$  et  $C$  commutent, et que le calcul des puissances de  $B$  et  $C$  soit facile.

Cas fréquent :  $B$  est une matrice scalaire et  $C$  est nilpotente (telle que  $C^m = 0$ ).

On écrira alors, pour tout  $p$  :  $A^p = \sum_{k=0}^p C_p^k C^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^p C_p^k \lambda^{p-k} C^k = \sum_{k=0}^{m-1} C_p^k \lambda^{p-k} C^k$ .

**– Utilisation d'une récurrence**

Il arrive que les coefficients des premières puissances de  $A$  satisfassent à une formule simple. Il reste à établir si cette formule est vraie pour toutes les puissances de  $A$ , à l'aide d'une récurrence.

**– Utilisation d'un polynôme annulateur**

Supposons par exemple qu'une matrice  $A$  vérifie  $A^3 - 4A^2 + 5A - I = 0$  (1)

On exprime cette situation en disant que  $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 1$  est un *polynôme annulateur* de  $A$ , l'égalité précédente s'écrivant  $P(A) = 0$ .

(1) s'écrit  $A(A^2 - 4A + 5I) = I$  et prouve que  $A$  est inversible avec  $A^{-1} = A^2 - 4A + 5I$ .

(1) prouve l'existence de suites  $(\alpha_n)$ ,  $(\beta_n)$ , et  $(\gamma_n)$  telles que,  $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$  (par récurrence, ou bien en utilisant la division euclidienne  $X^n = Q_n P + R_n$  et en écrivant  $A^n = Q_n(A)P(A) + R_n(A) = R_n(A)$ , avec  $\deg(R_n) \leq 2$ .)

**– Résolution d'un système**

Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et  $X, Y$  deux matrices colonnes inconnues de hauteur  $n$ .

Si le système  $AX = Y$  possède une solution unique  $X$  en fonction de  $Y$ , alors on peut dire que  $A$  est inversible.

La solution doit s'exprimer sous la forme  $X = BY$ , ce qui donne  $B = A^{-1}$ .

### – Exposants négatifs

Supposons qu'on ait trouvé une formule donnant  $A^n = \varphi(n)$  en fonction de l'entier  $n \geq 0$ .

On peut chercher à prouver que cette formule est encore valable pour les exposants négatifs, à condition que  $A$  soit inversible.

Il suffit alors de prouver que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\varphi(n)\varphi(-n) = I_n$ .

## II.5 Cas des matrices triangulaires ou diagonales

### Proposition

Toute matrice  $A$  triangulaire supérieure est inversible  $\Leftrightarrow$  ses coefficients diagonaux  $a_{ii}$  sont non nuls.

$A^{-1}$  est alors triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses des  $a_{ii}$ .

(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

### Proposition

Soit  $A$  une matrice triangulaire supérieure.

Alors pour tout entier naturel  $k$  (et pour tout entier relatif  $k$  si  $A$  est inversible)  $A^k$  est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les  $a_{ii}^k$ .

(idem si on remplace *triangulaire supérieure* par *triangulaire inférieure* ou par *diagonale*.)

### Proposition

Toute matrice  $A$  strictement triangulaire est nilpotente.

Plus précisément, si  $A$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $A^n = 0$ .

### Remarques

- Une matrice nilpotente, n'est pas nécessairement strictement triangulaire.

Par exemple la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  vérifie  $A^2 = 0$ .

- Si une matrice carrée  $A$  d'ordre  $n$  est nilpotente, on est certain que  $A^n = 0$ .

Inversement si  $A$  est carrée d'ordre  $n$  et si  $A^n \neq 0$ , toutes ses puissances sont non nulles.

## II.6 Transposition

### Définition

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . On appelle *transposée* de  $A$  et on note  ${}^tA$  la matrice  $B$  de  $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$  dont le terme général est  $b_{ij} = a_{ji}$ .

**Exemple :** Si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  alors  ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ .



### Propriétés

- La transposition est un isomorphisme de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ .  

$$\begin{cases} \forall (A, B) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^t A + \mu {}^t B \\ \forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), {}^{tt} A = A \end{cases}$$
- Si on se restreint à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la transposition est donc un automorphisme involutif.
- $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^t B {}^t A$  (Attention à l'ordre!)
- Si  $A$  est une matrice carrée inversible, alors  ${}^t A$  est inversible et  $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ .
- Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et tout entier naturel  $k$ , on a :  ${}^t(A^k) = ({}^t A)^k$ .  
 Si  $A$  est inversible, cette égalité est valable pour tout entier relatif  $k$ .

## II.7 Matrices symétriques ou antisymétriques

### Définition

- Une matrice  $A = (a_{ij})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *symétrique* si  ${}^t A = A$ .  
 Cela équivaut à dire que pour tous indices  $i$  et  $j$ ,  $a_{ji} = a_{ij}$ .  
 Autrement dit  $A$  est symétrique par rapport à sa diagonale.

### Définition

- Une matrice  $A = (a_{ij})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite *antisymétrique* si  ${}^t A = -A$ .  
 Cela équivaut à dire que pour tous indices  $i$  et  $j$ ,  $a_{ji} = -a_{ij}$ .  
 Cela implique en particulier que les coefficients diagonaux de  $A$  sont nuls.

### Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ est symétrique. } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 0 & 7 \\ -6 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix} \text{ est antisymétrique.}$$

### Propriétés

- Si  $A$  est inversible et symétrique alors  $A^{-1}$  est symétrique.  
 Si  $A$  est inversible et antisymétrique alors  $A^{-1}$  est antisymétrique.
- Si  $A$  est symétrique alors, pour tout entier naturel  $k$ ,  $A^k$  est symétrique.  
 Si  $A$  est inversible, cette propriété est valable pour tout entier relatif  $k$ .
- Si  $A$  est antisymétrique, ses puissances paires sont symétriques et ses puissances impaires sont antisymétriques.

**Notation**

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont symétriques.

On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont antisymétriques.

**Proposition**

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  sont deux sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

La dimension de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  est  $\frac{1}{2}n(n+1)$  et celle de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  est  $\frac{1}{2}n(n-1)$ .

Toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  s'écrit donc de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique  $S$  et d'une matrice antisymétrique  $A$ .

$S$  et  $A$  sont respectivement données par :  $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$  et  $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ .

### III Matrice d'une application linéaire

#### III.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

##### Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de  $\dim n \geq 1$ , muni d'une base  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Soit  $(v) = v_1, v_2, \dots, v_p$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ .

Pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $p$ , posons  $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ .

Soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  de terme général  $a_{ij}$ .

$A$  est appelée matrice de la famille  $(v)$  dans la base  $(e)$ .

##### Interprétation et exemple

Avec ces notations, la  $j$ -ième colonne de  $A$  est formée des composantes de  $v$  dans  $(e)$ .

Supposons par exemple que  $(e) = e_1, e_2, e_3$  soit une base de  $E$  (donc  $\dim(E) = 3$ ).

