21 / 11 / 2014

ثنــائي القطب RC

في هذا الدرس يجب أن :

1 - أعرف أن شحنة مكثفة تتعلق بالتوتر الذي شُحنت تحته . Q = C U

2 - أعرف أن المكثفة مخزن للشحن الكهربائية ، وبالتالي للطاقة الكهربائية ، وهذه الطاقة يمكن استعمالها غير مباشرة في دارة كهربائية أخرى .

3 - أعرف أن مكثفتين مربوطتين على التسلسل تكون لهما نفس الشحنة الكهربائية Q ، وأن مكثفتين مربوطتين على التفرع يكون مجموع شحنتيهما مساويا لشحنة المكثفة المكافئة لهما .

4 - أعرف قانوني السعات في ربط المكثفات ، وأنه إذا أردنا الحصول على سعة كبيرة يجب ربط المكثفات على التفرع وإذا أردنا الحصول على سعة صغيرة نربط المكثفات على التسلسل .

5 - أعرف أنه عندما نشحن مكثفة تحت توتر ثابت ، فإن شدة التيار تمر مباشرة إلى قيمة عظمى ، ثم تتناقص حسب علاقة أسيّة .

6 - أعرف أنه عندما نشحن مكثفة تحت توتر ثابت فإن التوتر بين طرفيها يتزايد حسب علاقة أسية ، وأن التوتر بين طرفي الناقل الأومي يتناقص حسب دالة أسية إلى أن ينعدم .

7 - أعرف أنه عند تفريغ مكثفة في ناقل أومي فإن شدة التيار تمر مباشرة إلى قيمة عظمى سالبة (الجهة الاصطلاحية للتيار) ، ثم تتناقص قيمتها المطلقة حسب علاقة أسيّة . أما التوتر فيتناقص حسب علاقة أسية إلى أن ينعدم .

8 – أعرف كتابة المعادلات التفاضلية التي تخضع لها المقادير الثلاثة u_C ، q ، i ، u_R أثناء الشحن وأثناء التفريغ .

9 – أعرف كيفية حلول هذه المعادلات ورسم البيانات الخاصة بها بدلالة الزمن .

10 – أعرف أن ثابت الزمن هو $\tau = RC$ ، وأنه متجانس مع الزمن .

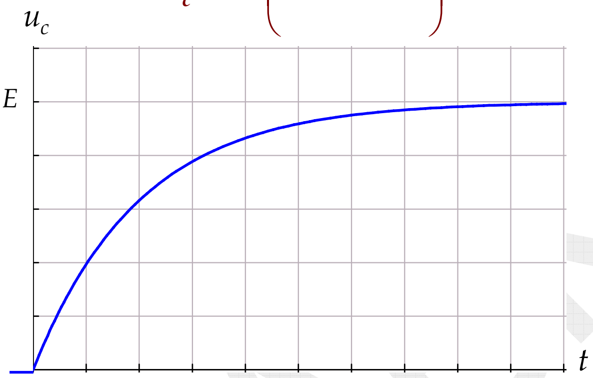
11 – أعرف كل الطرق لاستخراج ثابت الزمن من البيانات الأربعة .

12 – أعرف أن الطاقة المخزّنة في مكثفة بعد شحنها هي $E_C = \frac{1}{2} C E^2$.

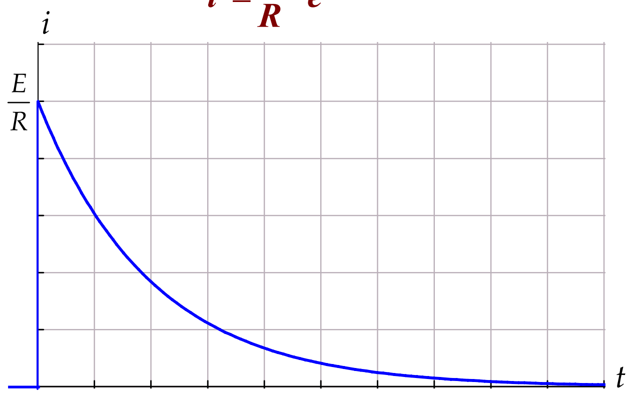
ملخص الدرس

شحن مكثفة

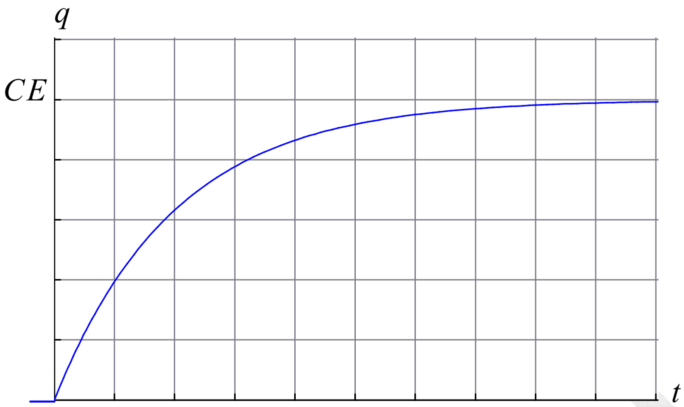
التوتر $u_c = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$



