التطورات الرتيبة

تطور جملة ميكانيكية

الدرس الثاني

GUEZOURI Aek – lycée Maraval - Oran

ما يجب أن أعرفه حتى أقول : إني استوعبت هذا الدرس

1 – يجب أن أعرف أن مجال الجاذبية الأرضية ثابت على ارتفاع من رتبة الكيلوميترات عن سطح الأرض ، وأن قوّة جذب الأرض للأجسام ما هي إلا قوة ثقل هذه الأجسام .

2 – يجب أن أعرف أن قوة الاحتكاك لجسم مع مائع تتناسب مع سرعته مرفوعة للأس n ، أي $f = k\ v^n$ ، وأننا لا ندرس إلا حالتين هما من أجل $n = 2$, $n = 1$.

3 – يجب أن أعرف أن دافعة أرخميدس (Archimède) في الموائع (الغازات والسوائل) هي ثقل المائع الذي يزيحه الجسم .

4 – يجب أن أعرف أن السرعة الحدّية لجسم يسقط في مائع هي السرعة التي يكتسبها عندما تصبح القوى المعرقلة له مساوية لقوة ثقله

5 – يجب أن أعرف حل المعادلتين التفاضليتين في الحالتين : $f = k\ v$ و $f = k'\ v^2$ ، حيث أن في الحالة الأولى يكون الحل مماثلا للحلول التي مرّت معنا في الكهرباء ، أما في الحالة الثانية نمثّل مخطّط السرعة باتباع طريقة أولر $(Euler)$.

6 – يجب أن أعرف أن السقوط الحر هو حركة متغيرة بانتظام تسارعها $\vec{g}$.

7 – يجب أن أعرف مبدأ انحفاظ الطاقة وكيفية تطبيقه لدراسة جملة ميكانيكية .

8 – يجب أن أعرف أن حركة الأجسام في مجال الجاذبية الأرضية ما هي إلا تطبيقات لقوانين نيوتن .

ملخص الدرس

1 – السقوط الشاقولي لجسم

في الحالة العامة يخضع الجسم إلى القوى التالية :

قوة ثقله $\vec{P}$ ، قوة الاحتكاك مع المائع $f = k\ v^n$ ، دافعة أرخميدس $\Pi = \rho_f\ V_s\ g$

حيث : ρ_f : الكتلة الحجمية للمائع (Le fluide)

V_s : حجم الجسم المتحرّك

2 - المعادلتان التفاضليتان اللتان تخضع لهما السرعة

- حالة $f = k\ v$: $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m} v = g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_s}\right)$. حل هذه المعادلة : $v = \dfrac{mg}{k}\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_s}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

- حالة $f = k'\ v^2$: $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k'}{m} v^2 = g\left(1 - \dfrac{\rho_f}{\rho_s}\right)$

في كلتي الحالتين : إذا كانت الكتلة الحجمية للمائع (ρ_f) صغيرة جدّا أمام الكتلة الحجمية للجسم (ρ_s) يمكن إهمال النسبة $\dfrac{\rho_f}{\rho_s}$ أمام 1

وبالتالي تكون دافعة أرخميدس مهملة . تصبح المعادلتان في هذه الحالة :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g \quad ، \quad \frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v^2=g$$

3 - السرعة الحدية

- **حالة** $f=k\,v$: $v_l=\dfrac{mg}{k}\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_s}\right)$
- **حالة** $f=k'\,v^2$: $v_l=\sqrt{\dfrac{mg}{k'}\left(1-\dfrac{\rho_f}{\rho_s}\right)}$

4 - الزمن المميّز للسقوط

من أجل $f=k\,v$: $\tau=\dfrac{m}{k}$ ، من أجل $f=k'\,v^2$: $\tau=\sqrt{\dfrac{m}{k'a_0}}$ ، حيث a_0 هو التسارع عند $t=0$

نتنبأ بواسطة هذا الزمن عن بداية الانتقال إلى النظام الدائم .