Supposons également que les vecteurs  $v_1, v_2$  soient donnés par :

$$\begin{cases} v_1 = 3e_1 + 5e_2 + e_3 \\ v_2 = 2e_1 + 4e_2 + 7e_3 \end{cases}$$

Alors la matrice de  $(v) = v_1, v_2$  dans la base  $(e)$  est  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

##### Notation dans un cas particulier

Dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie, muni d'une base  $(e)$ , on notera  $[u]_e$  la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur  $u$  de  $E$  dans la base  $(e)$ .

#### III.2 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

##### Définition

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

On suppose que  $\dim(E) = p \geq 1$ , et que  $E$  est muni d'une base  $(e) = e_1, e_2, \dots, e_p$ .

On suppose que  $\dim(F) = n \geq 1$ , et que  $F$  est muni d'une base  $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

On appelle matrice de  $f$  dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$  la matrice  $A$  de la famille des vecteurs  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$  dans la base  $(\varepsilon)$ .

Cette matrice, élément de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , est notée  $\mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$ .

##### Interprétation et exemple

Pour tout indice  $j$  de  $\{1, \dots, p\}$ , la  $j$ -ième colonne de  $A = \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$  est formée des composantes du vecteur  $f(e_j)$  dans la base  $(\varepsilon)$ .

Supposons qu'une base de  $E$  soit  $(e) = e_1, e_2, e_3$ , et qu'une base de  $F$  soit  $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2$ .

Soit  $f$  l'application linéaire de  $E$  dans  $F$  définie par 
$$\begin{cases} f(e_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \\ f(e_2) = 7\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 \\ f(e_3) = 3\varepsilon_1 \end{cases}$$

Alors la matrice de  $f$  dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

### Cas particulier : Matrice d'un endomorphisme dans une base

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , où  $\dim(E) = n \geq 1$ . Si on munit  $E$  de la même base  $(e)$  au départ et à l'arrivée on parle de la matrice de  $f$  dans la base  $(e)$ .

Cette matrice, carrée d'ordre  $n$ , sera notée  $\mathcal{M}(f, (e))$ .

### Proposition (Interprétation matricielle de l'égalité $v = f(u)$ )

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

$E$  est muni d'une base  $(e) = e_1, \dots, e_p$  et  $F$  est muni d'une base  $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , de matrice  $A$  dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$ .

Pour tout  $u$  de  $E$ , l'égalité vectorielle  $v = f(u)$  équivaut à l'égalité matricielle  $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$ .

### Remarque

Réciproquement, si une application  $f : E \rightarrow F$  est telle qu'il existe une matrice  $A$  telle que pour tout vecteur  $u$  de  $E$ ,  $[f(u)]_\varepsilon = A[u]_e$ , alors  $f$  est linéaire et  $A = \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon))$ .

### Exemples

Avec l'exemple précédent, si  $(x', y')$  sont les coordonnées dans  $(\varepsilon)$  de  $v = f(u)$ , le vecteur  $u$  ayant lui-même pour coordonnées  $(x, y, z)$  dans  $(e)$ , on a les équivalences suivantes :

$$v = f(u) \Leftrightarrow [v]_\varepsilon = A[u]_e \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 7y + 3z \\ y' = 2x + 5y \end{cases}$$

Réciproquement, soit  $g$  l'application qui envoie tout vecteur  $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$  sur le vecteur

$$v = x'\varepsilon_1 + y'\varepsilon_2 \text{ avec } \begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = 9x + 8y + 7z \end{cases}$$

Alors  $g$  est linéaire et sa matrice dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$  est  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Cela signifie par exemple que  $g(e_1) = \varepsilon_1 + 9\varepsilon_2$ .

### Remarques

– Une application linéaire est déterminée par sa matrice dans un couple de bases donné.

En supposant toujours que  $\dim(E) = p \geq 1$  et  $\dim(F) = n \geq 1$ , l'application de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  qui à une application linéaire  $f$  associe sa matrice dans un couple de bases donné est donc une bijection.

- Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .  
Quand on change de base dans  $E$  ou dans  $F$ , la matrice de  $f$  est en général modifiée.  
On analysera plus loin cette dépendance en fonction du couple de bases.
- Cas particulier : la matrice de l'application nulle de  $E$  dans  $F$  est la matrice nulle, et ceci quelque soit le couple de bases.
- La matrice de  $\text{Id}_E$  dans une base  $(e)$  de  $E$  est la matrice identité, quelque soit la base  $(e)$ .  
Mais attention, la matrice de  $\text{Id}_E$  n'est pas la matrice identité si on utilise une certaine base *au départ* et une autre base *à l'arrivée*.
- A toute application linéaire  $f$  de  $E$  (de dimension  $p \geq 1$ ) vers  $F$  (de dimension  $n \geq 1$ ) correspond une matrice unique de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  dans un couple de bases donné.  
Inversement,  $A$  dans  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  peut représenter une infinité d'applications linéaires :
  - On a en effet le choix des espaces  $E$  (de dimension  $p$ ) et  $F$  (de dimension  $n$ ).
  - On a ensuite le choix d'une base de  $E$  et d'une base de  $F$ .
 Si rien n'est imposé, on prend  $E = \mathbb{K}^p$  et  $F = \mathbb{K}^n$ , munis de leur base canonique.

### III.3 Propriétés opératoires

#### Proposition (Matrice de $\lambda f + \mu g$ )

On suppose que  $\dim(E) = p \geq 1$  et que  $\dim(F) = n \geq 1$ .  
L'application de  $\mathcal{L}(E, F)$  dans  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  qui à  $f$  associe sa matrice dans un couple de bases est linéaire (c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels) :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

$$\mathcal{M}(\alpha f + \beta g, (e), (\varepsilon)) = \alpha \mathcal{M}(f, (e), (\varepsilon)) + \beta \mathcal{M}(g, (e), (\varepsilon)).$$

#### Proposition (Matrice de la composée $g \circ f$ )

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie, munis des bases  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ , et  $(\gamma)$ .  
Soit  $f : E \rightarrow F$ , linéaire, de matrice  $A$  dans les bases  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ .  
Soit  $g : F \rightarrow G$ , linéaire, de matrice  $B$  dans les bases  $(\beta)$  et  $(\gamma)$ .  
Alors la matrice de  $g \circ f$ , dans les bases  $(\alpha)$  et  $(\gamma)$ , est  $BA$ .  
Autrement dit :  $\mathcal{M}(g \circ f, (\alpha), (\gamma)) = \mathcal{M}(g, (\beta), (\gamma)) \times \mathcal{M}(f, (\alpha), (\beta))$ .

#### Proposition (Matrice de $f^{-1}$ )

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension  $n \geq 1$ .  
On suppose que  $E$  est muni de la base  $(e)$ , et que  $F$  est muni de la base  $(\varepsilon)$ .  
Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ , de matrice  $A$  dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$ .  
 $f$  est un isomorphisme  $\Leftrightarrow A$  est inversible.  
La matrice de  $f^{-1}$  dans les bases  $(\varepsilon)$  et  $(e)$  est alors  $A^{-1}$ .

**Proposition** (*Matrice de  $f^n$* )

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e)$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , de matrice  $A$  dans la base  $(e)$ .

Pour tout entier naturel  $k$ , la matrice de  $f^k$  dans la base  $(e)$  est  $A^k$ .

Cette propriété s'étend aux exposants  $k$  négatifs si  $f$  est un automorphisme de  $E$ , c'est-à-dire si  $A$  est inversible.