شدة التيار $i = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$

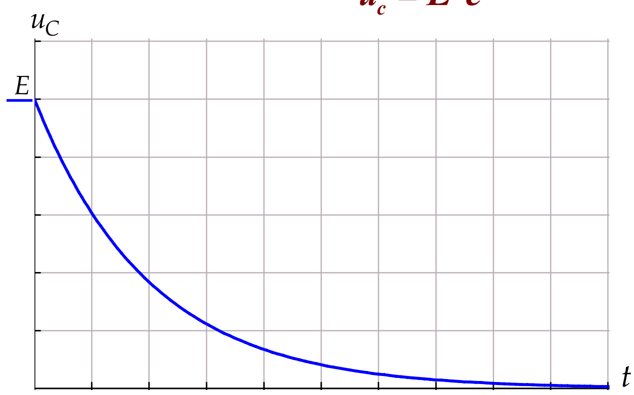


الشحنة $q = CE\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

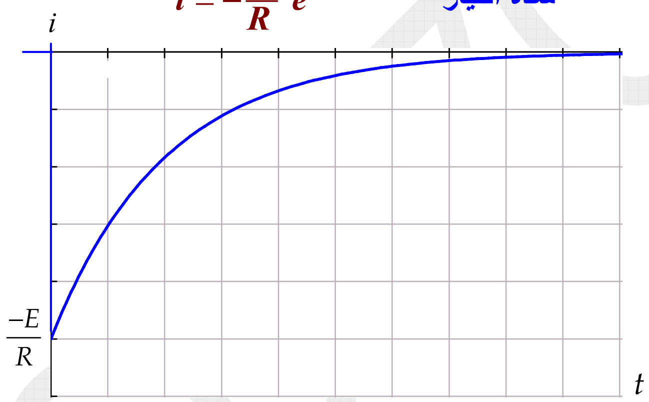


تفريغ مكثفة

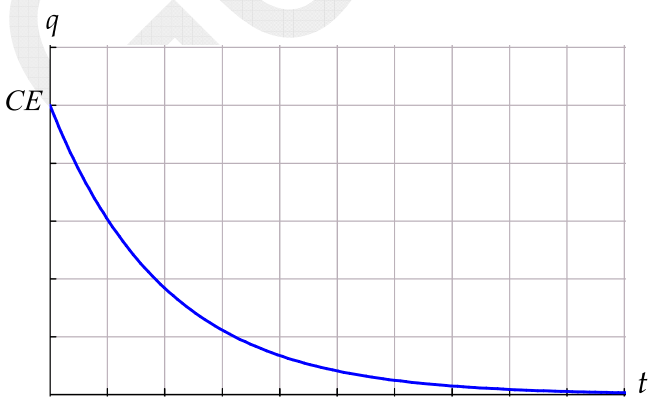
التوتر $u_c = E\,e^{-\frac{1}{RC}t}$



شدة التيار $i = -\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$

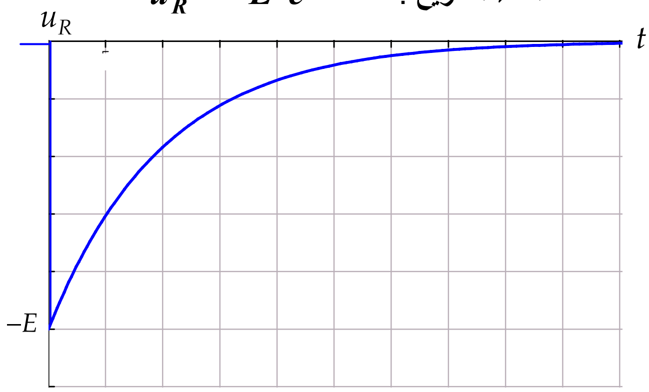


الشحنة $q = CE\,e^{-\frac{1}{RC}t}$

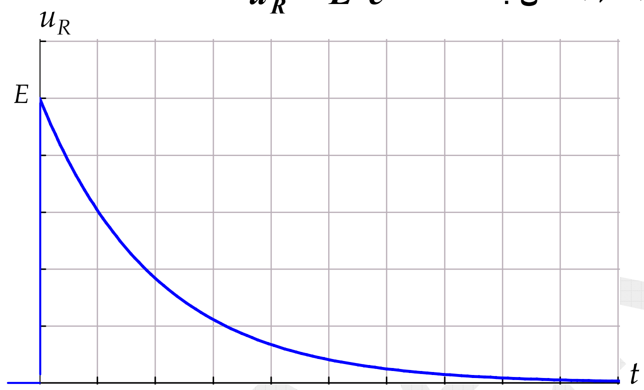


التوتر u_R بين طرفي الناقل الأومي

أثناء التفريغ : $u_R = -E\ e^{-\frac{1}{RC}t}$



أثناء الشحن : $u_R = E\ e^{-\frac{1}{RC}t}$



المعادلات التفاضلية التي تخضع لها المقادير u_C ، q ، u_R

عند الشحن

التوتر بين طرفي المكثفة : $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC}$

الشحنة على لبوسي المكثفة : $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$

التوتر بين طرفي الناقل الأومي : $\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$

شدة التيـار في الدارة : $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0$

عند التفريغ

التوتر بين طرفي المكثفة : $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = 0$

الشحنة على لبوسي المكثفة : $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$

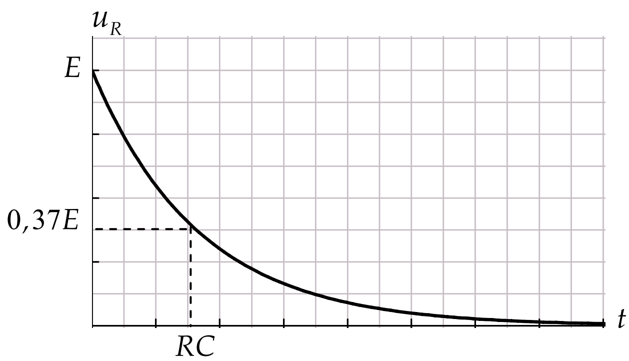
التوتر بين طرفي الناقل الأومي : $\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0$

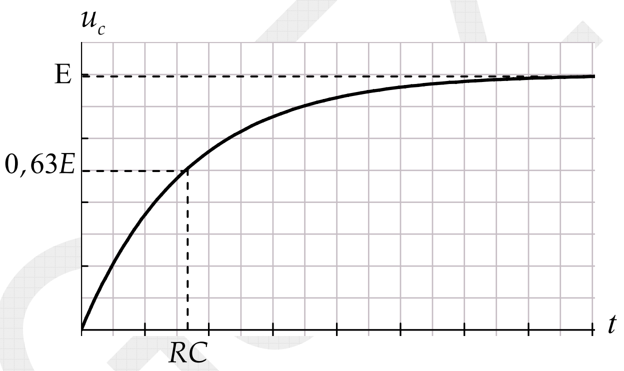
شدة التيـار في الدارة : $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0$

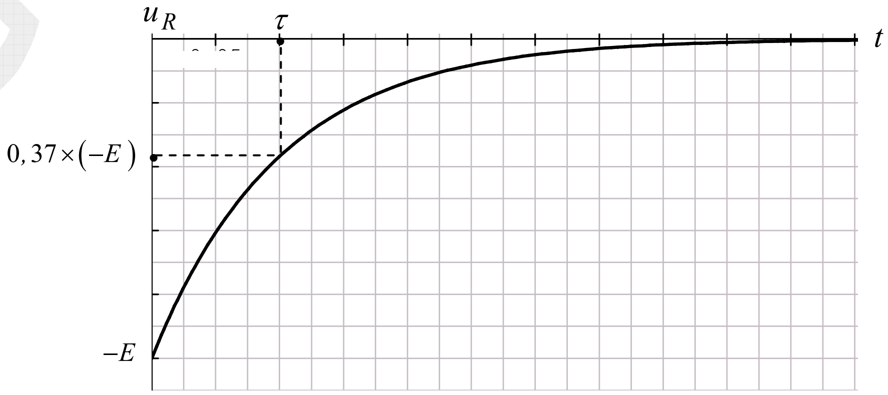
ثابت الزمن

ثابت الزمن هو الجداء RC ، أي $\tau = RC$ وهو مقدار متجانس مع الزمن . نعيّنه من كل هذه البيانات بالطرق التالية :

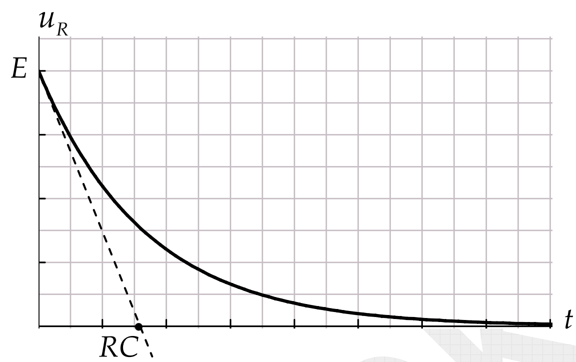
الطريقة 1 : مثلا في بيان التوتر بين طرفي المكثفة في حالة الشحن والتوتر بين طرفي الناقل الأومي في حالة الشحن والتفريغ .