5 - السقوط الحر الشاقولي

التسارع : $\vec{a}=\vec{g}$

السرعة : $v=g\,t+v_0$

الفاصلة : $z=\dfrac{1}{2}g\,t^2+v_0\,t+z_0$

العلاقة بين المسافة المقطوعة (h) والمدة الزمنية (t) اللازمة لقطعها : $h=\dfrac{1}{2}g\,t^2+v_0\,t$

العلاقة بين السرعة والمسافة المقطوعة من النقطة A إلى النقطة B : $v_B^2-v_A^2=2g\,h$

6 – السقوط الحر في المستوي (حركة قذيفة في الفراغ)

إذا قُذف جسم في المستوي الشاقولي $(O\,x\,z)$ أو $(O\,y\,z)$ من مبدأ الإحداثيات بسرعة ابتدائية يصنع شعاعها مع المحور الأفقي زاوية حادّة α . يكون لدينا : $\vec{a}=\vec{g}$

$$v_x=v_0\cos\alpha \quad ، \quad v_{0,z}=v_0\sin\alpha$$

$x=v_0\cos\alpha\ t$ الحركة منتظمة على المحور الأفقي

$z=\dfrac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha\ t$ (g : قيمة جبرية) الحركة متغيرة بانتظام على المحور الشاقولي .

معادلة المسار : $z=-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\,tg\alpha$ ، **فاصلة المدى** : $x=d=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$

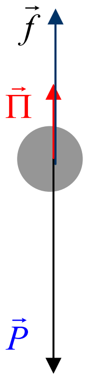
ترتيب الذروة : $y=h=\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

شعاع السرعة عند الذروة يكون أفقيا ، لأن السرعة على Oz تنعدم .

الدرس

1 – السقوط الشاقولي لجسم

يخضع الجسم أثناء سقوطه في مــائع (سائل أو غـاز) إلى القوتين $\vec{f}$ و $\vec{\Pi}$ (الشكل – 1) ، و هما قوتان معاكستان لقوة ثقل الجسم .



الشكل - 1

دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$: لما نغمر جسما في إناء يحتوي على الماء أو أي سائل آخر ، فإن مستوى الماء في الإناء يصعد . الحجم الزائد (المُزاح من طرف الجسم) هو نفسه حجم الجسم . لو أخذنا هذا الحجم من السائل المُزاح ووزناه في ميزان نجد كتلته m ، ولو حسبنا ثقله نجد $P = m\,g$. إن هذا الثقل هو نفسه شدّة القوة التي نسميها دافعة أرخميدس .

نفس الشيء بالنسبة لجسم مغمور في غاز ، فإن دافعة أرخميدس هي ثقل الغاز الذي أزاحه الجسم .

خصائصها : **الحامل** : هو الشاقول ، يعني نفس حامل ثقل الجسم .

الجهة : نحو الأعلى .

نقطة التأثير : مركز عطالة الجسم ، أي نفس نقطة تأثير ثقل الجسم .

الشدّة : $\Pi = m\,g$ ، ولدينا كتلة السائل المزاح هي $m = \rho_f\ V_S$ ، وبالتالي $\Pi = \rho_f V_S\ g$

حيث : ρ_f هي الكتلة الحجمية للسائل ، و V_S هو حجم الجسم .

قوّة الإحتكاك $\vec{f}$: تتناسب مع سرعة الجسم ، كلما تزداد السرعة تزداد مقاومة السائل للجسم (أخرج يدك من نافذة السيارة عندما تكون سرعة السيارة صغيرة ، ثم عندما تكون سرعة السيارة كبيرة وقارن في كل حالة القوة التي تقاوم حركة يدك) .

- في حالة سرعة الجسم صغيرة : نقول أن الجسم ينساب في السائل ، وتكون طويلة قوة الاحتكاك من الشكل : $\boxed{f = k\ v}$

- في حالة سرعة الجسم كبيرة نسبيا : تحدث اضطرابات وراء الجسم أثناء حركته في السائل ، وتكون طويلة قوة الاحتكاك من الشكل : $\boxed{f = k'\ v^2}$

نسمي كلا من k و k' ثابت الاحتكاك .

2 - تطبيق القانون الثاني لنيوتن

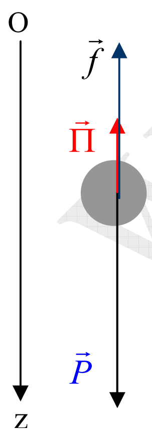
$\vec{P} + \vec{f} + \vec{\Pi} = m\,\vec{a}$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحور الشاقولي Oz (الشكل – 2) :

$$P - f - \Pi = m\,a$$

- **حالة** $\boldsymbol{f = k\ v}$

$mg - kv - \rho_f V_S\ g = m\dfrac{dv}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة التفاضلية على m ، نكتب :

$\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{k}{m}\ v = g\left(1 - \rho_f\ \dfrac{V_S}{m}\right)$ ، ولدينا $\dfrac{V_S}{m} = \dfrac{1}{\rho_S}$ ، حيث ρ_S : الكتلة الحجمية للجسم .



