Examen d'Optimisation (I)

$3^{ème}$ Année Math (LMD-Univ-Mosta)

21 Février 2010 (durée 1h 30m)

Exercice (8 pts) Soit A et b définis par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, on dèfinie la fonction $f(X) = \frac{1}{2}\langle X, AX\rangle + \langle b, X\rangle$.

1) Donner une condition suffisante pour que f soit coércive et strictement convexe.

2) Résoudre le problème d'optimisation sans contraintes suivant: $\begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$.

Problème (12pts) On considère le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x,y) = -y \\ g_1(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x,y) = (x+1+\alpha)^2 + (y+\alpha)^2 - (1+\alpha)^2 - \alpha^2 \leq 0 \end{cases}$$

où α est un réel positif ou nul ($\alpha \geq 0$). On pose

$$S_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g_1(x,y) \leq 0 \text{ } et \text{ } g_2(x,y) \leq 0\right\}$$

1) Dessiner les deux ensembles S_α (correspondant à $\alpha = 3$) et S_0 (correspondant à $\alpha = 0$).

2) S_α est-il convexe?

3) Soit $(x,y) \in S_\alpha$. Montrer que nécessairement $x \geq 0$ (on peut utiliser le fait que $(x-1)^2 - 1 \leq g_1(x,y)$.
Montrer aussi que nécessairement $y \leq 0$ (on peut utiliser l'égalité $(y+\alpha)^2 - \alpha^2 = g_2(x,y) + (1+\alpha)^2 - (x+1+\alpha)^2$).

4) En déduire de manière simple et sans utiliser les conditions d'optimalité vues en cours que $(0,0)$ est l'unique solution du problème.

5) On suppose maintenant que $\alpha > 0$. Montrer que $(0,0)$ est un point régulier de S_α.

6) Ecrire les conditions nécessaire de K-K-T en $(0,0)$ et trouver les multiplicateurs orrespondants.