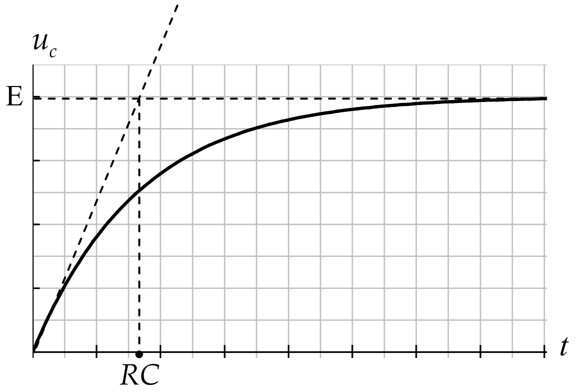




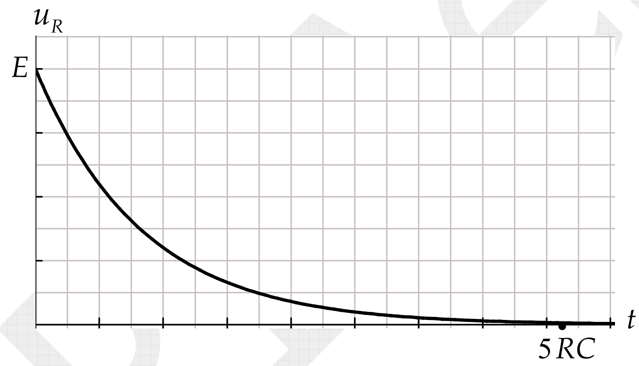


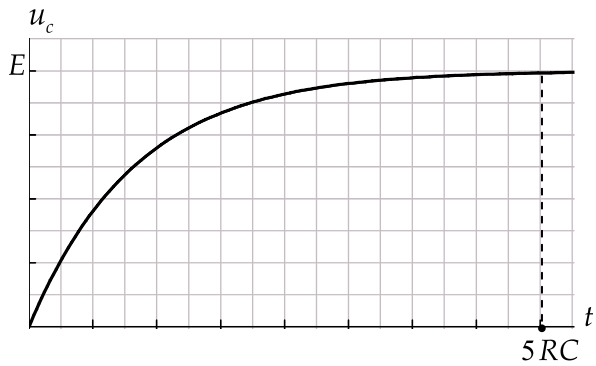
الطريقة 2 : مماس البيان عند $t = 0$ يتقاطع مع المستقيم الأفقي $u_c = E$ و $u_R = 0$ في النقطة التي فاصلتها $t = RC$





الطريقة 3 : نهاية النظام الانتقالي تتم في حوالي $t = 5\tau$





الطاقة المخزنة في مكثفة

عندما نشحن مكثفة تحت توتر U تُخزّن طـاقة $E_c = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$ ، E (joule)

الدرس

1 - شحن المكثفة

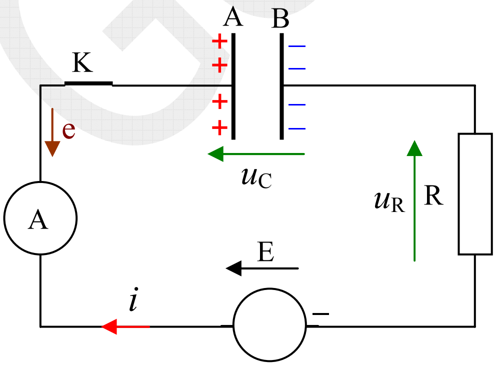
- قبل غلق القاطعة K يكون اللبوسان في نفس الكمون ($V_A = V_B = 0$) . (الشكل – 1)

حيث يكون لدينا نفس عدد الإلكترونات على اللبوسين (الإلكترونات التي تدور حول أنوية معدن اللبوسين) .

- عندما نغلق القاطعة يقوم القطب الموجب للمولد بسحب الإلكترونات من اللبوس A ويقوم بدفعها نحو اللبوس B ، وهذه العملية ليست منتظمة ، لأن عملية الشحن تزداد صعوبة كلما اقتربت من نهايتها ، وهذا ما يُبيّنه رجوع إبرة الأمبير متر نحو الصفر بعدما انحرفت فجأة نحو قيمة عظمى . ولما تنعدم شدّة التيار تكون عملية الشحن قد انتهت .

يُمكن فصل المكثّفة من الدارة وتبقى مشحونة .

- عندما يكتمل الشحن يكون : $Q_B = -Q_A$



الشكل - 1

تصبح المكثفة مشحونة ويكون مجموع شحنتي لبوسيها دائما معدوما

$$Q_A + Q_B = 0$$

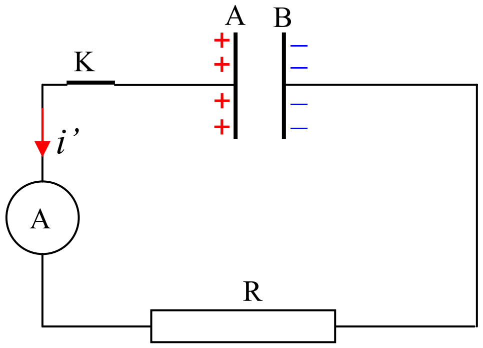
تعقيبـــاب

- الالكترونات لا يمكنها عبور العازل .
- أثناء الشحن ، يشير مقياس الأمبير إلى تيار متغير ، حيث ينعدم هذا التيار في نهاية الشحن كما سبق أن ذكرنا ذلك . إذن يمكن تحديد نظامين (مرحلتين) :

النظام الإنتقالي : من لحظة غلق القاطعة إلى أن تنعدم شدة التيار .

النظـام الدائم : بما أن شدة التيار انعدمت ، إذن التوتر بين طرفي الناقل الأومي يصبح معدوما كذلك لأن $u_R = R\,i$ ، وبالتالي يصبح فرق الكمون بين طرفي المكثفة مساويا لفرق الكمون بين طرفي المولّد أي : $u_C \approx E$

2 - تفريغ المكثفة



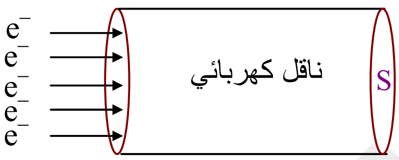
الشكل - 2

نعزل المكثفة عن المولّد و هي مشحونة ونربطها في دارة مع ناقل أومي (الشكل – 2) .
في هذه الحالة تكون المكثفة بمثابة مولد (لكن مؤقت) . تعود الإلكترونات إلى أماكنها لتحقيق التوازن الكهربائي ، فيمر تيار في الدارة في عكس الجهة التي مر فيها أثناء شحن المكثفة.

ينعدم هذا التيار لحظة **إفراغ** المكثفة ، فيصبح التوتر بين طرفي المكثفة $u_C = 0$

3 - نمذجة المكثفة

أ - **تعريف** : شدة التيار الكهربائي هي كمية الكهرباء التي تمر عبر المقطع (S) لناقل كهربائي خلال وحدة الزمن .
معنى هذا أن شدة التيار تتعلق بعدد الإلكترونات التي تمر عبر المقطع خلال ثانية واحدة .



الشكل - 3

ونعلم أن هذا العدد من الإلكترونات يحمل كمية من الكهرباء $|q| = ne$

حيث : n هو عدد الإلكترونات و e هي شحنة الإلكترون . (الشكل – 3)

نكتب إذن شدة التيار كما يلي : $$i = \frac{dq}{dt} \qquad (1)$$

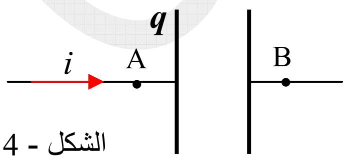
أي أن شدة التيار هي الكمية الصغيرة من الكهرباء dq التي تمر خلال المدة الزمنية الصغيرة dt ، وهذا مدلوله رياضيا مشتق كمية الكهرباء بالنسبة للزمن .

إذا كان التيار ثابتا فإن تدفق الكهرباء يكون ثابتا عبر المقطع S وبالتالي $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ ، حيث ΔQ هي كمية الكهرباء المارة خلال المدة الزمنية Δt .