الشكل – 2

وتصبح المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}\ v = g\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_S}\right) \qquad (1)$$

حل هذه المعادلة من الشكل $v = Ae^{\alpha\,t} + B \qquad (2)$

نعوّض في (1) : $A\alpha e^{\alpha t}+\frac{k}{m}\left(Ae^{\alpha t}+B\right)=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

$A\alpha e^{\alpha t}+\frac{k}{m}Ae^{\alpha t}+\frac{kB}{m}=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، أو $Ae^{\alpha t}\left(\alpha+\frac{k}{m}\right)+\frac{kB}{m}=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

لكي تتحقق هذه المعادلة يجب أن يكون :

$\alpha+\frac{k}{m}=0\Rightarrow\alpha=-\frac{k}{m}$ ، $\frac{kB}{m}=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، ومنه $B=\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

أما لتحديد عبارة A نستعمل الشروط الابتدائية ، فمثلا إذا لم تكن للجسم سرعة ابتدائية ، أي أنه عند اللحظة $t=0$ تكون $v=0$

يكون لدينا باستعمال المعادلة (2) $0=Ae^{0}+\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، ومنه $A=-\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$.

المعادلة التفاضلية هي إذن :

$$\boldsymbol{v=\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)}$$

السرعة الحدّية :

عندما يسقط الجسم تتزايد سرعته ، حيث في نفس الوقت تتزايد قوة الاحتكاك ، لأن هذه الأخيرة تتناسب مع السرعة . ونعلم أن أثناء السقوط لا يتغير ثقل الجسم وكذلك دافعة أرخميدس لا تتغير (نعتبر دائما عند $t=0$ دافعة أرخميدس موجودة ، أي نعتبر أن الجسم يكون مغمورا تماما في المائع في اللحظة $t=0$) . وعندما يصبح مجموع قوتي الاحتكاك ودافعة أرخميدس مساويا لقوّة الثقل يصبح المجموع الشعاعي للقوى المؤثرة على الجسم معدوما ، وبالتالي يصبح التسارع معدوما

لأن $\sum\vec{F}=m\,\vec{a}$ ، $m\neq 0$ ، ومنه $\frac{dv}{dt}=0$ ، لأن $a=\frac{dv}{dt}$

نعوّض $\frac{dv}{dt}=0$ في المعادلة التفاضلية (1) ونجد السرعة ، والتي نسميها السرعة الحدّية :

$$\boldsymbol{v_l=\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)}$$

• **حالة $f=k'\,v^2$**

$mg-k'v^2-\rho_f V_S\,g=m\frac{dv}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة التفاضلية على m ، نكتب :

$\frac{dv}{dt}+\frac{k'}{m}v^2=g\left(1-\rho_f\frac{V_S}{m}\right)$ ، ولدينا $\frac{V_S}{m}=\frac{1}{\rho_S}$ ، حيث ρ_S : الكتلة الحجمية للجسم .

وتصبح المعادلة التفاضلية : $\frac{dv}{dt}+\frac{k'}{m}v^2=g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

بوضع $\frac{dv}{dt}=0$ ، نجد عبارة السرعة الحدية $\boldsymbol{v_l=\sqrt{\frac{mg}{k'}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)}}$

هذه المعادلة التفاضلية من الشكل : $\frac{dv}{dt}+B\,v^2=A$ ، إن حل هذه المعادلة التفاضلية بالطريقة السابقة خارج برنامج الرياضيات .

لهذا نلجأ للطريقة التقريبية المسماة طريقة أولر .

ملاحظة : A و B في هذه المعادلة التفاضلية لا علاقة لهما بـ A و B في حل المعادلة التفاضلية السابقة ، فهي مجرد رموز فقط .

تسمح طريقة أولر بتمثيل تقريبي للسرعة بدلالة الزمن . فمن أجل حساب السرعات في كل لحظة يجب أن نماثل بين $\frac{dv}{dt}$ و $\frac{\Delta V}{\Delta t}$

أي معنى هذا يجب أن نأخذ فرقا صغيرا بين كل لحظة ولحظة تعقبها ، أو بعبارة أخرى يجب أن يكون Δt صغيرا .

