

Examen de Mesure et d'Intégration
(Durée:2h)

Exercice n°1: (points)

1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que si T est une tribu sur F , alors

$$f^{-1}(T) = \{f^{-1}(B) : B \in T\},$$

est une tribu sur E .

2 - Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A, B \in T$. Montrer que

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

Exercice n°2: (points)

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = ne^{-nx}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Calculer $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

2 - Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2} dx.$$

Exercice n°3: (points)

Soit

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx, \quad t \in \mathbb{R}, \quad F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1 - Montrer que F est continue et dérivable sur \mathbb{R} .

2 - Montrer que F vérifie l'équation différentielle

$$F'(t) + \frac{t}{2}F(t) = 0,$$

et déduire sa valeur.

Exercice n°4: (points)

1 - Montrer que $f(x, y) = e^{-y} \sin(2xy)$ est intégrable sur $[0, 1] \times [0, +\infty[$.

2 - Déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y} e^{-y} dy.$$

Indication: utiliser l'égalité $\sin^2 y = \frac{1}{2}(1 - \cos 2y)$.

- Bon courage -

Toute suggestion est la bienvenue, n'hésitez pas à nous contacter !

Suivez nous sur Facebook : <https://www.facebook.com/karini.tk>

Ainsi vous trouverez d'autre PDF sur : www.karini.tk

Tous droits Réservé ©