ملاحظة :

في كل ما يلي نرمز للمقادير اللحظية ، أي المقادير التي تتغير بتغيّر الزمن بالرموز الصغيرة (i ، u ، q) ، ونرمز لقيمها العظمى بالرموز الكبيرة (I ، U ، Q)

إصطلاح :



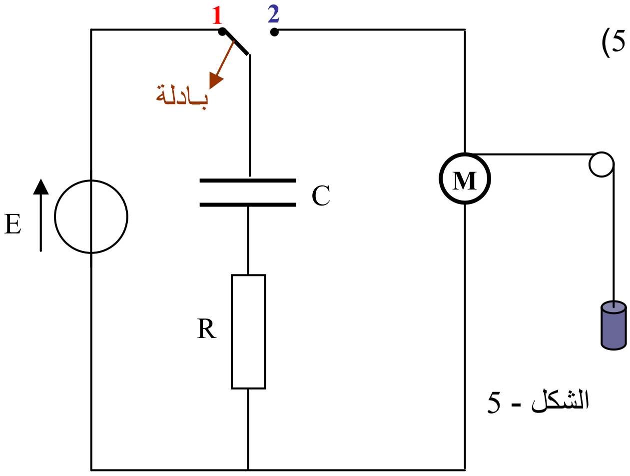
الشكل - 4

في ما يلي لما نقول شحنة مكثّفة q نقصد بها القيمة الموجبة للشحنة ، وهي شحنة اللبوس A أي اللبوس الذي يصل له التيار الكهربائي i . (الشكل – 4)

ب – الطـاقة المخزّنة في المكثفة

يمكن للمحرّك M أن يسحب الجسم P بواسطة خيط عندما يدور . (الشكل – 5)
نصل البادلة (قاطعة ذات وضعيتين) للوضعية 1 ، فتُشحن المكثفة ، ولما نصل البادلة للوضعية 2 نلاحظ صعود الجسم P ، دلالة على أن المكثفة خزّنت طاقة أثناء الشحن ثم قدمتها عند تفريغها للمحرك ، مما جعل هذا الأخير يرفع الجسم P .

المحرك حوّل الطاقة الكهربائية إلى طاقة ميكانيكية



الشكل - 5

الاستطاعة التي تقدمها المكثفة للدارة أثناء التفريغ هي :

$$p = u_c i = C u_c \frac{du_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} C u_c^2\right)$$

نعلم أن الاستطاعة هي مشتق الطاقة بالنسبة للزمن ، أي $p = \frac{dE}{dt}$ ، ومنه الطاقة المخزنة في المكثفة هي :

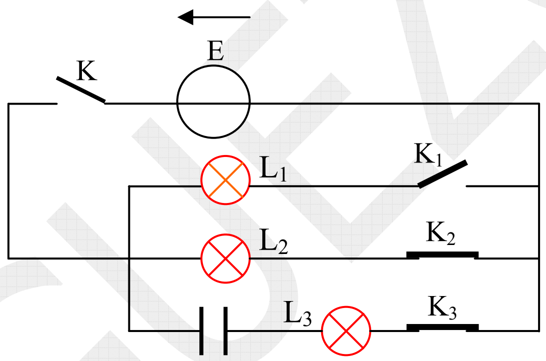
$$E_c = \frac{1}{2} C u_c^2$$ ، حيث E_c بالجول (Joule)

وبما أن $q = C\, u_c$ يمكن كتابة الطاقة بالشكل : $E_c = \frac{1}{2} q u_c$

دراسة ثنائي القطب RC

1 – تجربة

نركب التجهيز المبيّن في الشكل – 6 ، حيث نستعمل 3 مصابيح متماثلة ومولدا للتوتر يعطي تيارا مستمرا .
عندما نغلق القاطعة K ، نلاحظ ما يلي :
- المصباح L_1 لا يشتعل
- المصباح L_2 يشتعل
- المصباح L_3 يشتعل ثم ينطفئ .



الشكل - 6

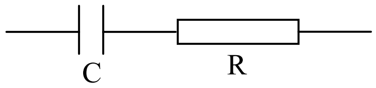
التفسير :

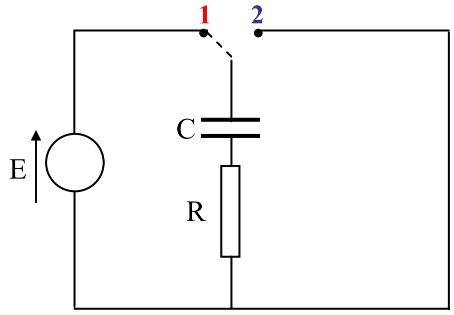
التيار لا يمر في L_1 لأن القاطعة K_1 مفتوحة .
التيار يمر في L_2 لأن القاطعة K_2 مغلقة
التيار يمر في L_3 في اللحظة التي نغلق فيها القاطعة الرئيسية K ، لأن شدة التيار في الفرع السفلي تنتقل من الصفر إلى أعظم قيمة ثم تعود تدريجيا للصفر حينها ينطفئ المصباح L_3 .

إذن المكثفة ليست مجرد قاطعة

لدراسة تطور التوتر بين طرفي المكثفة وشدة التيار في الدارة ، نركب دارة بمولد للتوتر قوته المحركة الكهربائية E ومكثفة سعتها C وناقل أومي مقاومته R . (الشكل – 7)

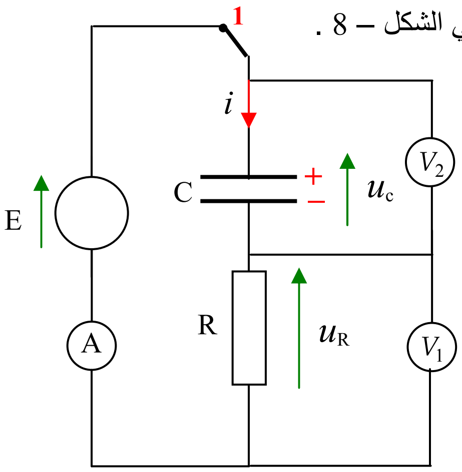
ثنائي القطب الذي ندرسه في هذا الجزء هو ناقل أومي على التسلسل مع مكثفة .





الشكل - 7

2 - الشحن



الشكل - 8

نصل البادلة للوضعية 1 في اللحظة $t = 0$ في الدارة المرسومة في الشكل – 7 . نوضح ذلك في الشكل – 8 .

مقياس الأمبير A : تنحرف إبرته إلى قيمة عظمى .

مقياس الفولط V_1 : يشير إلى القيمة E .

مقياس الفولط V_2 : تبقى الإبرة على الصفر .

في المرحلة التي تكون فيها إبرة الأمبير متر راجعة نحو الصفر ترجع كذلك إبرة V_1 نحو الصفر ، حيث أن التوتر بين طرفي الناقل الأومي يتناقص إلى أن ينعدم ، لأن $u_R = R\, i$ ، أي ينعدم بانعدام i .

في اللحظة التي تنعدم فيها شدة التيار تصبح إبرة V_2 تشير إلى $u_c = E$ ، لأن في كل لحظة $E = u_c + u_R$. تحدث كل هذه العمليات في وقت قصير جدا ، وذلك حسب قيمتي R و C .

2 - 1 - تطور التوتر بين طرفي المكثفة

حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا التوتر بين طرفي ثنـائي القطب RC : $E = u_C + u_R = u_C + Ri$

ولدينا $i = C\dfrac{du_c}{dt}$ ، وبالتالي : $E = u_c + RC\dfrac{du_c}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي هذه المعادلة على RC :

التوتّر بين طرفي المكثفة يحقق المعادلة التفاضلية :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}u_c = \frac{E}{RC} \qquad (2)$$

إن حل هذه المعادلة التفاضلية (2) يكون من الشكل $u_c = A\,e^{\alpha t} + B \qquad (3)$

حيث : A ، B ، α عبارة عن ثوابت غير معدومة .