**Remarque** (*Matrice d'une application nilpotente*)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e)$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , de matrice  $A$  dans la base  $(e)$ .

Alors  $f$  est nilpotente  $\Leftrightarrow A$  est nilpotente.

Si  $f$  est nilpotente, il existe même une base  $(\varepsilon)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est strictement triangulaire supérieure.

## IV Changements de bases

### IV.1 Matrices de passage

**Proposition** (*Inversibilité de la matrice d'une famille de vecteurs*)

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni d'une base  $(e)$ .  
 Soit  $v$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  (autant donc que la dimension de  $E$ ).  
 Soit  $A$  la matrice de la famille  $(v)$  dans la base  $(e)$ . C'est un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
 Alors la famille  $(v)$  est une base de  $E \Leftrightarrow$  la matrice  $A$  est inversible.

**Définition**

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni de deux bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$ .  
 La matrice de la famille  $(\varepsilon)$  dans la base  $(e)$  est appelée *matrice de passage* de la base  $(e)$  à la base  $(\varepsilon)$ , et notée  $P_e^\varepsilon$ . D'après ce qui précède, cette matrice est inversible.

#### Deux interprétations d'une matrice de passage

Avec les notations précédentes, la matrice de passage de  $(e)$  à  $(\varepsilon)$  est :

- La matrice de l'identité, de  $E$  muni de  $(\varepsilon)$  vers  $E$  muni de  $(e)$  :  $P_e^\varepsilon = \mathcal{M}(\text{Id}_E, (\varepsilon), (e))$ .
- La matrice dans  $(e)$  de l'automorphisme  $f$  défini par :  $\forall j \in \{1, \dots, n\}, f(e_j) = \varepsilon_j$ , c'est-à-dire qui transforme la base  $(e)$  en la base  $(\varepsilon)$ .

**Conséquences**

- L'inverse de la matrice de passage  $P_e^\varepsilon$  est la matrice de passage  $P_\varepsilon^e$  de  $(\varepsilon)$  à  $(e)$ .
- Si  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\gamma)$  sont trois bases de  $E$ , alors on a la relation :  $P_\alpha^\gamma = P_\alpha^\beta P_\beta^\gamma$ .

### IV.2 Changements de matrice pour une application linéaire

**Proposition** (*Matrices de passage et coordonnées*)

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , muni de deux bases  $(e)$  et  $(e')$ .  
 Soit  $P$  la matrice de passage de  $(e)$  à  $(e')$ . Pour tout  $u$  de  $E$  :  $[u]_{e'} = P [u]_e$   
 Interprétation : la matrice de passage de l'ancienne base  $(e)$  à la nouvelle base  $(e')$  donne les anciennes coordonnées de  $u$  en fonction des nouvelles.

**Proposition** (*Changement de base pour une application linéaire*)

- Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ , de dimensions respectives  $p \geq 1$  et  $n \geq 1$ .  
 On suppose que  $E$  est muni d'une ancienne base  $(e)$  et d'une nouvelle base  $(e')$ .  
 De même soient  $(\varepsilon)$  l'ancienne base de  $F$  et  $(\varepsilon')$  la nouvelle base de  $F$ .  
 Soit  $P$  la matrice de passage de  $(e)$  à  $(e')$ . Soit  $Q$  la matrice de passage de  $(\varepsilon)$  à  $(\varepsilon')$ .  
 Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .  
 Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans les bases  $(e)$  et  $(\varepsilon)$  (ancienne matrice).  
 Soit  $B$  la matrice de  $f$  dans les bases  $(e')$  et  $(\varepsilon')$  (nouvelle matrice).  
 Alors on a l'égalité :  $B = Q^{-1} A P$ .

### Conséquence dans un cas particulier

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , de dimension  $n \geq 1$ .

Soient  $(e)$  l'ancienne base de  $E$  et  $(e')$  la nouvelle base de  $E$ .

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , de matrice  $A$  dans  $(e)$  et de matrice  $B$  dans  $(e')$ .

Soit  $P$  la matrice de passage de  $(e)$  à  $(e')$ . Alors on a l'égalité :  $B = P^{-1} A P$ .

## IV.3 Matrices équivalentes et matrices semblables

### Définition (Matrices équivalentes)

Deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  sont dites *équivalentes* s'il existe une matrice inversible  $Q$  d'ordre  $n$  et une matrice inversible  $P$  d'ordre  $p$  telles que :  $B = QAP$ .

### Définition (Matrices semblables)

Deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible  $P$  d'ordre  $n$  telle que :  $B = P^{-1}AP$ .

### Remarques

- Deux matrices semblables sont équivalentes (choisir  $Q = P^{-1}$ ), et la réciproque est fausse.
- Dans  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  la relation “ $A$  est équivalente à  $B$ ” est une relation ... d'équivalence :
  - Toute matrice  $A$  est équivalente à elle-même (réflexivité.)
  - Si  $A$  est équivalente à  $B$ , alors  $B$  est équivalente à  $A$  (symétrie.)
  - ( $A$  équivalente à  $B$  et  $B$  équivalente à  $C$ )  $\Rightarrow$   $A$  équivalente à  $C$  (transitivité.)
- De même, “ $A$  est semblable à  $B$ ” définit une relation d'équivalence dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Si  $B = P^{-1}AP$ , alors pour tout entier naturel  $n$  on a :  $B^n = P^{-1}A^nP$ .

Cette relation s'étend aux exposants négatifs si  $A$  et donc  $B$  sont inversibles.

On peut donc calculer  $B^n$  si  $A^n$  est plus facile à obtenir, notamment si  $A$  est diagonale.

### Proposition

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $f : E \rightarrow F$ , dans deux couples de bases.  
 Alors les matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes.  
 Réciproquement toute matrice équivalente à  $A$  (donc à  $B$ ) est la matrice de  $f$  dans un certain couple de bases.

### Interprétation

Deux matrices  $A, B$  sont équivalentes  $\Leftrightarrow$  elles peuvent représenter une même application linéaire  $f : E \rightarrow F$ , chacune dans un couple de bases de  $E$  et  $F$ .

### Proposition

Soient  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans une base  $(\alpha)$  de  $E$ .  
 Soit  $B$  la matrice de  $f$  dans une base  $(\beta)$  de  $E$ . Alors  $A$  et  $B$  sont semblables.  
 Réciproquement, soit  $C$  une matrice semblable à  $A$  (donc à  $B$ ). Alors il existe une base  $(\gamma)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $C$ .





### Interprétation

Deux matrices  $A$  et  $B$ , carrées d'ordre  $n$ , sont semblables  $\Leftrightarrow$  elles peuvent représenter un même endomorphisme  $f$  de  $E$ , avec  $\dim(E) = n$ , chacune dans une certaine base de  $E$ .

## V Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

### V.1 Trace d'une matrice

#### Définition

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , de terme général  $a_{ij}$ .

On appelle *trace* de  $A$ , et on note  $\text{tr}(A)$ , la somme des coefficients diagonaux de  $A$ .

Autrement dit,  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

#### Propriétés et remarques

- L'application "trace" est une *forme linéaire* sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire une application linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$ .