لدينا : $\frac{dv(t)}{dt}=A-B\,v^2(t)$. وبالتالي نكتب $\frac{\Delta v}{\Delta t}=A-B\,v^2(t)$ أو $\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=A-Bv^2(t)$

وبالتالي : $v(t+\Delta t)-v(t)=\left[A-Bv^2(t)\right]\Delta t$

نسمي Δt **خطوة التغيّر الزمني** .

إذا كانت مرتبة السرعة $v(t)$ هي v_n ، تكون مرتبة السرعة $v(t+\Delta t)$ هي v_{n+1} ، وعلى هذا الأساس نكتب :

$$\boldsymbol{v_{n+1}=v_n+\left[A-B\,v_n^2\right]\Delta t}$$

عندما نحسب قيم السرعة في كل لحظة نتبع ما يلي :

عند $t_0=0$ لدينا $v=v_0$

عند $t_1=t_0+\Delta t$ ، أي من أجل $n=0$ لدينا $v_1=v_0+\left[A-B\,v_0^2\right]\Delta t$

عند $t_2=t_1+\Delta t$ ، أي من أجل $n=1$ لدينا $v_2=v_1+\left[A-B\,v_1^2\right]\Delta t$

عند $t_3=t_2+\Delta t$ ، أي من أجل $n=2$ لدينا $v_3=v_2+\left[A-B\,v_2^2\right]\Delta t$ ...

وهكذا نتحصّل على جدول يحتوي على قيم السرعة واللحظات الموافقة لها ، وبالتالي يمكن تمثيل $v=f(t)$

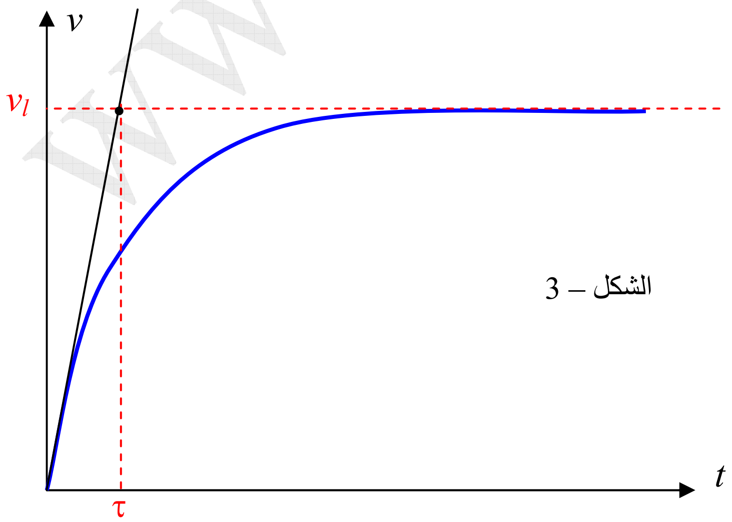
وإذا أردنا حساب التسارع في اللحظة t_n نكتب $\boldsymbol{a_n=\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t_n}=A-B\,v_n^2}$

ملاحظة : يمكن أن نستعمل طريقة أولر في حالة المعادلة التفاضلية من أجل $f=k\,v$ بإتباع نفس الخطوات .

3 - تمثيل $v=f(t)$ (الشكل – 3)

سواء من أجل $f=kv$ أو $f=k'v^2$

نجد البيان الممثّل في الشكل - 3 .



الشكل – 3

4 - الثابت المميز للحركة (τ) (ثابت الزمن)

حالة $f = kv$: لدينا المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، ونعلم أنه عند $t=0$ تكون سرعة المتحرك معدومة ،

وبالتالي $\frac{dv}{dt} = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right) \quad (3)$

ونعلم كذلك أن $\frac{dv}{dt}$ هو تسارع المتحرك ، نرمز له بـ a_0 عند $t=0$.

ملاحظة : لا تنس أن التسارع ليس ثابتا لأن الحركة ليست متغيرة بانتظام ، لأن مجموع القوى ليس ثابتا لأن f تتغير أثناء الحركة في النظام الانتقالي .