لكي نحدّد B و α نعوّض في المعادلة (3) : $u_c = A\,e^{\alpha t} + B$ و $\dfrac{du_c}{dt} = A\alpha e^{\alpha t}$ ، ونكتب بذلك :

$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC}\left(A\,e^{\alpha t} + B\right) = \frac{E}{RC}$$

$$A\,e^{\alpha t}\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) + \frac{B}{RC} = \frac{E}{RC} \qquad (4)$$

حتى تكون المعادلة (5) محققة يجب أن يكون $\alpha = -\dfrac{1}{RC}$ و $B = E$

نستنتج A من المعادلة (3) ، حيث يكون عند اللحظة $t=0$ فرق الكمون بين طرفي المكثفة $u_C=0$.

بالتعويض : $0=A\,e^{0}+B$ ، مع العلم أن $e^{0}=1$ ، إذن $A=-B=-E$.

التوتر بين لبوسي المكثفة أثناء الشحن هو

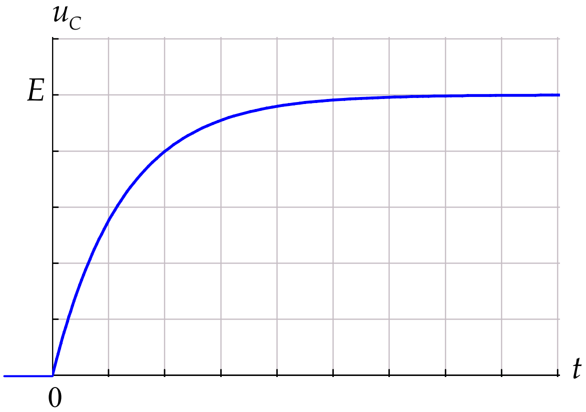
$$\boldsymbol{u_c=E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$$

التمثيل البياني $u_c=f(t)$

- عندما $t=0$ فإن $u_c=0$
- عندما t يؤول إلى $+\infty$ ، فإن

$$u_c=E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}\times\infty}\right)=E\,(1-0)=E$$

أي أن في نهاية الشحن يؤول u_C نحو قيمة القوة المحركة الكهربائية للمولد .



2 – 2 - تطوّر شحنة المكثفة

لدينا $q=Cu_C=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

شحنة المكثفة أثنــاء الشحن

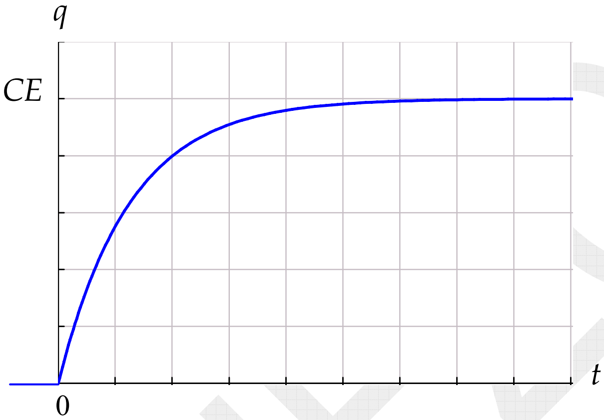
$$\boldsymbol{q=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)}$$

التمثيل البياني $q=f(t)$

- عندما $t=0$ فإن $q=0$
- عندما t يؤول إلى $+\infty$ ، فإن

$$q=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}\times\infty}\right)=CE\,(1-0)=CE$$

أي أن في نهاية الشحن تكون شحنة المكثفة $Q=CE$



2 - 3 - تطور شدة التيار في الدارة

لدينا في العلاقة (1) أعلاه :

$$i=\frac{dq}{dt}=C\frac{du_c}{dt}=C\frac{d}{dt}\left(E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)\right)=\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

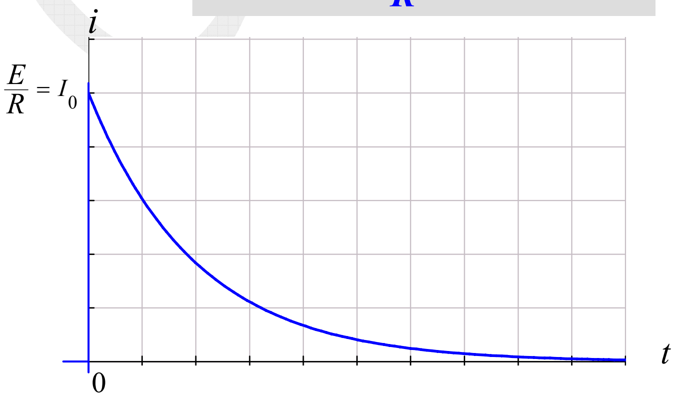
شدة التيار في الدارة أثناء الشحن هي

$$\boldsymbol{i=\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

$I_0=\dfrac{E}{R}$ ، حيث هي أعظم شدة يشير لها مقياس الأمبير

التمثيل البياني $i=f(t)$

- عندما $t=0$ فإن $i=\dfrac{E}{R}=I_0$
- عندما t يؤول إلى $+\infty$ ، فإن i يؤول نحو الصفر .



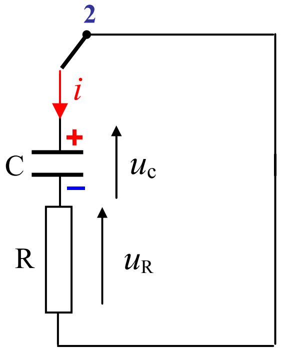
3 – التفريغ

3 – 1 – تطوّر التوتر بين طرفي المكثفة

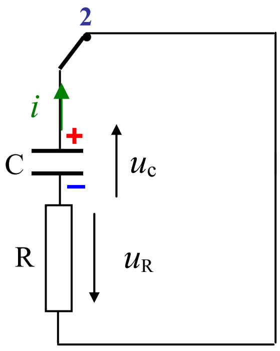
في التركيب في الشكل – 7 (المرسوم في الصفحة 7) نصل البادلة إلى الوضع 2 ، فتكون لدينا الدارة الكهربائية التالية (شكل – 9) .

السهم الأحمر هو الجهة الاصطلاحية للتيار ، أي جهة التيار التي كان يصدره المولّد أثناء الشحن وليس جهة التيار التي تصدره المكثفة .

التوتران u_c و u_R مختلفان في الإشارة .



الشكل - 9



الشكل - 10

ملاحظة :

يمكن أن نمثّل دارة التفريغ كما في الشكل – 10

حيث السهم الأخضر يمثّل جهة التيار الذي تصدره المكثفة ،

لأن المكثفة أصبحت بمثابة مولد أثناء التفريغ .

عندما نصل البادلة إلى الوضعية 2 يصبح التوتر بين طرفي ثنائي القطب RC مساويا للصفر (لا يوجد المولّد).

