

تمهيد :

لتكن $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$
نعلم أن الدالة $(x \mapsto \log_a x)$ متصلة ورتيبة قطعاً على \mathbb{R}_+^* .
إن: \mathbb{R}_+^* هي تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}_+^* .
ومنه فهي تقبل دالة عكسية معرفة من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}_+^* .

تعريف :

الدالة العكسية للدالة $(x \mapsto \log_a x)$ تسمى **الدالة الأسية للأساس a** ، ونرمز لها بـ $(x \mapsto \exp_a(x))$.

استنتاج :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad \forall y \in \mathbb{R} \\ \log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \exp_a(y)$$

ملاحظة :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad \exp_a(x) = a^x \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad a^x = e^{x \ln a} \quad (2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad 1^x = 1 \quad (3)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad a^x > 0 \quad (4)$$

دراسة الدالة $f(x \mapsto a^x)$

1- مجموعة التعريف :

$$D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

2- النهايات :

• الحالة 1 : $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = 0$$

• الحالة 2 : $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

3- التغيرات :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad a^x = e^{x \ln a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x \quad \text{إن:}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad (a^x)' = \ln a \cdot a^x \quad \text{إن:}$$

ومنه إشارة $(a^x)'$ هي إشارة $\ln a$.

ملاحظة :

لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} ; (a^x)'' = (\ln a \cdot a^x)' = \ln^2 a \cdot a^x > 0$

• الحالة 1 : $a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

• الحالة 2 : $0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$		-
a^x	$+\infty$	0

تطبيقات :

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \quad (1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

نضع : $X = \frac{1}{x}$

$$(x \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (X \rightarrow 0)$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} = e^1 = e \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} \quad (2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1 \quad (3)$$

حدد مشتقة الدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = 4^x \quad (1)$$

$$f(x) = e^{x \ln 4}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln 4) \cdot e^{x \ln 4} \\ &= (\ln 4) \cdot 4^x \end{aligned} \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = \frac{2^x}{x} \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{e^{x \ln 2}}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln 2) \times 2^x \times x - 2^x}{x^2} \\ &= \frac{(x \ln 2 - 1) 2^x}{x^2} \end{aligned} \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad (3)$$

$$f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \cdot e^{\frac{\ln x}{x}} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \cdot e^{\frac{\ln x}{x}} \end{aligned} \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = 3^{1-x} \quad (4)$$

$$f(x) = e^{(1-x) \ln 3} \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((1-x) \cdot \ln 3)' \cdot 3^{1-x} \\ &= -\ln 3 \cdot 3^{1-x} \end{aligned} \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \quad (5)$$

$$f(x) = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)' \cdot e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \quad \text{إذن :}$$

$$= \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1+x}{x}} \right) \cdot e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$

$$f'(x) = \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right) \cdot e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}$$