Ainsi pour toutes matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et pour tous scalaires  $\alpha, \beta$  :

$$\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr}(A) + \beta \text{tr}(B).$$

- Soient  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $B$  une matrice de  $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ .

La matrice  $AB$  est donc carrée d'ordre  $n$ , tandis que  $BA$  est carrée d'ordre  $p$ .

Dans ces conditions,  $AB$  et  $BA$  ont la même trace :  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

- L'égalité  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  est vraie en particulier pour toutes matrices  $A, B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On ne doit pas généraliser abusivement à des produits de plus de deux matrices.

Par exemple, il n'y a aucune raison pour qu'on ait l'égalité  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CBA)$ .

En revanche, on peut écrire  $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA)$ .

- Deux matrices semblables ont la même trace. Plus précisément, si  $A, P$  appartiennent à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et si  $P$  est inversible, alors  $B = P^{-1}AP$  et  $B$  a la même trace que  $A$ .

En effet :  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}((P^{-1}A)P) = \text{tr}(P(P^{-1}A)) = \text{tr}(A)$ .

Pour reprendre la remarque précédente on n'écrira pas :  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(P^{-1}PA) = \text{tr}(A)$  !

### V.2 Trace d'un endomorphisme

#### Définition

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

On appelle *trace* de  $f$  et on note  $\text{tr}(f)$  la trace de la matrice de  $f$  dans une base quelconque de l'espace vectoriel  $E$ .



### Propriétés et exemples

- Compte tenu de la dernière remarque du paragraphe précédent, la trace de  $f$  ne dépend pas de la base ( $e$ ) choisie dans  $E$  pour représenter matriciellement  $f$ .
- Si  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $E$ , on a :  $\text{tr}(g \circ f) = \text{tr}(f \circ g)$ .
- Si  $p$  est la projection de  $E$  sur un sous-espace  $F$  de dimension  $r$ , alors  $\text{tr}(p) = \text{rg}(p) = r$ .  
Pour s'en persuader, il suffit de choisir un supplémentaire  $G$  de  $F$  dans  $E$  et de se placer dans une base adaptée à la somme directe  $E = F \oplus G$ . La matrice de  $p$  dans cette base est diagonale, les  $r$  premiers coefficients diagonaux valant 1 et les  $n - r$  derniers valant 0.

- On considère un espace vectoriel euclidien orienté  $E$  de dimension 3.

Soit  $r$  la rotation vectorielle d'angle  $\theta$  autour d'un vecteur  $w$ .

Alors la trace de  $r$  est  $1 + 2 \cos \theta$ .

Il suffit en effet de se placer dans une base orthonormée directe  $u, v, w$ .

La matrice de  $r$  dans cette base est  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 1 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\text{tr}(A) = 1 + 2 \cos \theta$ .

Si on connaît la matrice  $B$  de  $r$  dans une base quelconque (même non orthonormée), on peut donc en écrivant  $\text{tr}(B) = 1 + 2 \cos \theta$  trouver rapidement le cosinus de l'angle de la rotation  $r$  (pour pouvoir calculer son sinus il faut orienter l'axe de la rotation).

## VI Opérations élémentaires, calcul du rang

### VI.1 Rang d'une famille de vecteurs

#### Définition

|| Soit  $(u) = u_1, u_2, \dots, u_p$  une famille de  $p$  vecteurs d'un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ .  
|| On appelle *rang* de la famille  $(u)$  la dimension du sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par cette famille :  $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}\{u_1, u_2, \dots, u_p\})$ .

#### Remarques

- On a  $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq p$ , avec égalité  $\Leftrightarrow$  la famille  $(u)$  est libre.
- Si  $\dim(E) = n$ , alors  $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_p) \leq n$ , avec égalité  $\Leftrightarrow$  la famille  $(u)$  engendre  $E$ .

### VI.2 Rang d'une application linéaire

#### Définition

|| Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . On suppose que  $E$  est de dimension finie.  
|| On appelle *rang* de  $f$  la dimension du sous-espace  $\text{Im}(f)$  de  $F$ . On le note  $\text{rg}(f)$ .

#### Remarques

- Le théorème du rang s'écrit :  $\dim(E) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f))$ .
- On a  $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$  avec égalité  $\Leftrightarrow$  l'application  $f$  est injective.
- Si  $F$  est de dimension finie, on a  $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$  avec égalité  $\Leftrightarrow f$  est surjective.
- Les notions de rang d'une application linéaire et de rang d'une famille de vecteurs se rejoignent. Pour toute base  $e_1, e_2, \dots, e_p$  de  $E$ ,  $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_p))$ .

### VI.3 Rang d'une matrice

#### Définition (*Rang d'une matrice*)

|| Soit  $A$  une matrice, élément de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .  
|| On appelle *rang* de  $A$ , et on note  $\text{rg}(A)$ , le rang de la famille des  $p$  vecteurs-colonne de  $A$ , considérés comme éléments de  $\mathbb{K}^n$ .

#### Remarques

- $\text{rg}(A)$  est nul  $\Leftrightarrow A$  est la matrice nulle.
- $\text{rg}(A)$  est égal à 1  $\Leftrightarrow$  les différentes colonnes de  $A$  sont proportionnelles deux à deux, l'une d'elles au moins n'étant pas nulle.
- Le rang de la matrice  $A$  est égal au rang de toute application linéaire susceptible d'être représentée par  $A$ .

## VI.4 Matrices échelonnées

### Définition

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

On note  $L_1, \dots, L_n$  les lignes successives de  $A$ .

Pour chaque ligne  $L_i$  de  $A$ , soit  $d(i)$  le plus petit indice  $j$ , s'il existe, tel que  $a_{ij} \neq 0$ .

On dit que  $A$  est *échelonnée* supérieurement s'il existe un entier  $r$  de  $\{0, \dots, n\}$  tel que :

- Pour tout indice  $i$  inférieur ou égal à  $r$ , la ligne  $L_i$  est non nulle.
- Pour tout indice  $i$  strictement supérieur à  $r$ , la ligne  $L_i$  est nulle.
- La suite  $d(1), d(2), \dots, d(r)$  est strictement croissante.

Une telle matrice est de rang  $r$ .

Les  $r$  coefficients non nuls situés aux positions  $(i, d(i))$  sont appelés les *pivots* de  $A$ .

### Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{9} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est échelonnée, avec quatre pivots : } \text{rg}(A) = 4.$$

### Proposition

Soient  $n, p, r$  trois entiers tels que  $1 \leq r \leq \min(n, p)$ .

On note  $J_r(n, p)$  la matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , de coefficients  $a_{ij}$ , définie par :

- Pour tout indice  $i$  compris entre 1 et  $r$ ,  $a_{ii} = 1$ .
- Les autres coefficients de  $J_r(n, p)$  sont nuls.

### Exemples

Les matrices  $J_r(n, p)$  sont bien sûr des cas particuliers de matrices échelonnées.

$$\text{Par exemple, dans } \mathcal{M}_{4,5}(\mathbb{K}) : J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Proposition

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  est de rang  $r \Leftrightarrow$  elle est équivalente à la matrice  $J_r(n, p)$ .

### Proposition

Deux matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  sont équivalentes  $\Leftrightarrow$  elles ont le même rang.