وبالتالي : $u_R + u_c = 0$

أو $u_c + RC\dfrac{du_c}{dt} = 0$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة على RC نكتب : $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_c = 0$ ، (5)

هذه معادلة تفاضلية حلها من الشكل : $u_c = Ae^{\alpha t}$ (6)

من (5) و (6) نكتب : $A\alpha e^{\alpha t} + \dfrac{1}{RC}\left(Ae^{\alpha t}\right) = 0$

$Ae^{\alpha t}\left(\alpha + \dfrac{1}{RC}\right) = 0$ ، وحتى تكون هذه المعادلة محققة يجب أن يكون : $\alpha = -\dfrac{1}{RC}$

من الشروط الابتدائية ، عند $t = 0$ يكون $u_c = E$ ، وبالتعويض في (6) نجد $A = E$

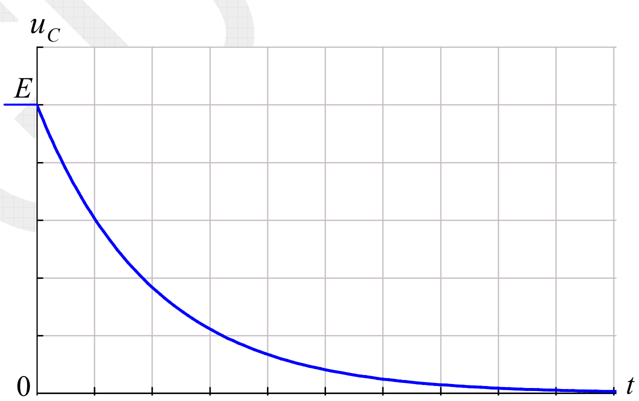
التوتر بين لبوسي المكثفة أثناء التفريغ هو

$$u_c = E\ e^{-\frac{1}{RC}t}$$

التمثيل البياني $u_c = f(t)$

- عندما $t = 0$ فإن $u_c = E\ e^{-\frac{1}{RC}\times 0} = E\ e^0 = E$
- عندما t يؤول إلى ما لا نهاية ، فإن

$$u_c = E\ e^{-\frac{1}{RC}\times\infty} = E\ \times 0 = 0$$



3 – 2 – تطوّر شحنة المكثفة

لدينا $q = C\,u_C$ ، وبالتالي :

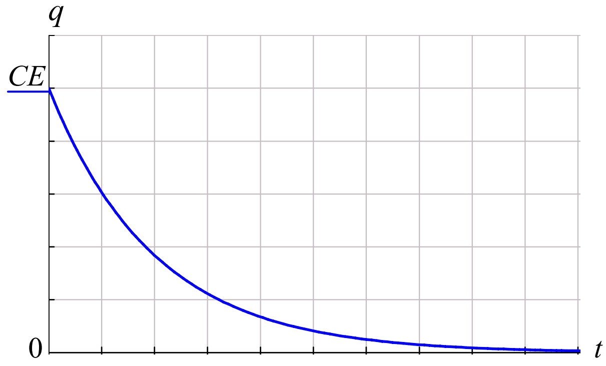
التمثيل البياني $u_c = f\,(t)$

- عندما $t = 0$ فإن $q = CE\ e^{-\frac{1}{RC}\times 0} = CE\ e^{0} = CE$
- عندما t يؤول إلى $+\infty$ ، فإن

$$q = CE\ e^{-\frac{1}{RC}\times\infty} = CE\ \times 0 = 0$$

شحنة المكثفة أثناء التفريغ هي

$$q = CE\ e^{-\frac{1}{RC}t}$$



3 – 3 – تطوّر شدة التيار في الدارة

من العلاقة (1) $i = \frac{dq}{dt} = -\frac{CE}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t}$

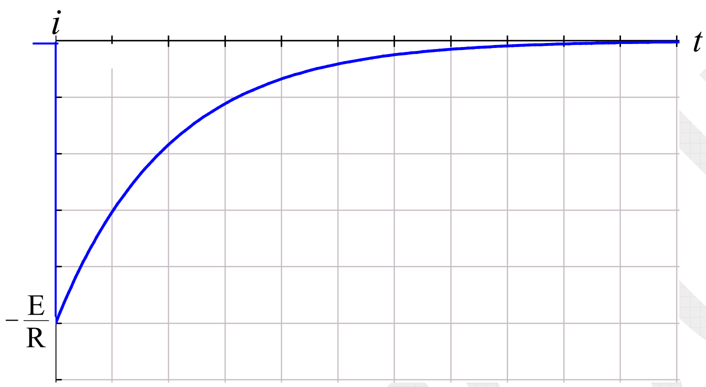
التمثيل البياني $i = f\,(t)$

- عندما $t = 0$ فإن $i = -\frac{E}{R}\times e^{0} = -\frac{E}{R}$
- عندما t يؤول إلى $+\infty$ ، فإن

$$i = -\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}\times\infty} = 0$$

شدة التيار في الدارة أثناء التفريغ هي

$$i = -\frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$



4 – تطور التوتر بين طرفي الناقل الأومي

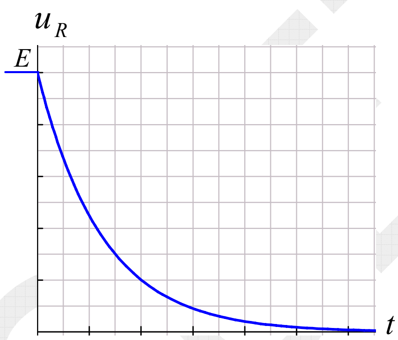
4 -1 - أثناء الشحن :

لدينا $u_R = R\,i$ ، ولدينا $i = \frac{E}{R}\ e^{-\frac{1}{RC}t}$ ، ومنه

$$u_R = E\ \ e^{-\frac{1}{RC}t}$$

التمثيل البياني :

- عندما $t = 0$ فإن $u_R = E\ \ e^{-\frac{1}{RC}\times 0} = E$
- عندما $t \to \infty$ فإن $u_R = E\ \ e^{-\frac{1}{RC}\times\infty} = 0$

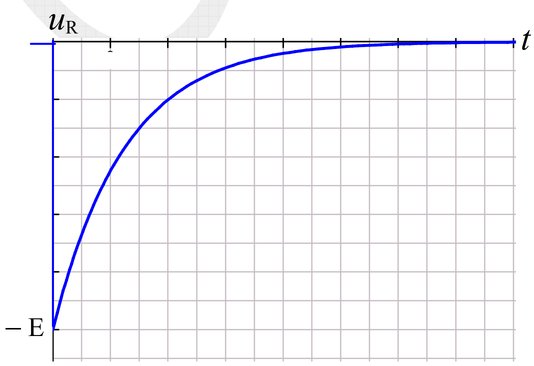


4 -2 - أثناء التفريغ :

لدينا $u_R = R\,i$ ، ولدينا $i = -\frac{E}{R}\ e^{-\frac{1}{RC}t}$ ، ومنه

$$u_R = -E\ \ e^{-\frac{1}{RC}t}$$

- عندما $t = 0$ فإن $u_R = -E\ \ e^{-\frac{1}{RC}\times 0} = -E$
- عندما $t \to \infty$ فإن $u_R = -E\ \ e^{-\frac{1}{RC}\times\infty} = 0$



5 – ثابت الزمن

هو الثابت $\tau = RC$ ، حيث R هي المقاومة المكافئة للدارة .

