

**Examen d'Optimisation I (L3 Math)**  
**14 Février 2011 (durée 1h30m)**

**Exo 1** (12 pts) Dans tout l'exercice,  $n$  est un entier au moins égal à 2 et  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa norme euclidienne usuelle. On considère le sous ensemble  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \ i = 1, \dots, n \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

- 1) Montrer que  $C$  est convexe.
- 2) Soit  $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$  un vecteur fixé de  $\mathbb{R}^n$ . Calculer  $\nabla J(x)$  et  $\nabla^2 J(x)$ , ensuite montrer qu'il existe un unique  $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{1 \leq i \leq n} \in C$  vérifiant

$$J(\bar{x}) = \begin{cases} \min J(x) \\ x \in C \end{cases},$$

où  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $J(x) = \frac{1}{2} \|x - y\|^2$ .

- 3) Décrire  $C$  sous la forme usuelle d'un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$  soumis à des contraintes (égalité(s) et inégalité(s)), avec  $n+1$  contraintes au total.
- 4) Montrer, à l'aide du théorème de Karush-kuhn-Tucker, qu'il existe  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que

$$\bar{x}_i - y_i - \lambda_i + \mu = 0 \text{ et } \lambda_i \bar{x}_i = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

- 5) En déduire que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \bar{x}_i = \max(0, y_i - \mu).$$

**Exo 2** (08 pts) Soit le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{cases} \min x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

- 1) Tracer l'ensemble des contraintes de ce problème.
- 2) Trouver géométriquement la solution optimale.
- 3) Trouver la solution de ce problème en utilisant les conditions d'optimalité de K-K-T.
- 4) Le minimum trouver est-il global, pourquoi?

**Remarque** concernant le test 2, l'exo 2 sera noté sur 10 et cette note sera affectée à la note du Test 2.

**Bon chance!**

Toute suggestion est la bienvenue, n'hésitez pas à nous contacter !

Suivez nous sur Facebook : <https://www.facebook.com/karini.tk>

Ainsi vous trouverez d'autre PDF sur : [www.karini.tk](http://www.karini.tk)

Tous droits Réserve ©