نكتب العلاقة (3) على الشكل $a_0 = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$

لاحظ في الشكل – 3 أن ميل المماس عند $t=0$ هو التسارع a_0 ، لأنه هو مشتق السرعة بالنسبة للزمن عند $t=0$ ، وبالتالي

$a_0 = \frac{v_l}{\tau}$ (ميل المماس هو المقابل على المجاور) ، ومنه : $\boxed{\tau = \frac{v_l}{a_0}}$

لدينا $v_l = \frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)$ ، وبالتالي $\tau = \frac{\frac{mg}{k}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)}{g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)} = \frac{m}{k}$ ، ومنه $\boxed{\tau = \frac{m}{k}}$

حــالة $f = k'v^2$: لدينا المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt}+\frac{k'}{m}v^2 = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right)$ ، ونعلم أنه عند $t=0$ تكون سرعة المتحرك معدومة

وبالتالي $\frac{dv}{dt} = g\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_S}\right) = a_0$ ، ولدينا $v_l = \sqrt{\frac{mg}{k'}\left(1-\frac{\rho_f}{\rho_s}\right)}$ ، ونعلم أن $\tau = \frac{v_l}{a_0}$ سواء كانت $f = kv$ أو $f = k'v^2$.

وبالتالي $\tau = \frac{\sqrt{\frac{m}{k'}a_0}}{a_0} = \sqrt{\frac{m\times a_0}{k'\times a_0^2}} = \sqrt{\frac{m}{k'a_0}}$ ، ومنه $\boxed{\tau = \sqrt{\frac{m}{k'a_0}}}$

الثابت المميز للحركة هو رتبة مقدار زمن النظـام الانتقالي

الكلام الموجود داخل الإطار معناه أننا نستعمل τ كوحدة لقياس مدة النظام الانتقالي ، مثلا : 5τ ، 3τ ، ....

التحليل البعدي لثابت الاحتكاك :

بالنسبة لـ $k = \frac{m}{\tau}$: $[k] = \frac{kg}{s} = kg.s^{-1}$

بالنسبة لـ $k' = \dfrac{m}{\tau^2 \times a_0}$: $[k'] = \dfrac{kg}{s^2 \times \dfrac{m}{s^2}} = kg.m^{-1}$

ثابت الاحتكاك k : يتعلق بلزوجة المائع وشكل الجسم ، فبالنسبة لكرة نصف قطرها r : $k = 6\pi\eta r$ ، حيث η هو معامل اللزوجة .

ثابت الاحتكاك k' : لا يتعلق بلزوجة المــائع بل يتعلق فقط بشكل الجسم ، فبالنسبة لكرة نصف قطرها r : $k' = 0,22\, \pi \rho_f\, r^2$ ، حيث ρ_f هي الكتلة الحجمية للمائع .

ملاحظة : أنت لست مطالبا بحفظ هاتين العلاقتين ، تعطى لك في التمارين من أجل مقارنة ثابت الاحتكاك التجريبي مع النظري ، أو اختيار مائع من بين عدّة موائع مقترحة في التمرين .

5 - السقوط الحر

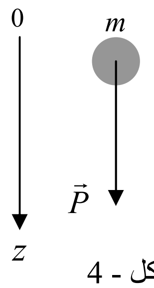
نقول عن جسم أنه في سقوط حرّ إذا كان أثناء حركته لا يخضع إلا لقوّة ثقله $\vec{P}$ (الشكل – 4) .

نطبق القانون الثاني لنيوتن على جسم في سقوط حرّ .

$\vec{P} = m\,\vec{a}$ ، ولدينا $\vec{P} = m\,\vec{g}$ ، ومنه : $m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$ ، وبالتالي تسارع السقوط الحر هو :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

المعادلة التفاضلية لهذه الحركة هي $\dfrac{dv}{dt} = g$



الشكل - 4

5 – 1 - معادلات السقوط الحر الشاقولي :

التسارع : $a = g$ ، حيث g قيمة جبرية (أي موجبة أو سالبة) .

السرعة : بمكاملة التسارع بالنسبة للزمن (يعني وجود الدالة الأصلية) نجد السرعة في اللحظة t : $v = g\,t + b$

من أجل تحديد الثابت b نستعمل الشروط الابتدائية ، أي عند $t = 0$ تكون $v = v_0$ ، (v_0 هي السرعة الابتدائية ، أي السرعة في اللحظة $t = 0$ ، وليس ضروريا أن تكون هي السرعة التي بدأ بها الجسم حركته)

$$\boxed{v = gt + v_0}$$

الفاصلة : بمكاملة السرعة بالنسبة للزمن : $z = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C$ ، ومن أجل تحديد الثابت C نستعمل الشروط الابتدائية

حيث عند $t = 0$ يكون $z = z_0$ (z_0 هي الفاصلة الابتدائية ، وليس بالضرورة أن تكون هي الفاصلة التي انطلق منها المتحرك) .

$$\boxed{z = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0}$$

5 – 2 - قوانين خاصة بالسقوط الحر

المسافة المقطوعة (الارتفاع) : $h = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ حيث t هي المدة الزمنية لقطع المسافة h .