تُعطينا قيمة ثابت الزمن فكرة عن المدّة التي تُشحن فيها المكثفة أو تُفرّغ

التحليل البعدي لثابت الزمن :

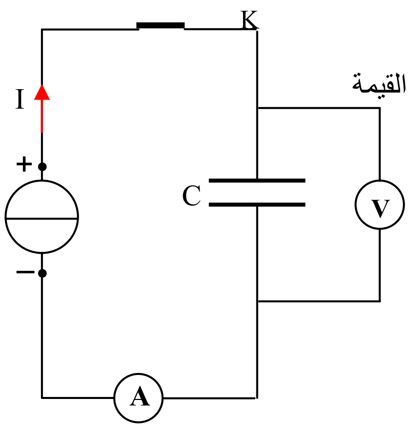
$RC = R\dfrac{Q}{U} = R\dfrac{It}{U}$ وبالتالي : $[RC] = \dfrac{[U]}{[I]}\dfrac{[I][T]}{[U]} = [T]$

الثابت $\tau = RC$ مقدار متجانس مع الزمن

6 - دراسة التوتر بين طرفي المكثفة باستعمال مولد للتيار

ندرس مثالا تجريبيا بحيث نستعمل مولدا للتيار وليس مولدا للتوتر (الشكل 11)

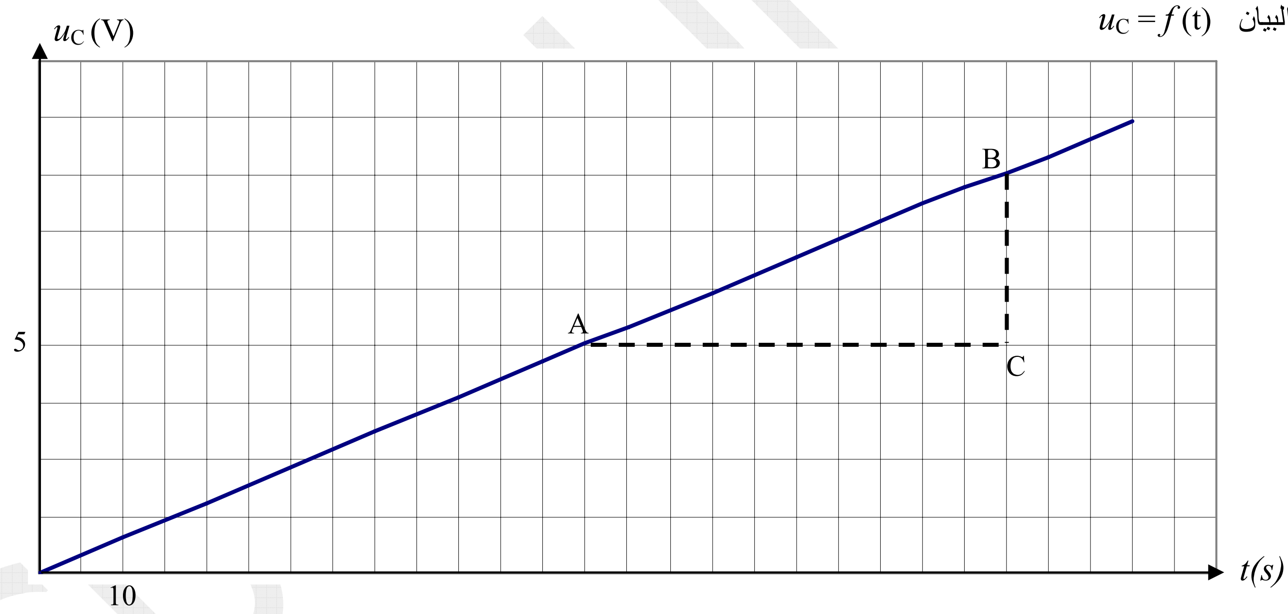
نضبط شدة تيار المولد على القيمة I = 0,30 mA ، ثم نغلق القاطعة فيشير مقياس الأمبير إلى هذه القيمة وتبقى ثابتة طيلة عملية الشحن . نسجّل قيم التوتر بين طرفي المكثفة في مختلف اللحظات :



الشكل - 11

t (s)	0	10	20	30	40	50	60	70
u_C (V)	0	0,62	1,24	1,85	2,49	3,09	3,71	4,33
t (s)	80	90	100	110	120	130	140	
u_C (V)	4,93	5,57	6,18	6,78	7,33	7,93	8,92	

نمثل البيان $u_C = f(t)$



نلاحظ من التمثيل البياني أن العلاقة بين التوتر بين طرفي المكثفة والزمن من الشكل $u_C = a\,t$

العلاقة النظرية :

في اللحظة t = 0 كانت المكثفة فارغة ، وفي اللحظة t تكتسب المكثفة شحنة كهربائية $q = It$ (7)

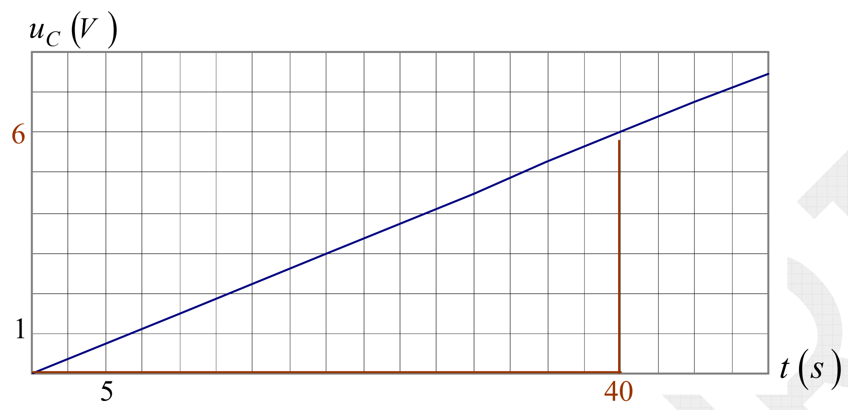
ولدينا $u_c = \dfrac{q}{C}$ (8)

من العلاقتين (7) و (8) نستنتج : $u_c = \dfrac{I}{C}\,t$ ، ميل البيان هو $\dfrac{I}{C}$. يمكن استنتاج سعة المكثفة من البيان ، وذلك

بحساب الميل : $\dfrac{I}{C} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{50} = 0,06\ V.S^{-1}$ ، ومنه : $C = \dfrac{I}{0,06} = \dfrac{0,3\times 10^{-3}}{0,06} = 5\times 10^{-3}\,F$

نفرّغ المكثفة ونعيد شحنها ، لكن هذه المرة نضبط شدّة تيار المولد على القيمة I’ = 0,70 mA . نتحصل على النتائج التالية :

t (s)	0	10	20	30	40	50
u_C (V)	0	1,50	2,90	4,47	6,02	7,45



نمثّل البيان $u_C = f\,(t)$

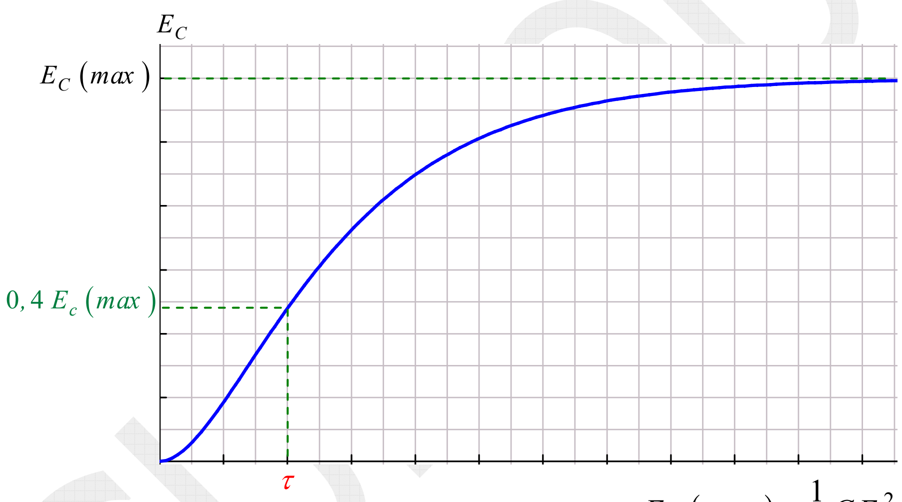
ميل البيان $\dfrac{I}{C} = \dfrac{6}{40} = 0,15$

$$C = \frac{I}{0,15} = \frac{0,7\times 10^{-3}}{0,15} = 4,67\times 10^{-3}F$$

كل ما في الأمر أنه كلما كانت شدة التيار أكبر كلما شُحنت المكثفة في وقت أقصر .