### Proposition

Le rang d'une matrice  $A$  est égal au rang de la matrice transposée  ${}^t A$ .

**Conséquence et conclusion**

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ .

Le rang de  $A$  est inférieur ou égal au minimum de  $n$  et de  $p$ .

Il est égal au nombre maximum de colonnes libres dans  $A$ .

Il est aussi égal au nombre maximum de lignes libres dans  $A$ .

**VI.5 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes****Définition** (*Opérations élémentaires sur les vecteurs d'une famille*)

Soit  $(v) = v_1, v_2, \dots, v_n$  une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{K}^p$ . On appelle *opération élémentaire* sur les vecteurs de cette famille l'une des opérations suivantes :

- Multiplier un des vecteurs de la famille par un scalaire non nul.
- Ajouter à l'un des vecteurs un multiple d'un autre vecteur de la famille.
- Echanger deux vecteurs de la famille.

**Proposition**

Soit  $(v')$  la famille de vecteurs obtenue en appliquant une opération élémentaire à  $(v)$ .

Les deux familles  $(v)$  et  $(v')$  ont le même rang.

**Remarque**

On ne modifie donc pas le rang d'une famille de vecteurs en lui appliquant une succession d'opérations élémentaires.

Il en est ainsi quand on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

**Définition** (*Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice*)

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ . Notons  $L_1, L_2, \dots, L_n$  les lignes de  $A$ .

On appelle opération élémentaire sur les lignes de  $A$  l'une des opérations suivantes :

- Multiplier une ligne  $L_i$  par un scalaire non nul  $\alpha$ .  
Cette opération est notée :  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ .
- Ajouter à l'une des lignes  $L_i$  un multiple d'une autre ligne  $L_j$ .  
Cette opération est notée :  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ .
- Echanger deux lignes  $L_i$  et  $L_j$ .  
Cette opération est notée :  $L_i \leftrightarrow L_j$ .



### Remarques

- On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice  $A$ .  
Ces opérations sont notées :  $C_i \leftarrow \alpha C_i$ ,  $C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$ , et  $C_i \leftrightarrow C_j$ .
- Toute opération élémentaire (ou toute suite d'opérations élémentaires) transforme une matrice  $A$  en une matrice de même rang.
- Dans toute opération  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ , il est absolument indispensable que  $\alpha$  soit non nul.  
On veillera notamment au cas où  $\alpha$  dépend d'un paramètre : pour les valeurs de celui-ci qui annuleraient  $\alpha$ , l'opération se traduit par  $L_i \leftarrow 0$  et modifie en général le rang de  $A$ .
- On note souvent  $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$  la composée de  $L_i \leftarrow \alpha L_i$  puis de  $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ .  
Ici il est nécessaire que  $\alpha$  soit non nul !

### Proposition (*Interprétation par des produits matriciels*)

Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , transformée en une matrice  $B$  par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

Alors il existe une matrice inversible  $P$  telle que  $B = PA$ .

De même si  $C$  est obtenue à partir de  $A$  par une ou plusieurs opérations élémentaires sur les colonnes, alors il existe une matrice inversible  $Q$  telle que  $B = AQ$ .

### Interprétation

On peut interpréter ces résultats en disant que :

- Toute opération élémentaire sur les *lignes* équivaut à une multiplication à *gauche* par une matrice inversible.
- Toute opération élémentaire sur les *colonnes* équivaut à une multiplication à *droite* par une matrice inversible.

## VI.6 Calcul du rang par la méthode du pivot

Le calcul du rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire peut toujours se ramener au calcul du rang d'une matrice.

### Proposition

On peut transformer une matrice quelconque  $A$  en une matrice échelonnée  $B$ , par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes de  $A$ .

### Conséquence

Les opérations élémentaires ne modifiant pas le rang de la matrice initiale, on peut ainsi calculer le rang de  $A$  : c'est celui de la matrice échelonnée finale, c'est-à-dire le nombre de ses pivots non nuls.

### Exemple de calcul du rang d'une matrice

On veut calculer le rang de la matrice  $A$  ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & 14 & 21 & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -32 \\ 0 & -4 & -17 & -26 & -23 \\ 0 & -2 & 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 4L_4 - L_2 \end{array} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -32 \\ 0 & 0 & 18 & 28 & 14 \\ 0 & 0 & -36 & -56 & -28 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & \boxed{-8} & -16 & -24 & -32 \\ 0 & 0 & \boxed{18} & 28 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La matrice initiale  $A$  est donc de rang 3.

## VI.7 Calcul de l'inverse par la méthode du pivot

### Proposition

La matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible  $\Leftrightarrow$  il est possible, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, de passer de  $A$  à  $I_n$ .  
La même suite d'opérations, dans le même ordre, permet de passer de  $I_n$  à  $A^{-1}$ .

### Principe de la méthode

Soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont on veut calculer l'inverse.

On place  $A$  et  $I_n$  côte à côte dans un tableau à  $n$  lignes et  $2n$  colonnes.

On procède ensuite à une succession d'opérations élémentaires sur les lignes de ce tableau, de manière à transformer  $A$  (la partie gauche du tableau) en  $I_n$ .

Le tableau  $(A \mid I_n)$  est alors transformé en  $(I_n \mid A^{-1})$ .

### Dans la pratique

$$\text{On part du tableau } (A \mid I_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Supposons que le coefficient  $a_{11}$  soit non nul.

Si ce n'est pas le cas, on commence par échanger la ligne  $L_1$  avec une ligne  $L_i$  telle que  $a_{i1} \neq 0$  : il y a nécessairement au moins un coefficient non nul sur la première colonne du tableau sinon  $A$  ne serait pas inversible.





- On applique les opérations élémentaires :  $L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1$ , pour  $i = 2, \dots, n$ .

Dans cette succession d'opérations, le coefficient non nul  $a_{11}$  est appelé le *pivot*.

Le tableau se présente alors sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & \vdots & b_{2p} & -a_{21} & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{np} & -a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On poursuit alors avec le coefficient  $b_{22}$  qui permet d'annuler tous les coefficients de la deuxième colonne (sauf lui-même).

Là encore si  $b_{22} = 0$ , on commence par échanger  $L_2$  avec l'une des lignes  $L_i$  ( $i \geq 3$ ).

- On continue ainsi jusqu'à obtenir à la place de  $A$  une matrice diagonale.

On termine en divisant chaque ligne par le coefficient diagonal obtenu.

A la place qu'occupait  $I_n$  se trouve maintenant  $A^{-1}$ .

- Il n'est pas utile (au contraire) de rendre égaux à 1 les coefficients diagonaux de la moitié gauche du tableau avant que d'y avoir obtenu une matrice diagonale.

Cela a en effet souvent pour conséquence d'introduire des coefficients fractionnaires difficiles à manipuler : puisqu'on demande souvent d'inverser des matrices à coefficients entiers, autant garder les coefficients entiers le plus longtemps possible !