سرعة الجسم في لحظة ما : إذا كانت سرعة الجسم في لحظة ما هي v_A وكانت في لحظة بعدها v_B ، فإن :

$v_B - v_A = g\, t$ حيث t هي المدة المستغرقة بين A و B

العلاقة بين السرعة والمسافة : إذا كانت سرعة الجسم في لحظة ما هي v_A وكانت في لحظة بعدها v_B ، فإن

$v_B^2 - v_A^2 = 2g\, h$ حيث h هي المسافة AB

6 - حركة قذيفة في مجال الجاذبية الأرضية

القذيفة هي جسم يُقذف من نقطة بسرعة ابتدائية يصنع شعاعها مع المستوي الأفقي التي قذفت منه زاوية $\alpha \in \left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$

ملاحظة : إذا كانت $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ يكون القذف شاقوليا (سبق لنا دراسة هذه الحالة) .

ندرس حركة القذيفة في المستوي $(O\,x\,z)$ أو $(O\,y\,z)$ ، أي في مستو شاقولي .

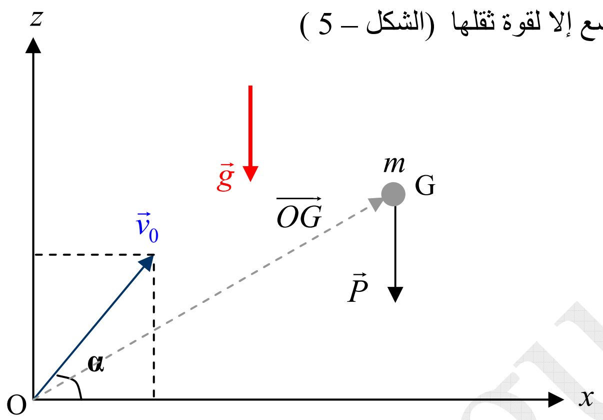
ندرس مثالا مختصرا ، ونتطرق لكل الحالات الأخرى في تمارين الكتاب المدرسي .

نقذف في اللحظة $t = 0$ جسما نعتبره نقطة مادية من مبدأ الإحداثيات بسرعة $\vec{v}_0$ يصنع شعاعها مع المحور Ox الزاوية α .

6 – 1 - دراسة حركة القذيفة

نطبّق على حركة النقطة المـادية القانون الثاني لنيوتن ، باعتبار أنها لا تخضع إلا لقوة ثقلها (الشكل – 5)

أي حركتها عبارة عن سقوط حر .



الشكل – 5

$$\sum \vec{F} = m\, \vec{a}$$

$\vec{P} = m\, \vec{a}$ ، وبتعويض $\vec{P}$ بـ $m\, \vec{g}$ واختصار m من الطرفين :

نجد $\vec{a} = \vec{g}$

مركبتا شعاع التسارع في المعلم هما $\vec{a}\,(0\ ,\ -g)$

مركبتا شعاع السرعة الابتدائية هما $\vec{v}_0\,(v_0 \cos\alpha\ ,\ v_0 \sin\alpha)$

مركبتا شعاع الانتقال هما $\overrightarrow{OG}\,(x\ ,\ z)$.

بما أن التسارع على المحور Ox معدوم ، إذن الحركة على هذا المحور منتظمة ، وسرعتها $v_x = v_0 \cos\alpha$ ، وبالتالي :

$$x = v_0 \cos\alpha\ t \qquad (4)$$

بما أن التسارع على المحور Oz ثابت $(-g)$ ، إذن الحركة على هذا المحور متغيّرة بانتظام ، وسرعتها الابتدائية $v_{0,z} = v_0 \sin\alpha$

وبالتالي : $$z = -\frac{1}{2} g\ t^2 + v_0 \sin\alpha\ t \qquad (5)$$

وباشتقاق عبارة z بالنسبة للزمن نجد السرعة على المحور z : $v_z = -g\ t + v_0 \sin\alpha$

