

Examen du module Mesure et Intégration

(Durée:1h30mn)

**Exercice n°1 :** (7 points)

1 - Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{1+x^n} dx.$$

2 - Montrer que pour tout  $\alpha > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(\alpha) \xi(\alpha),$$

où

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \xi(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

**Exercice n°2 :** (8 points)

On considère sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx.$$

1 - Montrer que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

2 - Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et donner une expression à sa dérivée.

3 - Vérifier que  $F$  est solution de l'équation différentielle

$$F'(t) - F(t) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

**Exercice n°3 :** (5 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = e^{-x} \cos(xy).$$

1 - Montrer que  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[ \times [0, 1]$ .

2 - Calculer  $\int_0^1 \int_0^{+\infty} f(x, y) dx dy$  et déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin x}{x} dx.$$

- Bon courage -

Toute suggestion est la bienvenue, n'hésitez pas à nous contacter !

Suivez nous sur Facebook : <https://www.facebook.com/karini.tk>

Ainsi vous trouverez d'autre PDF sur : [www.karini.tk](http://www.karini.tk)

Tous droits Réservé ©