7 - دراسة الطاقة المخزّنة في مكثفة بدلالة الزمن

أ) أثنـــاء الشحن



عبارة الطاقة المخزّنة في المكثفة هي

$$E_C = \frac{1}{2}C\,u_C^{\,2}$$

العبارة الزمنية للتوتر بين طرفي المكثفة هي

$u_C = E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ ، وبالتعويض في عبارة

الطاقة نجد $E_C = \dfrac{1}{2}CE^2\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$ ، حيث $E_C\,(max) = \dfrac{1}{2}CE^2$

عندما نضع $t = \tau$ نجد : $E_C = \dfrac{1}{2}CE^2\left(1-e^{-1}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}CE^2\right)\times 0,4 = 0,4E_C\,(max)$

ب) أثنـــاء التفريغ

عبارة الطاقة المخزّنة في المكثفة هي $E_C = \dfrac{1}{2}C\,u_C^{\,2}$

العبارة الزمنية للتوتر بين طرفي المكثفة هي $u_C = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ ، وبالتعويض في عبارة الطاقة نجد $E_C = \dfrac{1}{2}CE^2\,e^{-\frac{2t}{\tau}}$

عندما نضع $t=\tau$ نجد $E_C=\frac{1}{2}CE^2\left(e^{-2}\right)=\left(\frac{1}{2}CE^2\right)\times 0,13=0,13E_C\left(max\right)$

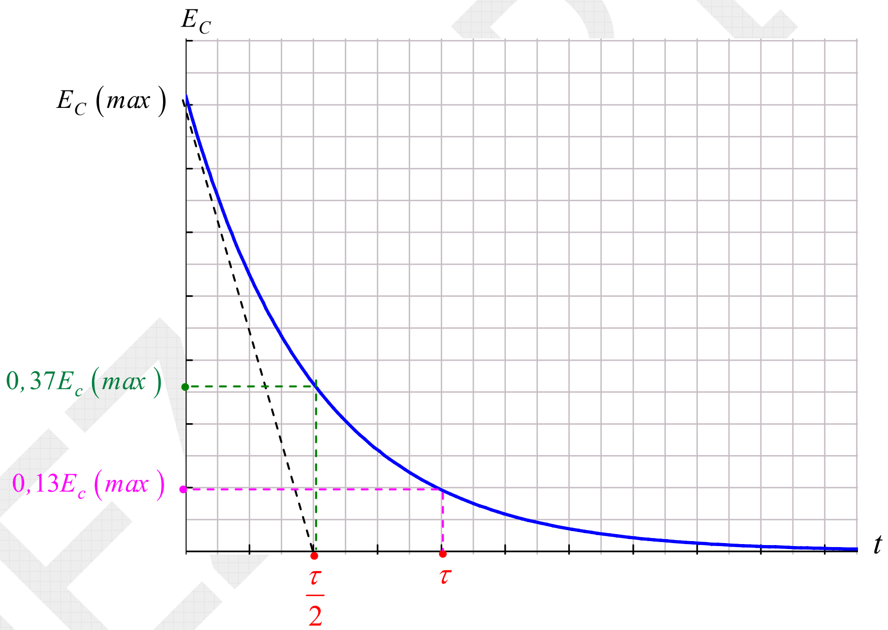
أما عندما نضع $t=\frac{\tau}{2}$ نجد $E_C=0,37E_C\left(max\right)$

كيف نثبت أن المماس عند $t=0$ يقطع محور الزمن في $t'=\frac{\tau}{2}$ ؟

لدينا ميل المماس هو $a=-\frac{E_C\left(max\right)}{t'}=-\frac{\frac{1}{2}CE^2}{t'}$

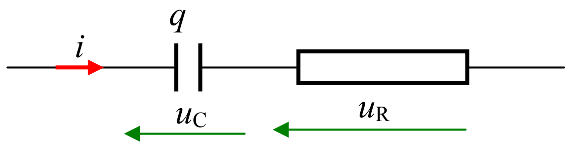
وكذلك هذا الميل هو العدد المشتق للدالة $E_C=f\left(t\right)$ عند $t=0$ ، حيث المشتق هو $f'\left(t\right)=\frac{1}{2}CE^2\times\left(-\frac{2}{\tau}\right)e^{-\frac{2t}{\tau}}$

$f'\left(0\right)=\frac{1}{2}CE^2\times\left(-\frac{2}{\tau}\right)e^{-\frac{2\times 0}{\tau}}=-\frac{CE^2}{\tau}=a$ ، وبالتالي $t'=\frac{\tau}{2}$



كيفية كتابة المعادلات التفاضلية عند شحن وتفريغ المكثفة

1 – أثناء الشحن



المعادلة التي يخضع لها التوتر بين طرفي المكثفة :

حسب قانون جمع التوترات : $u_C + u_R = E$

$u_C + R\,i = E$ ، ولدينا $i = \dfrac{dq}{dt}$ ، وبالتالي : $u_C + R\dfrac{dq}{dt} = E$ ، ولدينا كذلك $q = C\,u_C$

$u_C + R\dfrac{dCu_C}{dt} = E$ ، وبما أن C عبارة عن ثابت نكتب العبارة كالتالي $u_C + RC\dfrac{du_C}{dt} = E$

بتقسيم طرفي هذه المعادلة على RC نكتب المعادلة التفاضلية المطلوبة : $\boldsymbol{\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{E}{RC}}$

المعادلة التي تخضع لها الشحنة على لبوسي المكثفة :

$u_C + u_R = E$

$u_C + R\,i = E$ ، ولدينا $i = \dfrac{dq}{dt}$ و $u_C = \dfrac{q}{C}$ ، وبالتالي : $R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C} = E$.

بتقسيم طرفي هذه المعادلة على R نكتب المعادلة التفاضلية المطلوبة : $\boldsymbol{\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{RC}q = \dfrac{E}{R}}$

المعادلة التي يخضع لها التوتر بين طرفي الناقل الأومي :

$u_C + u_R = E$

لدينا $u_C = \dfrac{q}{C}$ وبالتالي : $u_R + \dfrac{q}{C} = E$ ، لو اشتققنا طرفي هذه المعادلة بالنسبة للزمن نجد : $\dfrac{du_R}{dt} + \dfrac{1}{C}\dfrac{dq}{dt} = 0$

ولدينا $i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{u_R}{R}$ ، وبالتالي : $\dfrac{du_R}{dt} + \dfrac{1}{C}\dfrac{u_R}{R} = 0$ ، وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هي :

$$\boldsymbol{\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}u_R = 0}$$

المعادلة التي تخضع لها شدّة التيـار :

لدينا : $\dfrac{du_R}{dt} + \dfrac{1}{C}\dfrac{u_R}{R} = 0$ ، نعوّض u_R بـ Ri ، نجد $\boldsymbol{\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{RC}i = 0}$

2 - أثناء التفريغ

حسب قانون جمع التوترات : $u_C + u_R = 0$

بنفس الطرق السابقة (الشحن) نجد المعادلات التفاضلية التالية : $\boldsymbol{\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_C = 0}$ التوتر بين طرفي المكثفة

$\boldsymbol{\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{RC}q = 0}$ الشحنة الكهربائية على لبوسي المكثفة

$\boldsymbol{\dfrac{du_R}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_R = 0}$ التوتر الكهربائي بين طرفي الناقل الأومي

$\boldsymbol{\dfrac{di}{dt} + \dfrac{1}{RC}i = 0}$ شدّة التيار في الدارة