

Examen de rattrapage *de mesure*

(Durée: 1h30mn)

Exercice n°1: (6,5 points)

1 - Soit $f: E \rightarrow F$ une application et T une tribu sur E . Montrer que

$$\hat{T} = \{B \subset F : f^{-1}(B) \in T\},$$

est une tribu sur F .

2 - Soit (E, T, m) un espace mesuré. Montrer que

$$\forall A, B \in T : m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$$

Exercice n°2: (5,5 points)

1 - Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+2n)^2}.$$

2 - Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx.$$

Exercice n°3: (8 points)

On suppose que pour tout réel $a > 0$, la fonction $f(x, y) = \sin x e^{-xy}$ est intégrable sur $[0, a] \times \mathbb{R}_+$.

1 - Calculer l'intégrale $I(a, y) = \int_0^a f(x, y) dx$.

2 - Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} I(a, y) dy$.

3 - En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

- Bon courage -

Toute suggestion est la bienvenue, n'hésitez pas à nous contacter !

Suivez nous sur Facebook : <https://www.facebook.com/karini.tk>

Ainsi vous trouverez d'autre PDF sur : www.karini.tk

Tous droits Réservé ©