## VII Systèmes d'équations linéaires

Dans cette partie,  $\mathbb{K}$  désigne un corps. En principe  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### VII.1 Définitions

- On appelle *système linéaire* de  $n$  équations, à  $p$  inconnues et à coefficients dans  $\mathbb{K}$  tout système d'équations de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- Les  $a_{ij}$  sont appelés les *coefficients du système*.  
La matrice  $A = (a_{ij})$ , élément de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , est appelée *matrice du système*.  
Le rang de  $A$  est appelé le *rang du système*.  
Les coefficients  $b_1, \dots, b_n$  sont les *seconds membres*.
- La système (S) est dit *triangulaire* (ou “en escaliers”, ou “en cascades”) si la matrice  $A$  est triangulaire.  
Il est dit *carré* si  $n = p$ . La matrice  $A$  est alors un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
Un système carré est dit *de Cramer* si sa matrice  $A$  est inversible.
- On dit que l'élément  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de  $\mathbb{K}^p$  est le  $p$ -uplet des *inconnues* du système.  
On dit que  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  est une *solution* du système si les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_p$  satisfont à chacune des égalités figurant dans (S).
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire peut être vide ou non vide. S'il est non vide, on verra qu'il est soit réduit à un seul élément de  $\mathbb{K}^p$ , soit infini.  
Deux systèmes linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.
- Un système linéaire est dit *homogène* si ses seconds membres  $b_i$  sont nuls.  
A un système (S) on *associe* un système homogène (H) en annulant les seconds membres.  
Un système homogène possède au moins la solution  $(0, 0, \dots, 0)$  dite *solution triviale*.

### VII.2 Interprétations d'un système linéaire

On reprend le système (S) défini au paragraphe précédent.

- Interprétation matricielle**

Soit  $A = (a_{ij})$ , élément de  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ , la matrice du système (S).

Soient  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  (seconds membres) et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  (inconnues).

$$(S) \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire } AX = B.$$

Le système homogène (H) associé à (S) s'écrit :  $AX = 0$ .

Si  $A$  est carrée inversible (système de Cramer), (S) a une solution unique  $X = A^{-1}B$ .

### – Interprétation en termes d'applications linéaires

Soit  $f$  l'application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  vers  $\mathbb{K}^n$ , de matrice  $A$  dans les bases canoniques.

Soient  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  et  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Le système (S) équivaut alors à l'égalité vectorielle  $f(x) = b$ .

Résoudre (S), c'est donc chercher l'image réciproque du vecteur  $b$  de  $\mathbb{K}^n$  par l'application linéaire  $f$ .

Le système (S) admet au moins une solution si et seulement si  $b$  est dans l'image de  $f$ .

Le système homogène associé (H) équivaut à  $f(x) = \vec{0}$ .

Résoudre (H), c'est donc trouver  $\text{Ker } f$ .

### – Interprétation en termes de combinaisons linéaires

Pour tout  $j$  de  $\{1, \dots, p\}$ , notons  $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$  le  $j$ -ième vecteur colonne de  $A$ .

Soit  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  le vecteur colonne des seconds membres.

$$\text{Le système (S) s'écrit : } x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + x_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} + \dots + x_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire  $x_1 C_1 + \dots + x_j C_j + \dots + x_p C_p = B$ .

Résoudre le système (S), c'est trouver toutes les manières d'écrire, dans  $\mathbb{K}^n$ , la colonne  $B$  comme combinaison linéaire des colonnes  $C_1, C_2, \dots, C_p$ .

Le système (S) admet au moins une solution si et seulement si  $B$  est dans le sous-espace engendré par les colonnes  $C_1, C_2, \dots, C_p$ .

Résoudre (H), c'est trouver tous les  $p$ -uplets  $(x_1, \dots, x_p)$  tels que  $\sum_{k=1}^p x_k C_k = \vec{0}$ .

Le système (H) possède d'autres solutions que la solution triviale si et seulement si les vecteurs-colonne  $C_1, C_2, \dots, C_p$  sont liés.

### VII.3 Structure de l'ensemble des solutions

#### – Solutions du système homogène

Utilisons l'interprétation de (S) en termes d'applications linéaires.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  est solution du système homogène associé (H) si et seulement si  $f(x) = \vec{0}$  c'est-à-dire si et seulement si  $x$  est élément de  $\text{Ker}(f)$ .

Or  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^p$  de dimension  $p - \text{rg}(f)$ , où  $\text{rg}(f)$  est le rang de l'application linéaire  $f$  c'est-à-dire le rang de la matrice  $A$ .

On peut donc énoncer :

*L'ensemble des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension  $p - \text{rg}(A)$ .*

#### – Solutions du système (S)

Supposons que (S) possède au moins une solution  $x_0$ . Soit  $x$  un vecteur de  $\mathbb{K}^p$ .

$x$  est une solution de (S)  $\Leftrightarrow f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = \vec{0}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $x - x_0$  est solution de (H), ou encore  $\Leftrightarrow x$  peut s'écrire  $x = x_0 + h$  où  $h$  est une solution quelconque de (H).

On peut donc énoncer : *L'ensemble des solutions de (S), s'il n'est pas vide, s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (S) la solution générale de (H).*

#### Remarques

- Le système (S) possède *au moins* une solution (autrement dit il existe au moins un  $x$  de  $\mathbb{K}^p$  tel que  $f(x) = b$ )  $\Leftrightarrow b$  appartient à  $\text{Im } f$ .  
Cela dépend bien sûr de  $b$ , mais si  $f$  est surjective (c'est-à-dire si la matrice du système est de rang  $n$ ), alors (S) possède au moins une solution quelque soit le second membre.
- Si  $f$  est injective, c'est-à-dire si le rang de  $A$  est égal à  $p$ , alors le système (S) possède *au plus* une solution quelque soit le second membre  $b$ . Le système homogène (H), quant à lui possède alors uniquement la solution triviale.
- Si l'ensemble des solutions de (S) est non vide, il est soit réduit à un seul élément (cas où  $f$  est bijective), soit infini si  $\dim \text{Ker } f > 0$ .

### VII.4 Systèmes de Cramer

#### – Retour au trois interprétations possibles de (S)

Rappelons qu'un système carré (S) est dit *de Cramer* si sa matrice est inversible, et qu'un tel système possède une solution unique.

En termes d'applications linéaires, (S) s'écrit  $f(x) = b$  et équivaut à  $x = f^{-1}(b)$ .

Avec l'interprétation matricielle :  $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ .

En termes de combinaisons linéaires, l'unique solution  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de (S) est le  $p$ -uplet des coordonnées de  $B$  (colonne des seconds membres) dans la base de  $\mathbb{K}^n$  formée par les colonnes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  de la matrice  $A$ .

### – Systèmes de Cramer triangulaires

On sait qu'une matrice  $A$  triangulaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible  $\Leftrightarrow$  ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Un système de Cramer triangulaire se présentera donc sous l'une des deux formes suivantes avec dans chaque cas  $a_{ii} \neq 0$  pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$  :

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1j} x_j + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{22} x_2 + \dots + a_{2j} x_j + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n-1,n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n = b_{n-1} \\ a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

ou

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11} x_1 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nj} x_j + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

Dans le premier cas, l'unique solution  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  s'obtient en écrivant successivement :

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, & x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}} [b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n], \\ \text{Et plus généralement, une fois connus } x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1} : \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - a_{i,i+1} x_{i+1} - \dots - a_{ij} x_j - \dots - a_{in} x_n] \end{cases}$$

Dans le second cas, on trouve  $x_1$ , puis  $x_2, x_3, \dots, x_n$  :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, & x_2 = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21} x_1], \\ \text{Et plus généralement, une fois connus } x_1, x_2, \dots, x_{i-1} : \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - a_{i1} x_1 - \dots - a_{ij} x_j - \dots - a_{i,i-1} x_{i-1}] \end{cases}$$

Le cas le plus simple est évidemment celui où la matrice du système est diagonale, car il suffit d'écrire, pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$  :  $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$ .