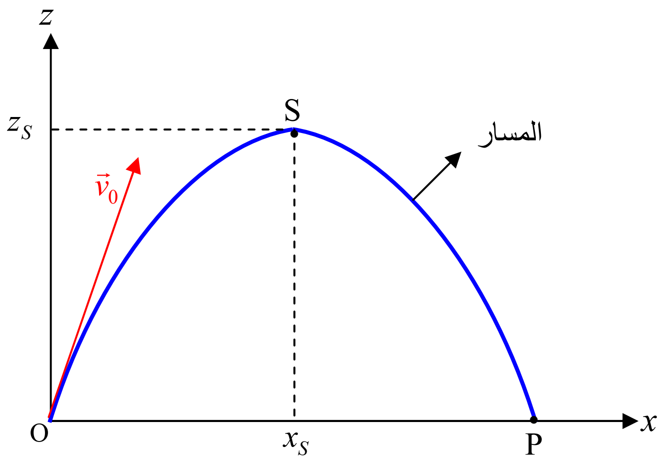
6 – 2 - معادلة المسار

من العلاقة (4) نستخرج $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ ، ثم نعوّض عبارة الزمن في العلاقة (5) ونجد معادلة المسار :

$z = -\dfrac{1}{2} g\ \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha\ \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ ، ومنه : $$z = -\frac{g}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\ tg\alpha$$

معادلة المسار من الشكل $z = a\, x^2 + b\, x + c$ في الحالة العامة (معناه إذا كان $z_0 = c$) ، فهي معادلة قطع مكافئ .

6 – 3 - النقط الخاصة في المسار



الشكل – 6

الذروة (S) : هي أعلى نقطة تصلها القذيفة (الشكل – 6) .

من خصائص هذه النقطة أن السرعة على المحور Oz تنعدم ، أي

$$-g\ t + v_0 \sin\alpha = 0 \qquad (6)$$

ملاحظة : السرعة على المحور Ox لا تنعدم في S لأن السرعة على هذا المحور ثابتة (الحركة منتظمة على Ox) .

نستخرج الزمن من العلاقة (6) ونعوّضه في العلاقة (5)

نجد ترتيب الذروة : $z_S = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$

المدى : هي أكبر مسافة تقطعها القذيفة على المحور الأفقي Ox ، أي هي المسافة OP .

لإيجاد المسافة OP (x_P) نضع $z = 0$ في معادلة المسار ونجد : $x_P = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

7 - تحديد سرعة القذيفة في اللحظة t بتطبيق مبدأ انحفاظ الطاقة

نهمل تأثير الهواء على الجسم (الاحتكاك ودافعة ارخميدس) تكون الجملة شبه معزولة ، أي أن طاقتها الميكانيكية (الكلّيّة) تكون محفوظة .

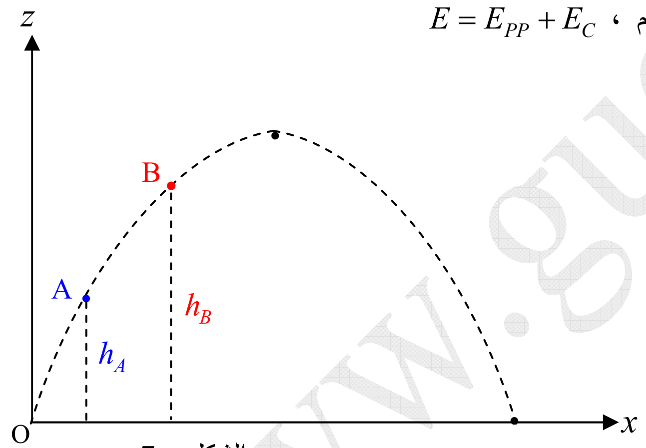
نعتبر الوضع المرجعي هوالمستوي الأفقي الذي يشمل النقطة O (الشكل – 7) .

