Université Abdelhamid Ibn Badis, Mostaganem
Faculté des sciences et sciences de l'ingénieur
Licence de Mathématiques (2008/2009)
Mesure et Intégration

Examen de rattrapage

(Durée: 1h45mn)

Exercice n°1 : (6 points)

1 - Soit (E, T, m) un espace mesuré où m est une mesure vérifiant $m(E) = 1$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ donné par

$$\mathcal{F} = \{A \in T : m(A) = 0 \vee m(A) = 1\},$$

est une tribu sur E.

2 - Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Pour tout $A \in T$, on pose

$$\mu(A) = \int_A f dm.$$

Montrer que μ est une mesure sur T.

Exercice n°2: (4 points)

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice n°3: (10 points)

1 - Montrer que pour tout réel $a > 0$, la fonction $f(x, y) = e^{-xy^2}$ est intégrable sur $[0, a] \times \mathbb{R}_+$.

2 - Calculer $I(a, y) = \int_0^a e^{-xy^2} \sin x dx$, pour $a > 0$ et $y \geq 0$.

3 - Calculer $\lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} I(a, y) dy$.

4 - En déduire que

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + y^4} dy.$$

Indication: $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- Bon courage -