## VIII Résolution des systèmes linéaires

### VIII.1 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

#### Définition

Soit (S) un système linéaire de  $n$  équations, à  $p$  inconnues et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Notons  $E_1, E_2, \dots, E_n$  les équations successives de (S).

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes de (S) l'une des opérations suivantes :

- Multiplier une équation  $E_i$  par un scalaire *non nul*  $\alpha$ .  
Cette opération est notée :  $E_i \leftarrow \alpha E_i$ .
- Ajouter à l'une des équations  $E_i$  un multiple d'une autre équation  $E_j$ .  
Cette opération est notée :  $E_i \leftarrow E_i + \beta E_j$ .
- Echanger deux équations  $E_i$  et  $E_j$  : cette opération est notée :  $E_i \leftrightarrow E_j$ .

#### Proposition

Une opération élémentaire sur les lignes de (S) transforme le système (S) en un système  $(\Sigma)$  équivalent, c'est-à-dire ayant exactement les mêmes solutions que (S).

#### Remarque

On peut enrichir la panoplie des opérations élémentaires des opérations suivantes :

- Remplacer l'équation  $E_i$  par  $\alpha E_i + \beta E_j$ , avec  $\alpha \neq 0$  et  $j \neq i$ .  
Il s'agit en fait de la composée des deux opérations  $E_i \leftarrow \alpha E_i$  puis  $E_i \leftarrow E_i + \beta E_j$ .
- Ajouter à l'équation  $E_i$  une combinaison linéaire des autres équations du système.  
Une telle opération peut s'écrire  $E_i \leftarrow E_i + \sum_{j \neq i} \beta_j E_j$ .
- On peut supprimer de (S) toute équation  $E_i$  qui serait combinaison linéaire des autres équations du système.  
En effet si  $E_i = \sum_{j \neq i} \beta_j E_j$ , l'opération  $E_i \leftarrow E_i - \sum_{j \neq i} \beta_j E_j$  remplace  $E_i$  par l'équation  $0 = 0$ , qui peut bien sûr être éliminée du système (S).
- Même si c'est moins fréquent, on peut adjoindre au système (S) une nouvelle équation obtenue par combinaison linéaire des équations initiales.  
On peut interpréter cette modification de (S) en disant qu'on adjoint à (S) la nouvelle équation  $0 = 0$  (on ne modifie pas l'ensemble des solutions) puis qu'on ajoute à celle-ci une combinaison linéaire des équations initiales.

### VIII.2 Méthode du pivot de Gauss

#### – Principe de la méthode

Par une suite d'opérations élémentaires, on transforme le système (S) en un système ( $\Sigma$ ) équivalent et dont la matrice est échelonnée supérieurement. La résolution de ( $\Sigma$ ) nous donne alors les solutions de (S).

### – Mise en œuvre de la méthode

Considérons le système :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Supposons dans un premier temps que  $a_{11}$  est non nul.

On effectue alors les opérations élémentaires suivantes, où  $a_{11}$  est le *pivot*, pour annuler les coefficients de  $x_1$  dans les équations  $E_2, E_3, \dots, E_n$  :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \quad \begin{aligned} E_2 &\leftarrow a_{11}E_2 - a_{21}E_1 \\ &\vdots \\ E_i &\leftarrow a_{11}E_i - a_{i1}E_1 \\ &\vdots \\ E_n &\leftarrow a_{11}E_n - a_{n1}E_1 \end{aligned}$$

Ce qui conduit à un système ( $S'$ ) s'écrivant :

$$(S') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2j}x_j + \cdots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{i2}x_2 + \cdots + a'_{ij}x_j + \cdots + a'_{ip}x_p = b'_i \\ \vdots \\ a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nj}x_j + \cdots + a'_{np}x_p = b'_n \end{cases}$$

Supposons maintenant que le pivot  $a'_{22}$  soit non nul.

Les opérations élémentaires  $E_i \leftarrow a'_{22}E_i - a'_{i2}E_2$  (avec  $3 \leq i \leq n$ ) conduisent à :

$$(S'') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3p}x_p = b''_3 \\ \vdots \\ a''_{n3}x_3 + \cdots + a''_{np}x_p = b''_n \end{cases}$$

On poursuit ainsi la mise sous forme échelonnée de la matrice du système.

A un moment donné, il est possible qu'un pivot soit nul : on échange alors l'équation concernée avec l'une des équations suivantes de manière à obtenir un pivot non nul.

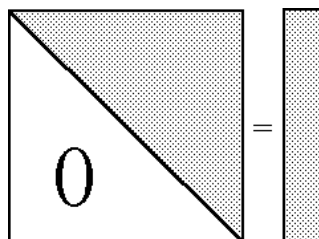
Il est également possible que tous les pivots potentiels pour passer à l'étape suivante soient nuls. C'est le cas dans le système ( $S''$ ) par exemple, si tous les coefficients  $a''_{33}, a''_{43}, \dots, a''_{n3}$

sont nuls : dans cette situation particulière, on s'intéressera au coefficient  $a''_{34}$  (s'il est non nul) ou à défaut aux coefficients  $a_{44}, \dots, a_{n4}$  etc.

### – Forme finale du système

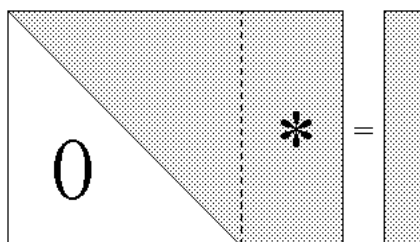
A la fin de la méthode, (S) a été transformé en un système échelonné supérieurement ( $\Sigma$ ), et qui peut se présenter sous trois formes suivantes, dont voici les représentations symboliques.

**Premier cas.** Le système ( $\Sigma$ ) s'écrit :



Dans cette représentation symbolique, on voit bien la diagonale des pivots non nuls. Le cas évoqué ici est donc celui d'un système de Cramer, ramené à une forme triangulaire supérieure, qu'on résout "en cascades", ce qui donne la solution unique de (S).

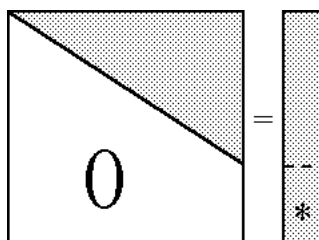
**Deuxième cas.** Le système ( $\Sigma$ ) s'écrit :



Il y a ici des inconnues en surnombre (c'est la zone marquée du symbole \*). Ces inconnues excédentaires (ou *non principales*) sont alors reportées au second membre, où elles jouent le rôle de paramètres arbitraires.