الطاقة الميكانيكية E هي مجموع الطاقتين الكامنة الثقالية والحركية للجسم ، $E = E_{PP} + E_C$

$E_B = E_A$ لأن الطاقة الميكانيكية ثابتة .

$$mgh_A + \frac{1}{2}mv^2_A = mgh_B + \frac{1}{2}mv^2_B$$

$$\boldsymbol{v^2_B = v^2_A + 2g(h_A - h_B)}$$



الشكل – 7

8 - تمثيل الطاقة الحركية والكامنة بدلالة الزمن

8 – 1 – الطاقة الكامنة

لدينا $E_{PP} = mgz = mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\ t\right)$ ، باعتبار الوضع المرجعي هو المحور Ox (z يتغيّر مع الزمن)

$$E_{PP} = -\frac{1}{2}mg^2\ t^2 + mg\ v_0 \sin\alpha\ t$$

نلاحظ أن العلاقة $E_{PP} = f(t)$ عبارة عن قطع مكافيء يمر بالمبدأ و هي من الشكل $E_{PP} = at^2 + bt$ ، حيث $a < 0$

8 – 2 – الطاقة الحركية

لدينا $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (7)

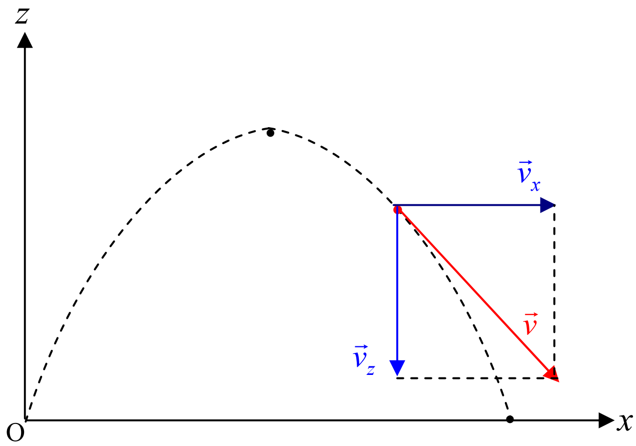
حيث أن في كل لحظة يكون $v^2 = v_x^2 + v_z^2$ (الشكل – 8)

ولدينا $v_x = v_0 \cos\alpha$ و $v_z = -gt + v_0 \sin\alpha$

بالتعويض في العلاقة (7) :

$$E_C = \frac{1}{2}m\left[v_0^2 \cos^2\alpha + (-gt + v_0 \sin\alpha)^2\right]$$

$$E_C = \frac{1}{2}mg^2t^2 - mg\ t\ v_0 \sin\alpha + \frac{1}{2}mv_0^2$$



الشكل – 8

نلاحظ أن العلاقة $E_c = f(t)$ عبارة عن قطع مكافيء معادلته من الشكل $E_c = at^2 + bt + c$ ، حيث $a > 0$

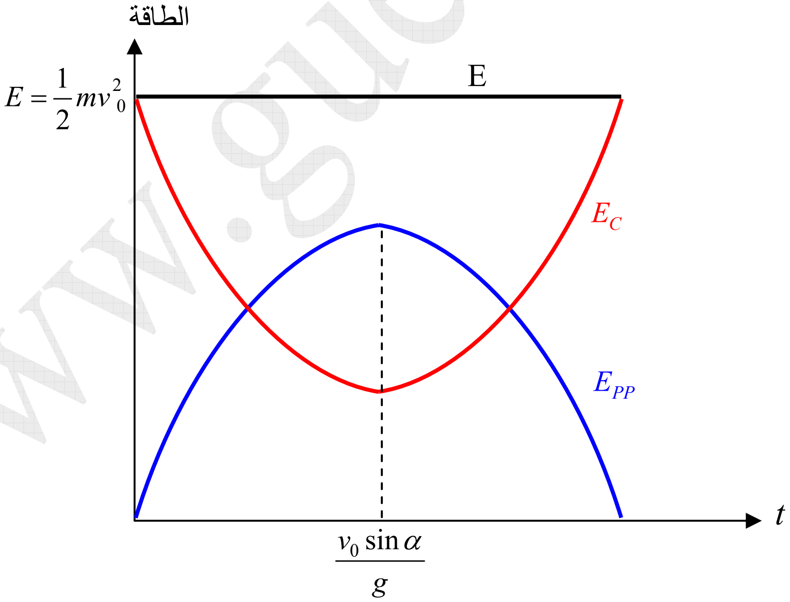
8 – 3 – الطاقة الميكانيكية (الشكل – 9)

$E = E_{PP} + E_C$ ، وبالتعويض :

$$E = -\frac{1}{2}mg^2\ t^2 + mg\ v_0 \sin\alpha\ t + \frac{1}{2}mg^2t^2 - mg\ t\ v_0 \sin\alpha + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$E = \frac{1}{2}mv_0^2$ ، وهي ثابتة مهما كان الزمن

مخطط الطـاقة



الشكل - 9