On résout le système par rapport aux inconnues *principales*. C'est alors un système de Cramer, dont l'unique solution s'exprime en fonction des inconnues non principales. La présence de ces valeurs arbitraires fait que (S) possède une infinité de solutions.

**Troisième cas.** Le système ( $\Sigma$ ) s'écrit :



Ici il y a des équations en surnombre, dites *non principales*. Leurs premiers membres sont nuls. Tout dépend alors de leurs seconds membres (c'est la zone marquée d'un \*) :



- Si l'un d'eux est non nul, alors  $(\Sigma)$  et donc  $(S)$  n'ont pas de solution.
- Si tous ces seconds membres sont nuls,  $(\Sigma)$  se réduit à ses équations *principales*, qui forment un système de Cramer.  $(S)$  admet donc une solution unique, obtenue en résolvant ce système "en cascades".

### VIII.3 Trois exemples

– (1) Résoudre le système  $(S)$  :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases}$$

$$(S) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ 2x + 3y + 4z + t = 12 \\ 3x + 4y + z + 2t = 13 \\ 4x + y + 2z + 3t = 14 \end{cases} \quad \begin{array}{l} E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1 \\ E_4 \leftarrow E_4 - 4E_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ -y - 2z - 7t = -10 \\ -2y - 8z - 10t = -20 \\ -7y - 10z - 13t = -30 \end{cases} \quad \begin{array}{l} E_3 \leftarrow E_3 - 2E_2 \\ E_4 \leftarrow E_4 - 7E_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ -y - 2z - 7t = -10 \\ -4z + 4t = 0 \\ 4z + 36t = 40 \end{cases} \quad E_4 \leftarrow E_4 + E_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 11 \\ -y - 2z - 7t = -10 \\ -4z + 4t = 0 \\ 40t = 40 \end{cases}$$

D'où on tire :

$$\begin{cases} t = 1 \\ z = t = 1 \\ y = -2z - 7t + 10 = 1 \\ x = 11 - 2y + 3z + 4t = 2 \end{cases}$$

Le système  $(S)$  possède donc l'unique solution  $(2, 1, 1, 1)$ .

– (2) Résoudre  $(S)$  :

$$\begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ 3x + y + z - 2t - u = 1 \\ 2x - y - 3z + 7t + 5u = 2 \\ 3x - 2y - 5z + 7t + 8u = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \text{ un paramètre réel})$$

$$(S) \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ 3x + y + z - 2t - u = 1 \\ 2x - y - 3z + 7t + 5u = 2 \\ 3x - 2y - 5z + 7t + 8u = \lambda \end{cases} \quad \begin{array}{l} E_2 \leftarrow E_2 - 3E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - 2E_1 \\ E_4 \leftarrow E_4 - 3E_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ -8y - 14z + 4t + 20u = -8 \\ -7y - 13z + 11t + 19u = -4 \\ -11y - 20z + 13t + 29u = \lambda - 9 \end{cases} \quad \begin{array}{l} E_3 \leftarrow 8E_3 - 7E_2 \\ E_4 \leftarrow 8E_4 - 11E_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ -8y - 14z + 4t + 20u = -8 \\ -6z + 60t + 12u = 24 \\ -6z + 60t + 12u = 8\lambda + 16 \end{cases} \quad E_4 \leftarrow E_4 - E_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t - 7u = 3 \\ -8y - 14z + 4t + 20u = -8 \\ -6z + 60t + 12u = 24 \\ 0 = 8\lambda - 8 \end{cases}$$

On constate que si  $\lambda \neq 1$ , alors (S) n'a pas de solution.

Supposons donc  $\lambda = 1$ . Le système (S) se réduit au trois premières équations ci-dessus.

On constate qu'on obtient un système de Cramer par rapport aux inconnues  $x, y, z$ , à condition de traiter  $t, u$  comme des paramètres arbitraires.

Voici comment se termine la résolution de (S) :

$$(S) \begin{cases} x + 3y + 5z = 3 + 2t + 7u \\ 4y + 7z = 4 + 2t + 10u \\ z = -4 + 10t + 2u \end{cases} \quad \begin{array}{l} E_1 \leftarrow E_1 - 5E_3 \\ E_2 \leftarrow E_2 - 7E_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 23 - 48t - 3u \\ 4y = 32 - 68t - 4u \\ z = -4 + 10t + 2u \end{cases} \quad E_2 \leftarrow E_2/4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 23 - 48t - 3u \\ y = 8 - 17t - u \\ z = -4 + 10t + 2u \end{cases} \quad E_1 \leftarrow E_1 - 3E_2$$

$$\text{Et on arrive finalement à : } \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 8 - 17t - u \\ z = -4 + 10t + 2u \end{cases}$$

Les solutions de (S) sont les 5-uplets  $A = (x, y, z, t, u)$  qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} A &= (-1 + 3t, 8 - 17t - u, -4 + 10t + 2u, t, u) \\ &= (-1, 8, -4, 0, 0) + t(3, -17, 10, 1, 0) + u(0, -1, 2, 0, 1) \end{aligned}$$

où  $t$  et  $u$  ont des valeurs arbitraires.

On voit bien ici la structure de l'ensemble des solutions : à la solution particulière  $A_0 = (-1, 8, -4, 0, 0)$  (qui est obtenue pour  $t = u = 0$ ), on ajoute la solution générale du système homogène (H) associé à (S).

On constate que la solution générale de (H) est le plan vectoriel engendré par les vecteurs  $(3, -17, 10, 1, 0)$  et  $(0, -1, 2, 0, 1)$ .

– (3) Résoudre le système (S) 
$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = -2 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 3 \end{cases}$$

On a ici un exemple où il est rentable d'adjoindre à (S) une nouvelle équation combinaison linéaire des équations initiales.

Plus précisément on va lui adjoindre l'équation  $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ .

On obtient : 
$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = -2 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 3 \\ [(\lambda + 3)(x + y + z + t) = 2] \end{cases}$$

On voit tout de suite que le système n'a pas de solution si  $\lambda = -3$ .

Supposons donc  $\lambda \neq -3$ . Voici comment on termine la résolution.

(S) 
$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = -2 \\ x + y + \lambda z + t = 0 \\ x + y + z + \lambda t = 3 \\ [x + y + z + t = \frac{2}{\lambda + 3}] \end{cases} \quad \begin{array}{l} E_1 \leftarrow E_1 - E_5 \\ E_2 \leftarrow E_2 - E_5 \\ E_3 \leftarrow E_3 - E_5 \\ E_4 \leftarrow E_4 - E_5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)x = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 3} \\ (\lambda - 1)y = -2\frac{\lambda + 4}{\lambda + 3} \\ (\lambda - 1)z = \frac{-2}{\lambda + 3} \\ (\lambda - 1)t = \frac{3\lambda + 7}{\lambda + 3} \end{cases} \quad \text{Si } \lambda = 1 \text{ on voit que (S) n'a pas de solution.}$$

On suppose donc que  $\lambda$  n'est ni égal à  $-3$  ni égal à  $1$ .

Le système (S) possède alors une solution unique  $(x, y, z, t)$  donnée par :

$$(x, y, z, t) = \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 3)} (\lambda + 1, -2\lambda - 8, -2, 3\lambda + 7)$$